ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД УКООПСПІЛКИ
«ПОЛТАВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ ЕКОНОМІКИ І ТОРГІВЛІ» (ПУЕТ)
Кафедра комп'ютерних наук та інформаційних технологій

О. О. Ємець, Т. О. Парфьонова

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ І МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА
(Частина 1)

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНИЙ ПОСІБНИК
для самостійного вивчення навчальної дисципліни студентами денної форми навчання спеціальності 122 Комп'ютерні науки освітня програма «Комп'ютерні науки» ступеня бакалавра

Полтава
ПУЕТ
2023

Автори: ***О. О. Ємець,*** д. ф.-м. н., професор;
Т. О. Парфьонова, к. ф.-м. н., доцент, доцент кафедри комп'ютерних наук та інформаційних технологій Вищого навчального закладу Укоопспілки «Полтавський університет економіки і торгівлі».

Рецензенти: ***Т. В. Чілікіна,*** к. ф.-м. н., доцент, доцент кафедри комп'ютерних наук та інформаційних технологій Вищого навчального закладу Укоопспілки «Полтавський університет економіки і торгівлі»;
О. П. Кошова, к. п. н., доцент, доцент кафедри комп'ютерних наук та інформаційних технологій Вищого навчального закладу Укоопспілки «Полтавський університет економіки і торгівлі».

Рекомендовано до видання, розміщення в електронній бібліотеці та використання в освітньому процесі на засіданні кафедри комп'ютерних наук та інформаційних технологій ПУЕТ
1 вересня 2022 р., *протокол* ***№ 1***

Ємець О. О.
Теорія ймовірностей і математична статистика (Частина 1) : навчально-методичний посібник для самостійного вивчення навчальної дисципліни студентами денної форми навчання спеціальності 122 Комп'ютерні науки освітня програма «Комп'ютерні науки» ступеня бакалавра / О. О. Ємець, Т. О. Парфьонова. – Полтава : ПУЕТ, 2023. – 55 с. – 1 електрон. опт. диск (CVD-ROM).

Відповідальні за зміст навчально-методичного видання автори, рецензенти та завідувач кафедри комп'ютерних наук та інформаційних технологій ***О. В. Ольховська***

ВСТУП

Дисципліна *«Теорія ймовірностей і математична статистика» вивчається студентами очної форми навчання спеціальності 122 Комп'ютерні науки, вона є складовою частиною галузі знань 12 «Інформаційні технології» і розроблена на основі «Освітньо-професійної програми», робочого навчального плану бакалавра з комп'ютерних наук.*

Основною метою вивчення дисципліни «Теорія ймовірностей і математична статистика» є формування знань, умінь і практичних навичок застосування основних методів теорії ймовірностей і математичної статистики, які необхідні для аналізування і прогнозування законів, що описують економічні і соціальні явища та процеси.

Головним завданням дисципліни є здобуття фундаментальних теоретичних знань сучасної теорії ймовірностей та основних методів обробки статистичних даних.

Предметом вивчення дисципліни «Теорія ймовірностей і математична статистика» є випадкові події, випадкові величини та їх функції, розподіли випадкових величин та їх статистичні закономірності.

Після вивчення дисципліни студент повинен:

знати:

− *означення ймовірності (класичне, частотне, геометричне);*

− *властивості ймовірності, умовні ймовірності, незалежні події, формули повної ймовірності та Байєса;*

− *означення випадкової величини (дискретної (ДВВ) та неперервної (НВВ), функцію і щільність розподілу, числові характеристики випадкових величин: математичне сподівання, дисперсія;*

− *основні розподіли: біноміальний, Пуассона, геометричний, рівномірний, показниковий, нормальний та їх числові характеристики;*

− *як перевіряти випадкові величини на незалежність;*

− *закони великих чисел і центральну граничну теорему;*

уміти:

− *знаходити ймовірності випадкових подій;*

− *користуватися формулами повної ймовірності та Байеса;*

− *користуватися формулами Бернуллі та граничними теоремами Бернуллі для обчислення ймовірностей;*

− *знаходити числові характеристики (математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення) випадкових величин;*

− *будувати функцію розподілу для ДВВ і НВВ; знаходити щільність неперервної випадкової величини;*

– *визначати розподіли функцій випадкових величин;*

– *застосовувати закони великих чисел і центральну граничну теорему для перевірки збіжності випадкових величин;*

Вивчення дисципліни базується на елементах знань із дисциплін «Дискретна математика», «Алгебра та геометрія», «Математичний аналіз».

Дисципліна є основою для дисциплін «Архітектура обчислювальних систем», «Елементи комбінаторної оптимізації», «Курсовий проект з фаху», «Методи оптимізації і дослідження операцій», «Обчислювальні методи», «Системний аналіз і теорія прийняття рішень», «Теорія програмування», «Аналіз даних і прикладні пакети статистичної обробки інформації», «Дипломне проектування. Атестація», «Теорія інформації і кодування».

НАВЧАЛЬНА ПРОГРАМА ДИСЦИПЛІНИ

Модуль 1. Випадкові події, основні властивості

Тема 1. Основні поняття теорії ймовірностей

Предмет теорії ймовірностей і математичної статистики.
Поняття ймовірності. Формула класичної ймовірності.
Теореми додавання і множення ймовірностей випадкових подій.
Формула повної ймовірності. Формула Бейєса.
Формула Бернуллі. Граничні випадки формули Бернуллі.

Модуль 2. Випадкові величини, функції – основні характеристики

Тема 2. Випадкові величини та їх основні характеристики

Основні поняття про випадкові величини.
Дискретна випадкова величина (ДВВ).
Неперервна випадкова величина (НВВ).
Числові характеристики випадкових величин.
Деякі розподіли дискретних і неперервних випадкових величин.
Нормальний закон розподілу неперервних випадкових величин.
Багатовимірні випадкові величини.

ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН ДИСЦИПЛІНИ

Назва теми	**Кількість годин за видами занять**					
	разом	**аудиторні заняття**				**самостійна робота**
		лекції	**семінарські**	**практичні**	**лабораторні**	
Модуль 1. Випадкові події, основні властивості						
Тема 1. Основні поняття теорії ймовірностей	10	10	–	14	–	35
Модуль 2. Випадкові величини, функції – основні характеристики						
Тема 2. Випадкові величини та їх основні характеристики	8	8	–	10	–	43
Усього	**120**	**18**	–	**24**	–	**78**

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ЩОДО ВИВЧЕННЯ ДИСЦИПЛІНИ

Модуль 1. Випадкові події, основні властивості

Тема 1. Випадкові події, основні властивості

У процесі самостійного вивчення теми особливу увагу слід звернути на визначення основних понять: види випадкових подій та дії над ними, класичне, статистичне та геометричне означення ймовірності, формула повної ймовірності, формула Байєса, формула Бернуллі, інтегральна та локальна теореми Лапласа, теорема Пуассона. Крім того, засвоїти особливості застосування елементів комбінаторики до обчислення ймовірностей.

Термінологічний словник

Елементи комбінаторики

Означення 1. ***Розміщеннями*** з n елементів по m в кожному називаються такі вибірки, з яких кожна містить m елементів, взятих із числа даних n елементів, і які відрізняються одна від одної або самими елементами (хоча б одним), або лише порядком їх розташування. Число розміщень з n елементів по m в кожному позначається символом A_n^m.

Правило добутку. Якщо перший елемент пари можна вибрати a способами, а другий – b способами, то пару можна вибрати $a \cdot b$ способами.

Число розміщень із n елементів по m (без повторень) можна обчислити за формулами: $A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$, $A_n^m = n(n-1)\cdot \ldots \cdot (n-m+1)$.

Означення 2. ***Переставленнями*** з n елементів називаються такі вибірки, кожна з яких містить усі n елементів. Вибірки відрізняються одна від одної лише порядком розташування елементів.

Число переставлень з n елементів (без повторень) позначається символом P_n і обчислюється за формулою: $P_n = n!$

Означення 3. ***Сполученнями*** (комбінаціями) з n елементів по m в кожному називаються такі вибірки, з яких кожна містить m елементів, взятих з числа даних n елементів. Вибірки відрізняються одна від одної принаймні одним елементом.

Число сполучень з n елементів по m в кожному (без повторень) позначається символом C_n^m обчислюється за формулою:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} \ .$$

Події і їх класифікація

Випадковий експеримент, спроба чи ***випробування*** – це процес, при якому можливі різні наслідки, так що заздалегідь неможливо передбачити, який буде результат. ***Спроба*** (випробування) характеризується тим, що її (його) в принципі можна повторити скільки завгодно раз. ***Подією*** називається всякий факт, який може відбутися, або не відбутися при деякому випробуванні. Подія називається: *вірогідною,* якщо в цьому випробуванні вона обов'язково відбудеться; *невірогідною* (неможливою), якщо вона явно не відбудеться в цьому випробуванні. Усі події можна розділити на три види: *випадкові, вірогідні і неможливі*.

Означення 4. Дві події називаються ***несумісними***, якщо поява однієї з них виключає появу іншої.

Означення 5. Кілька подій утворюють ***повну групу*** подій, якщо в результаті випробування обов'язково з'явиться хоча б одна з них.

Означення 6. Події називаються ***рівноймовірними*** (рівноможливими), якщо за умовами випробування поява будь-якої з них не є більш можливою, ніж поява іншої.

Класичне означення ймовірності

Нехай у результаті спроби може трапитись тільки скінченна кількість подій, які є несумісними і рівноможливими. Ці події називаються елементарними подіями.

Ті елементарні події, у разі здійснення яких подія A настає, називаються подіями, що сприяють появі події A.

Означення 7. Ймовірністю випадкової події A називається відношення кількості елементарних подій, що сприяють появі події A, до кількості всіх елементарних подій

$$P(A) = m/n \, .$$

Властивості ймовірності:

1. Імовірність вірогідної події дорівнює 1 ($m = n$): $P(A) = n/n = 1$.

2. Імовірність неможливої події дорівнює 0 ($m=0$):

$$P(A)=0/n=0.$$

3. Імовірність випадкової події міститься між 0 і 1.

Оскільки $0<m<n$, то $0<P(A)<1$.

4. Імовірність будь-якої події $0 \le P(A) \le 1$.

Розглянуте означення ймовірності називають класичним.

Статистичне означення ймовірності

Класичне означення ймовірності має ряд вад. По-перше, кількість елементарних подій повинна бути скінченною, а на практиці множина можливих результатів може бути нескінченною. По-друге, рідко зустрічаються випадки, коли елементарні події є рівноймовірними.

Введемо поняття відносної частоти події.

Нехай n – загальне число спроб, а m – число появ події A.

Означення 8. ***Відносною частотою*** випадкової події називають відношення числа спроб, за яких подія відбулася, до загального числа спроб.

Позначається відносна частота $W(A)$, отже, за означенням

$$W(A)=m/n.$$

Відносна частота має властивість стійкості і разі великої кількості випробувань коливається навколо одного і того ж числа.

Статистичне означення ймовірності полягає в тому, що за статистичну ймовірність події приймають число, до якого прямує відносна частота при збільшенні кількості спроб.

Співставляючи класичне означення ймовірності й означення відносної частоти, бачимо, що класичне означення не вимагає проведення випробування, а означення відносної частоти передбачає, що випробування проведене.

Теореми додавання ймовірностей несумісних подій

Означення 9. ***Сумою*** двох подій A і B називається подія, що полягає в появі або події A, або події **B**, або обох цих подій одночасно.

Позначають суму подій так: $A+B$ (рис. 1).

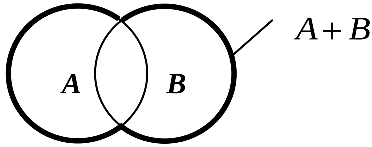


Рисунок 1 – Сума подій

У випадку, коли *A* і В *несумісні* – справедливе таке твердження.

Теорема 1. Імовірність того, що відбудеться одна з двох несумісних подій, дорівнює сумі ймовірностей цих подій, тобто

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

Зауваження 1. Теорема справедлива для довільного числа парами несумісних подій.

Ймовірність у повній групі подій

Протилежні події та їх ймовірність

У випадку *попарної несумісності* подій, що утворюють повну групу, в результаті випробування з’явиться тільки одна з цих подій.

Теорема 2. Сума ймовірностей попарно несумісних подій A_1, A_2, ..., A_n, що утворюють повну групу, дорівнює одиниці, тобто

$$P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n)=1.$$

Означення 10. Дві події називаються ***протилежними***, якщо вони несумісні й утворюють повну групу.

Позначимо через $\overline{A}$ подію, протилежну події *A*.

$$P(\overline{A})=1-P(A).$$

Часто позначають $P(A)=p;\ P(\overline{A})=q.$ Тоді $p+q=1,\ q=1-p.$

Теорема множення ймовірностей незалежних подій

Означення 5. ***Добутком*** двох подій *A* і *B* називається подія, що полягає в одночасній появі події *A* і події *B*.
Позначають добуток $A\cdot B$ (рис. 2).

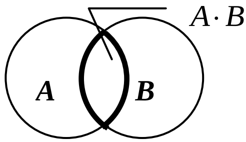


Рисунок 2 – Добуток подій

Означення 6. Дві події називаються ***незалежними,*** якщо ймовірність однієї з них не залежить від того, відбулася друга подія чи ні.

Теорема 3. Імовірність сумісної появи незалежних подій *A* і *B* дорівнює добутку ймовірностей подій *A* і *B*

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B).$$

Цю теорему можна узагальнити і на випадок *n* незалежних у сукупності подій.

Незалежними у сукупності називаються події, якщо кожна з них і будь-яка комбінація інших є подіями незалежними.

Теорема тоді приймає вигляд:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n).$$

Залежні події, теорема множення ймовірностей залежних подій

Означення 11. Подія *A* називається залежною від події *B*, якщо ймовірність появи події *A* залежить від того, сталася чи не сталася подія *B*.

Позначимо через $P_B(A)$ імовірність події *A* за умови, що подія *B* сталася і назвемо її умовною.

Теорема 4. Ймовірність сумісної появи двох залежних подій дорівнює ймовірності однієї з них, помноженої на умовну ймовірність іншої в припущені, що перша подія відбулася

$$P(AB) = P(A)P_A(B).$$

Аналогічно $P(AB) = P(B)P_B(A).$

Для трьох подій $P(ABC) = P(A)P_A(B)P_{AB}(C).$

Теорема додавання ймовірностей сумісних подій

Означення 12. Події A і B називаються ***сумісними***, якщо поява події A в одному випробуванні не виключає появи події B в тому ж випробуванні.

Теорема 5. Якщо події A і B сумісні, то

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B). \qquad (1)$$

Наслідок 1. Якщо A і B *незалежні* і, отже $P(AB)=P(A)\cdot P(B)$, то формула (1) набуває вигляду $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A)\cdot P(B)$. Якщо A і B *залежні*, то $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A)\cdot P_A(B)$.

Імовірність появи хоч б однієї з подій

Нехай у результаті випробування можуть з'явитися n подій, незалежних в сукупності, їх імовірності відомі.

Знайти ймовірність того, що в результаті випробування настане принаймні одна з цих подій.

Подія A_1 має імовірність $P(A_1)=p_1;\ P(\overline{A_1})=1-p_1=q_1;$

....

Подія A_n має імовірність $P(A_n)=p_1;\ P(\overline{A_n})=1-p_n=q_n$.

Позначимо через A подію, яка полягає в тому, що настане принаймні одна з подій $A_1,A_2,\dots,A_n$. Протилежна подія $\overline{A}$ – не настане жодна з подій $A_1,A_2,\dots,A_n$:

$$\overline{A}=\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot\ldots\cdot\overline{A_n}.$$

Події A і $\overline{A}$ протилежні: $P(A)=1-P(\overline{A})=1-q_1\cdot q_2\cdot\ldots\cdot q_n$.

Наслідок 1. Якщо $P(A_i)=q\ \forall i=\overline{1,n},$ то $P(A)=1-q^n$.

Формула повної ймовірності

Нехай подія A настає за умови появи однієї з несумісних подій $H_1,H_2,\dots,H_n$, що утворюють повну групу. Ці події називаються ***гіпотезами.*** Нехай відомі ймовірності гіпотез та умовні ймовірності події A при здійсненні кожної з гіпотез. Тоді ймовірність події A називається ***повною ймовірністю*** і обчислюється за формулою:

$$P(A)=P(H_1)P_{H_1}(A)+\ldots+P(H_n)P_{H_n}(A).$$

Імовірність гіпотез. Формула Байєса

$$P(AH_i)=P(A)P_A(H_i)=P(H_i)P_{H_i}(A).\quad P_A(H_i)=\frac{P(H_i)P_{H_i}(A)}{\sum_{i=1}^{n}P(H_i)P_{H_i}(A)}.$$

Це формули Байєса (англійського математика, надруковані 1764 р.). Вони дозволяють переоцінювати ймовірності гіпотез після того, як стає відомим результат випробування, у результаті якого з'явилася подія *A*.

Повторення випробувань. Формула Бернуллі

Означення 13. Випробування, що повторюються, називаються незалежними по відношенню до події А, якщо ймовірність появи події А в кожному випробуванні не залежить від результатів інших випробувань.

Нехай проводиться n незалежних випробувань, у кожному з яких подія *A* може з'явитися з імовірністю p і не з'явитися з імовірністю $1-p=q$.

Поставимо задачу: знайти ймовірність того, що в серії з n незалежних випробувань подія *A* з'явиться рівно k разів. Шукану ймовірність позначимо $P_n(k)$.

Формула Бернуллі

$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k} \text{ або } P_n(k)=\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k q^{n-k}.$$

Локальна теорема Лапласа

При великих значеннях n користуватися формулою Бернуллі незручно, оскільки значення $n!$ стрімко зростає із збільшенням n.

Локальна теорема Лапласа дає наближену формулу ($n>10$, $npq>10$, $0{,}1<p<0{,}9$) для обчислення $P_n(k)$, точність якої при $n\to\infty$ зростає. Уперше для $p=1/2$ формулу знайшов Муавр (1730 р.), потім для $0<p<1$ її узагальнив Лаплас (1783 р.).

Теорема 6. Якщо ймовірність появи події А в кожному випробуванні стала і дорівнює p $(0 < p < 1)$, то ймовірність $P_n(k)$ того, що подія A з'явиться в n випробуваннях k раз, наближено дорівнює

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x), \text{ де } \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}};\ x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}.$$

При $x > 5$ $\varphi(x) \to 0$.

Функція $\varphi(x)$ табульована.

Вона є парною, оскільки $\varphi(-x) = \varphi(x)$ для кожного x.

Формула Пуассона

Формула Лапласа дає погані результати, якщо $p \le 0{,}1$ $(q \le 0{,}1)$. У цих випадках справедлива формула Пуассона.

Вважаємо, що $np = \lambda$ або $p = \lambda/n$.

Формула Пуассона:

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}.$$

Інтегральна теорема Лапласа

Нехай знову проводиться n незалежних відносно події A випробувань, у кожному з яких ймовірність появи події A стала і дорівнює p. Слід знайти ймовірність того, що подія A в цих n випробуваннях з'явиться не менше k_1 і не більше k_2 разів.

Шукану ймовірність можна обчислити, застосувавши необхідну кількість разів формулу Бернуллі або локальну теорему Лапласа, але обчислення у цьому випадку – дуже громіздкі. Відповідь на поставлену задачу при великих n $(n > 10,\ npq > 10,\ 0{,}1 < p < 0{,}9)$ дає інтегральна теорема Лапласа:

$$P_n(k_1, k_2) = P_n(k_1 \le k \le k_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{t^2}{2}}dt \qquad (3)$$

або

$$P_n(k_1, k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

де $x_1 = \dfrac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$; $x_2 = \dfrac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$;

$\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ – функція Лапласа.

Зауваження 1. Для всіх $x \geq 5$ значення функції $\Phi(x)$ приймають рівним 0,5.

Ймовірність відхилення відносної частоти від сталої ймовірності в незалежних випробуваннях

Нехай проводиться n незалежних випробувань, в кожному з яких імовірність події A стала і дорівнює p $(0 < p < 1)$. Знайдемо ймовірність того, що відхилення відносної частоти m/n від сталої ймовірності p за абсолютною величиною не перевищує заданого числа $\varepsilon > 0$. Отже, треба знайти ймовірність $P\left(\left|\dfrac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right)$.

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Найімовірніше число появ події в незалежних випробуваннях

Число k_0 (появ події в n незалежних випробуваннях, у кожному з яких імовірність появи події дорівнює p) називають найімовірнішим, якщо ймовірність того, що подія настане в цих випробуваннях k_0 разів, перевищує ймовірність (або, в крайньому разі, не менше ймовірності) решти можливих результатів випробувань.

Найімовірніше число k_0 визначають із подвійної нерівності:

$$np - q \leq k_0 \leq np + p.$$

План практичних занять

Зміст практичного заняття	Обсяг годин
Практичне заняття 1. Елементи комбінаторики. Формула класичної ймовірності	2

Зміст практичного заняття	Обсяг годин
Практичне заняття 2. Види випадкових подій. Властивості класичної ймовірності	2
Практичне заняття 3. Теореми додавання і множення ймовірностей випадкових подій	2
Практичне заняття 4. Формула повної ймовірності. Формула Байєса	2
Практичне заняття 5. Схема Бернуллі. Формула Бернуллі. Узагальнення формули Бернуллі на довільну кількість наслідків випробування	2
Практичне заняття 6. Граничні випадки формули Бернуллі: формула Пуассона. Локальна й інтегральна формули Лапласа	2
Практичне заняття 7. Підсумкове заняття на тему «Випадкові події, основні властивості». Модульна контрольна робота № 1	2

Практичне заняття 1. Елементи комбінаторики. Формула класичної ймовірності

Завдання 1. Слово «студент» можна скласти з літер розрізної абетки. Літери викладаються навмання. Знайти ймовірність того, що а) A – літери викладені в ряд, утворять «студент»; б) B – 4 літери, викладені в ряд, утворять «тест»; в) C – із 4-х літер можна скласти «тест»; г) додатково: знайти $P(B)$, $P(C)$, якщо літери витягувались по одній, запам’ятовувалися і поверталися назад.

Рекомендації. Введемо множину, з якої робимо вибірку $M=\left\{ с,т^1,у,д,е,н,т^2\right\}$, потужність множини $\left|M\right|=7=n.$ Літери, що повторюються відрізняємо, ввівши номери $т^1,т^2.$.

а) Об’єм вибірки $k=n=7.$ Простір елементарних подій $\Omega=\left\{\left(с,т^1,у,д,е,н,т^2\right),...,\left(т^1,с,у,д,е,н,т^2\right)\right\},$ де об’єкти Ω – впорядковані, n-вибірки без повторень, тобто переставлення.

$$\left|\Omega\right|=P_n=P_7=7!=7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=5040 .$$

Випишемо наслідки, що утворюють подію A (сприятливі для A наслідки).

$$A'=\left\{\left(c,m^1,y,\partial,e,н,m^2\right),\left(c,m^2,y,\partial,e,н,m^1\right)\right\}.\ \ |A'|=2.$$

За формулою класичної ймовірності

$$P(A)=|A'|/|\Omega|=2/7!=2/5040\approx 0{,}0004.$$

б) Об'єм вибірки $k=4.$

Простір елементарних подій $\Omega=\left\{\left(m^1,e,c,m^2\right),\ldots,\left(c,m^1,y,\partial\right)\right\}$ – розміщення.

$$|\Omega|=A_n^k=A_7^4=7!/3!=7\cdot 6\cdot 5\cdot 4=840.$$

$B'=\left\{\left(m^1,e,c,m^2\right),\left(m^2,e,c,m^1\right)\right\}$ – сприятливі для B наслідки. $|B|=2.$

За формулою класичної ймовірності

$$P(B)=|B'|/|\Omega|=2/7\cdot 6\cdot 5\cdot 4=0{,}002.$$

в) Об'єм вибірки $k=4,$ порядок не має значення.

Простір елементарних подій $\Omega=\left\{\left\{m^1,e,c,m^2\right\},\ldots,\left\{c,m^1,y,\partial\right\}\right\}$ – сполучення.

$|\Omega|=C_n^k=C_7^4=\dfrac{7!}{4!\cdot 3!}=\dfrac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 1}=35.$ $\qquad C'=\left\{\left\{m^1,e,c,m^2\right\}\right\},$ $\qquad |C'|=1.$

$$P(C)=\frac{|C'|}{|\Omega|}=\frac{1}{35}\approx 0{,}03.$$

Завдання 2. На складі 20 найменувань товарів, які необхідно розвести по 3-х магазинах у кількості 9, 7, 4 відповідно. Яка ймовірність того, що перші 9 найменувань попадуть в 1-й магазин, наступні 7 – в 2-й, решта – в 3-й.

Рекомендації. Перші 9 найменувань можна розвести $N_1=C_{20}^9$ способами, наступні 7 – $N_2=C_{11}^7$ способами, останні 4 – $N_3=C_4^4=1$ способом. $P(A)=1/C_{20}^9\cdot C_{11}^7\cdot 1=1/55426800.$

Завдання 3. Серед 18 студентів групи, серед яких 7 дівчат, розігрується 6 білетів. Яка ймовірність того, що серед власників білетів виявиться четверо дівчат?

Завдання 4. Слово «Інтеграл» складається із літер розрізної абетки. Навмання виймають 4 картки і викладають одну за одною в ряд. Яка ймовірність, що при цьому вийде слово «Ліра»?

Завдання 5. Яка ймовірність того, що при випадковому розміщенні в ряд літер розрізної абетки «М», «А», «Г», «Л», «О», «И», «Р», «Т» вийде слово «Алгоритм»?

Завдання 6. В урні 6 червоних і 4 синіх кульки. Виймають 5 кульок. Яка ймовірність того, що серед них буде дві сині.

Рекомендації. Загальна кількість способів вибору п'ятьох кульок із десяти дорівнює числу сполучень із 10 елементів по 5, тобто C_{10}^5.

Відібрати дві сині кульки із чотирьох можна C_4^2 способами.

Кожна пара синіх кульок може бути вибрана разом з кожною трійкою червоних кульок із 6, а число таких трійок дорівнює C_6^3. Отже, число наслідків такого вибору, за правилом добутку дорівнює $C_4^2 \times C_6^3$. Ймовірність шуканої події за класичним означенням: $P(A) = \left(C_4^2 \times C_6^3\right) / C_{10}^5$.

Завдання 7. У групі навчаються 14 чоловік, з них 8 юнаків і 6 дівчат. Для участі у конференції відбирають 7 чоловік. Яка ймовірність того, що в конференції братимуть участь 4 дівчини?

Завдання 8. Два студенти A і B домовились зустрітися в певному місці між 18 і 19 год. Той, хто приходить першим, чекає на другого протягом 20 хв, і не дочекавшись, відходить. Чому дорівнює ймовірність зустрічі студентів *А* і *В,* якщо прихід кожного з них протягом вказаної години може відбутись випадково в незалежні моменти?

Рекомендації. Введемо позначення. x – момент приходу студента *А*, а y – студента *В*. Щоб зустріч відбулась, необхідне виконання умови: $|x-y| \le 20,\ -20 \le x-y \le 20.$ Маємо $x-20 \le y,\ x+20 \ge y.$

Зобразимо x та y як координати точки на площині. Одиниця масштабу – хвилина. Усі можливі результати – точки квадрата зі сторонами 60, сприятливі випадки зобразимо згідно з нерівностями $x-20 \le y,\ x+20 \ge y$ у заштрихованій області (рис. 3):

$m(\Omega)$ – площа квадрату зі стороною 60, тому $m(\Omega) = 60^2$*;*

$m(A)$ – площа заштрихованої фігури, яку можна знайти як різницю площ квадратів зі сторонами 60 та 40 відповідно.

Тоді одержимо: $P(A)=\left(60^2-40^2\right)/60^2=5/9\approx 0{,}556$.

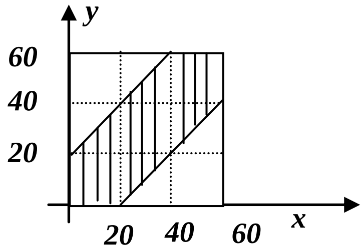


Рисунок 3 – Можливість зустрічі студентів (до завдання 8)

Завдання 9. На причалі очікується прибуття двох теплоходів з 10-ї до 11-ї години. Визначити ймовірність того, що одному з теплоходів доведеться чекати іншого, якщо час стоянки першого теплохода – 15 хвилин, а другого – 25 хв.

Завдання 10. У крузі радіуса 5 навмання вибрано точку. Знайти ймовірність того, що вона виявиться всередині вписаного в цей круг квадрата.

Практичне заняття 2. Види випадкових подій. Властивості класичної ймовірності

Завдання 1. Проводиться випробування: кидають гральний кубик. Необхідно: а) навести приклади випадкових подій., достовірної, неможливої події; б) записати простір елементарних подій; в) записати наведені події через елементарні, розрахувати їх ймовірності; г) навести приклади сумісних і несумісних подій.

Завдання 2. Навмання вибирається ціле число з відрізку $[-6,6]$. Розглянемо такі події: A – «вибране число на більше ніж 4»; B – «модуль цього числа не перевищує 2»; C – «це число не менше ніж 3». Що означають події: $A+B, A+C, A\cdot B, A\cdot C, A-B, B-A, C-A$?

Завдання 3. Експеримент полягає в тому, що монету підкидають тричі. Побудувати простір елементарних подій. Описати підмножини, що відповідають таким подіям: A – «герб випав рівно один раз»; B – «число не випало ані разу»; C – «гербів випало більше, ніж чисел»; D – «герб випав принаймні 2 рази підряд».

Завдання 4. Нехай A, B, C – довільні події. Знайти вирази для подій, що полягають у тому, що а) здійснилась тільки подія A;

б) здійснилися тільки А і В; в) здійснилися усі три події; г) здійснилася не менше ніж одна подія; д) здійснилися не менше ніж дві події; є) здійснилася одна й тільки одна подія; ж) здійснилися дві й тільки дві події; з) ніяка подія не здійснилася; і) здійснилися не більше ніж дві події.

Завдання 5. Стрілець тричі стріляє по мішені. Записати простір елементарних подій. Записати через елементарні такі події: 1) стрілець влучив усього один раз; 2) влучив хоча б один раз; 3) жодного разу не влучив. Знайти ймовірності цих подій.

Завдання 6. Технічний контроль перевіряє якість трьох приладів. Описати: а) простір елементарних подій, б) подію А= «всі прилади якісні», в) подію В= «хоча б один з приладів є неякісним», г) подію С= «серед перевірених приладів рівно один неякісний».

Що означають події: д) А+В; є) АВ; ж) В+С; з) ВС ?

Завдання 7. Розглянемо такі події: А – «поява герба при двох підкиданнях монети», В – «три влучення при трьох пострілах», С – «не менше ніж одне влучення при трьох пострілах». Указати події, протилежні до подій А, В, С.

Завдання 8. Розглядається поява:

− герба і цифри при одному підкиданні монети;

− парного і непарного числа очок при одному підкиданні грального кубика;

− 1, 2, 3, 4, 5, 6 очок при одному підкиданні грального кубика.

− чорної і червоної масті при витягуванні карти з колоди.

− числа 1 та непарного числа при одному підкиданні грального кубика.

Визначити, які з цих пар подій є рівноможливими, утворюють повну групу подій, є сумісними, є несумісними.

Завдання 9. Наведіть приклади залежних і незалежних подій.

Завдання 10. Наведіть приклади протилежних подій. Знайдіть ймовірність однієї з них, довільно задавши ймовірність іншої.

Практичне заняття 3. Теореми додавання та множення ймовірностей випадкових подій

Завдання 1. Визначити, які з подій є несумісними, незалежними, утворюють повну групу. Знайти ймовірності попарних сум і добутків подій. У коробці є кулі з номерами від 1 до 7, які витягують по одній.

а) A – витягнута куля з непарним номером; б) B – витягнута куля з номером кратним 3; в) C – витягнута куля з парним номером;

Рекомендації. $\Omega=\{1,2,3,4,5,6,7\}$, $|\Omega|=7$. $A=\{1,3,5,7\}$, $B=\{3,6\}$, $A=\{2,4,6\}$. $A+B$ – куля з непарним номером або з номером кратним 3.

$A+B=\{1,3,5,6,7\}$, $P(A+B)=5/7$. $A+C$ – куля з непарним номером або з парним. $A+C=\{1,2,3,4,5,6,7\}=\Omega$, звідси A,C – повна група подій, A,B,C – також повна група подій.

$A\cdot B$ – куля з непарним номером і кратним 3, тобто 3.

$A\cdot B=\{3\}$, $P(A\cdot B)=1/7$, A,B – сумісні. $A\cdot C$ – куля з непарним номером і з парним номером, $P(A\cdot C)=0/7=0;$ A,C – несумісні.

Перевіримо A,B на незалежність. $P(A)=4/7;$ $P(B)=2/7$.

$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$ – умова незалежності A,B.

$P(A\cdot B)=1/7\neq 4/7\cdot 2/7=P(A)\cdot P(B)$. Отже, A,B – залежні.

Завдання 2. У коробці 5 червоних, 4 сині, 2 зелені кулі. Навмання беруть 3 з них. Знайти ймовірність того, що а) A – вони різних кольорів; б) B – одного кольорів; в) E – хоч дві червоні (2 і більше); г) D – хоч дві одного кольору (2 і більше).

Рекомендації. Введемо події A,B,E,D.

Ч – вийнята куля червона; *С* – синя; *З* – зелена.

До кожної події формулюємо протилежну. Якщо вона представляється меншою кількістю доданків, то переходимо до неї.

а) $\overline{A}$ – не всі кулі різних кольорів (тобто 2 або 3 однакові).

$\overline{A}$ – не простіше.

$$A=ЧСЗ+ЧЗС+СЧЗ+СЗЧ+ЗЧС+ЗСЧ=A_1+A_2+A_3+A_4+A_5+A_6.$$

A_i – попарно несумісні.

$$P(A)=P(ЧСЗ+ЧЗС+СЧЗ+СЗЧ+ЗЧС+ЗСЧ)=\text{попарно несумісні}=$$

$$=P(ЧСЗ)+P(ЧЗС)+P(СЧЗ)+P(СЗЧ)+P(ЗЧС)+P(ЗСЧ)=$$

$$=\frac{5}{11}\cdot\frac{4}{10}\cdot\frac{2}{9}+\frac{5}{11}\cdot\frac{2}{10}\cdot\frac{4}{9}+\frac{4}{11}\cdot\frac{5}{10}\cdot\frac{2}{9}+\ldots+\frac{2}{11}\cdot\frac{4}{10}\cdot\frac{5}{9}=6\cdot\frac{5}{11}\cdot\frac{4}{10}\cdot\frac{2}{9}=\frac{8}{33}\approx 0{,}2.$$

б) $\overline{B}$ – не всі кулі одного кольору (тобто 2 або 3 різного).

Подія складніша B. $B = ЧЧЧ + CCC$.

$$P(B) = P(ЧЧЧ + CCC) = попарно\ \ несумісні =$$

$$= P(Ч) \cdot P_Ч(Ч) \cdot P_{ЧЧ}(Ч) + P(C) + P_C(C) + P_{CC}(C) =$$

$$= \frac{5}{11} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} + \frac{4}{11} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{2}{33} + \frac{4}{165} = \frac{10+4}{165} = \frac{14}{165} \approx 0{,}08.$$

в) $\overline{E}$ – менше за дві червоні (0 або 1). Подія не простіша E.
$E = E_2 + E_3$. (E_2 – 2 червоні, E_3 – 3 червоні). E_2 і E_3 – несумісні.

$$P(E) = P(E_2 + E_3) = P(E_2) + P(E_3) =$$

$$= \frac{C_5^2 \cdot C_{11-5}^{3-2}}{C_{11}^3} + \frac{C_5^3 \cdot C_{11-5}^{3-3}}{C_{11}^3} = \frac{C_5^2 \cdot C_6^1 \cdot C_5^3 \cdot C_6^0}{C_{11}^3 \cdot C_{11}^3} = \frac{60}{165} + \frac{10}{165} = \frac{70}{165} = \frac{14}{33} \approx 0{,}4.$$

Завдання 3. Мисливець має 6 патронів і стріляє по цілі до першого влучення. Яка ймовірність того, що більшість патронів буде використано, якщо ймовірність влучення при одному пострілі 0,6.

Завдання 4. Для виконання одного завдання замовник звернувся до двох виконавців. Імовірність того, що перший виконавець виконає замовлення дорівнює 0,8; другий – 0,9. Знайти ймовірність того, що завдання замовника буде виконано.

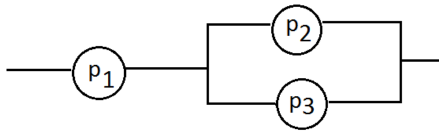
Завдання 5. Курс, з якого складається екзамен, містить три розділи, з кожного з яких студент вивчив по 10 питань. У білетах присутні 20 питань першого розділу, 25 – другого розділу і 15 – з третього розділу. Білет складається із трьох питань (по одному з розділу). Студент отримує 3, 4, 5, якщо відповідає на 1, 2 або 3-є питання відповідно. Знайти ймовірність того, що 1) студент складе іспит, але не відповість на третє питання; 2) студент не відповів тільки на друге питання; 3) він отримає «3»; 4) отримає «4»; 5) отримає «5»; 6) складе іспит.

Завдання 6. У лотереї випущено 10 000 білетів, серед яких 100 білетів з виграшом по 3 тис. грн, 200 – по 1 тис. грн, 500 – по 500 грн, та 1 000 – 300 грн, а решта без виграшу. Знайти ймовірність виграшу не менше 500 грн, якщо придбали один білет.

Завдання 7. Підкидають два гральних кубики. Обчислити ймовірність того, що хоча б на одному кубику випаде «4».

Завдання 8. Рада директорів складається з трьох бухгалтерів, трьох менеджерів і двох інженерів. Планується створити підкомітет із його членів. Яка ймовірність того, що всі троє в цьому підкомітеті будуть бухгалтерами?

Завдання 9. Розрахувати надійність системи згідно зі схемою нижче, якщо задані ймовірності безвідмовної роботи елементів системи $p_1 = 0{,}7$, $p_2 = 0{,}8$, $p_3 = 0{,}9$.



Рекомендації. **Означення 14.** ***Надійністю*** системи називають імовірність її безвідмовної роботи протягом певного часу t. Системи складаються з n елементів, з'єднаних послідовно (рис. 4) або паралельно (рис. 5).

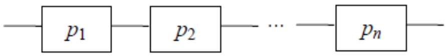


Рисунок 4 – Послідовне з'єднання

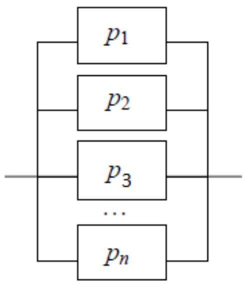


Рисунок 5 – Паралельне з'єднання

Послідовне з'єднання (рис. 4). Такий блок працюватиме безвідмовно лише тоді, коли усі елементи працюватимуть безвідмовно.

Тобто безвідмовної роботи системи

$$p = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n.$$

Паралельне з’єднання (рис. 5). Такий блок працюватиме безвідмовно, якщо принаймні один елемент не вийде з ладу, тому ймовірність безвідмовної роботи системи

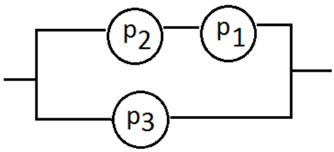
$$p = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_n$$

У цій задачі є обидва з’єднання.

Враховуючи це, маємо $p = p_1 \cdot (1 - q_2 \cdot q_3) = p_1 \cdot \left(1 - (1 - p_2) \cdot (1 - p_3)\right)$.

$$p = 0{,}7 \cdot \left(1 - (1 - 0{,}8) \cdot (1 - 0{,}9)\right) = 0{,}7 \cdot (1 - 0{,}2 \cdot 0{,}1) = 0{,}686.$$

Завдання 10. Розрахувати надійність системи згідно зі схемою нижче, якщо задані ймовірності безвідмовної роботи елементів системи $p_1 = 0{,}5$, $p_2 = 0{,}7$, $p_3 = 0{,}8$.



Практичне заняття 4. Формула повної ймовірності. Формула Байєса

Завдання 1. У магазин надходить товар від 4-х виробників у відсотковому відношенні 30 %, 20 %, 35 %, 15 %. Товар може бути 1-го і 2-го ґатунків. Ймовірність одержати товар 2-го ґатунку від виробника 0,25; 0,32; 0,33; 0,11 відповідно. Знайти ймовірність: 1) одержати товар 2-го ґатунку; 2) якщо товар 1-го ґатунку, то він від 3-го виробника.

Рекомендації.

1) Нехай A – одержати товар 2-го ґатунку,

H_i – товар від i-го виробника, $i = 1,2,3,4$.

$$P(A) = P(H_1)P_{H_1}(A) + P(H_2)P_{H_2}(A) + P(H_3)P_{H_3}(A) + P(H_4)P_{H_4}(A)$$

$$P(H_1) = 0{,}3;\ P(H_2) = 0{,}2;\ P(H_3) = 0{,}35;\ P(H_4) = 0{,}15.\ \sum_{i=1}^{4} P(H_i) = 1.$$

$$P_{H_1}(A) = 0{,}25;\ P_{H_2}(A) = 0{,}32;\ P_{H_3}(A) = 0{,}33;\ P_{H_4}(A) = 0{,}11.$$

$$P(A)=0{,}3\cdot 0{,}25+0{,}2\cdot 0{,}32+0{,}35\cdot 0{,}33+0{,}15\cdot 0{,}11=0{,}271.$$

2) $\overline{A}$ – одержати товар 1-го ґатунку. За формулою Байєса:

$$P_{\overline{A}}(H_3)=P(H_3)\cdot P_{H_3}\left(\overline{A}\right)\Big/P\left(\overline{A}\right)=0{,}35\cdot 0{,}67/0{,}729=0{,}3217,$$

де $P\left(\overline{A}\right)=1-P(A)=1-0{,}271=0{,}729,$

$$P_{H_3}\left(\overline{A}\right)=1-P_{H_3}(A)=1-0{,}33=0{,}67.$$

Завдання 2. На рис. 6 зображено схему доріг. Знайти ймовірність туристу потрапити з пункту *A* в пункт *B*, якщо дорогу він обирає навмання. По якій дорозі він найімовірніше йшов, якщо він попав у пункт *B*?

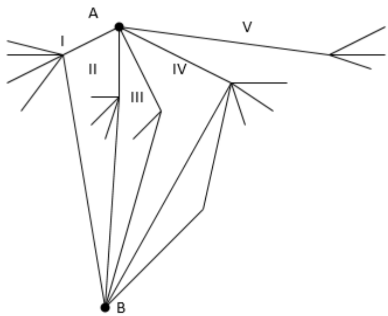


Рисунок 6 – Можливість зустрічі студентів (до завдання 2)

Завдання 3. Є коробки 3-х видів у кількості 5, 3, 2 відповідно. Склад коробок кожного виду: I – по 5 білих куль, та по 5 червоних; II – по 6 білих куль, та по 4 червоних; III – по 3 білих кулі, та по 7 червоних. Знайти ймовірність дістати білу кулю з навмання взятої коробки. Якщо навмання дістати червону, яка ймовірність, що вона з коробки II типу?

Рекомендації.

A – витягнуто білу кулю. H_i – обрано коробку *i*-го виду. $i=1,2,3.$

$$P(A)=P(H_1)P_{H_1}(A)+P(H_2)P_{H_2}(A)+P(H_3)P_{H_3}(A),$$

$P(H_1)=5/10=0{,}5;\ P(H_2)=3/10=0{,}3;\ P(H_3)=2/10=0{,}2.\ \sum_{i=1}^{3}P(H_i)=1.$

$P_{H_1}(A)=5/10=0{,}5;\ P_{H_2}(A)=6/10=0{,}6;\ P_{H_3}(A)=3/10=0{,}3.$

$P(A)=0{,}49.$ $\overline{A}$ – витягнуто червону кулю.

$P_{\overline{A}}(H_2)=P(H_2)\cdot P_{H_2}(\overline{A})\big/P(\overline{A})=0{,}3\cdot(1-0{,}6)/(1-0{,}49)\approx 0{,}2353.$

Завдання 4. У сітці 7 нових і 3 старих м'ячі. У ході 1-ї гри із сітки витягли 2 м'ячі, пограли ними і повернули назад. На другу гру також витягли 2 м'ячі. Яка ймовірність того, що вони обидва нові? Нехай у 2-й грі обидва м'ячі нові. Який склад м'ячів у 1-й грі найімовірніший?

Завдання 5. 1 коробка містить 6 білих і 4 синіх кулі, 2-га коробка – 5 білих і 3 синіх кулі. Навмання з 1-ї дві кулі перекладають у 2-гу коробку. Сформувати гіпотези про склад другої коробки.

Завдання 6. У магазин надходять телевізори з Західної Європи, Північно-Східної Азії та Східної Європи. Перші мають у середньому 0,2 % браку, другі – 0,3 %, треті – 0,5 %. Знайти ймовірність придбання у магазині бракованого телевізора, якщо з перших країн надійшло 300, з других – 600, з третіх – 100 телевізорів. Нехай куплений у магазині телевізор виявився бракованим. Яка ймовірність того, що він випущений у Західній Європі?

Завдання 7. Є три зовні однакові урни. У першій урні містяться дві білих та одна чорна кулі, у другій – три білих і одна чорна, а в третій – дві білих і дві чорних кулі. Дехто навмання вибирає одну з урн і виймає з неї кулю. Знайти ймовірність того, що ця куля біла.

Завдання 8. З урни, яка містить три білих і дві чорних кулі, переклали дві навмання вибрані кулі в урну, яка містить чотири білих і чотири чорних кулі. Знайти ймовірність того, що навмання вийнята з другої урни куля буде білою.

Завдання 9. В урні 6 чорних і білих куль, до них кладуть 4 білих кулі. Після цього з урни навмання виймають 3 кулі. Знайти ймовірність того, що всі вийняті кулі білі, враховуючи, що всі можливі припущення про початковий вміст урни рівноможливі.

Завдання 10. В одній урні 7 білих і 7 чорних, а в другій – 2 білих і 2 чорних кулі. З першої урни навмання виймають 2 кулі і перекладають їх у другу. Після цього з другої урни також навмання виймають 3 кулі. Знайти ймовірність того, що всі кулі, вийняті з другої урни, білі.

Практичне заняття 5. Схема Бернуллі. Формула Бернуллі. Узагальнення формули Бернуллі на довільну кількість наслідків випробування

Завдання 1. Є 12 стандартних і 4 нестандартні деталі. Навмання беруть три з них (з поверненням). Знайти імовірність того, що серед взятих деталей

а) усі три стандартні; б) не більше однієї стандартної;

в) хоча б одна нестандартна; г) дві стандартні.

Рекомендації. а) слід знайти імовірність того, що серед трьох взятих деталей усі три стандартні, тобто $P_3(3)$.

Використаємо формулу Бернуллі. Згідно з умовою маємо $p=\frac{12}{16}=\frac{3}{4}$, $q=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$. Кількість випробувань $n=3$. $k=3$.

Тоді $P_3(3)=C_3^3\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{3-3}=\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{27}{64}\approx 0{,}422.$

б) Не більше однієї стандартної – це означає одна і менше, тобто можливі значення 0 та 1. Отже, необхідно знайти $P_3(0)+P_3(1)$.

$$P_3(0)+P_3(1)=C_3^0\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^0\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{3-0}+C_3^1\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^1\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{3-1}=$$

$$=\frac{3!}{0!\cdot 3!}\cdot 1\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^3+\frac{3!}{1!\cdot 2!}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^1\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{64}+3\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{16}=\frac{10}{64}\approx 0{,}156.$$

в) Можна знаходити через ймовірність протилежної події. Протилежною до події «хоча б одна нестандартна» – «жодної нестандартної», ймовірність якої $P_3(0)=C_3^0\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^0\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{3-0}=\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{27}{64}\approx 0{,}422$ (у цьому випадку $q=\frac{3}{4}$, $p=\frac{1}{4}$);

або «усі стандартні», ймовірність якої знайдено у п. а) $P_3(3)\approx 0{,}422$.

Ймовірність шуканої події: $1-P_3(3)=1-\frac{27}{64}\approx 0{,}578.$

г) $P_3(2)=C_3^2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{3-2}=\frac{3!}{2!\cdot 1!}\cdot\frac{9}{16}\cdot\frac{1}{4}=\frac{27}{64}\approx 0{,}422.$

Завдання 2. Виконується п’ять пострілів з імовірністю влучення в кожному 0,6. Знайти найімовірніше число влучень.

Рекомендації. $n=5,\ \ p=0{,}6,\ \ q=1-0{,}6=0{,}4.$

$$n\cdot p-q\le k_0\le n\cdot p+p;\ \ 5\cdot 0{,}6-0{,}4\le k_0\le 5\cdot 0{,}6+0{,}6;\ \ 2{,}6\le k_0\le 3{,}6.$$

Отже, найімовірніше число влучень $k_0=3$.

Завдання 3. Мішень складається із трьох зон, що попарно не перетинаються. У разі одного пострілу по мішені ймовірність попадання в першу зону для даного стрільця дорівнює 0,5. Для другої і третьої зон ця ймовірність дорівнює відповідно 0,3 та 0,2. Стрілець зробив шість пострілів по мішені. Знайти ймовірність того, що при цьому

а) три попадання в першу зону, два попадання в другу зону і одне попадання у третю;

б) однакова кількість попадань в другу і третю зони.

Рекомендації. а) $n=6,\ \ k_1=3,\ \ k_2=2,\ \ k_3=1,\ \ p_1=0{,}5,\ \ p_1=0{,}3,$ $p_1=0{,}2.$ За узагальненою формулою Бернуллі

$$P_6(3{,}2{,}1)=\frac{6!}{3!\cdot 2!\cdot 1!}\cdot 0{,}5^3\cdot 0{,}3^2\cdot 0{,}2^1=60\cdot 0{,}125\cdot 0{,}09\cdot 0{,}2=0{,}135.$$

б) Можливі значення k_1,k_2,k_3 за однакової кількості попадань в другу і третю зони – це (0,0,6), (1,1,4), (2,2,2), (3,3,0). Тобто необхідно знайти

$$P_6(0{,}0{,}6)+P_6(1{,}1{,}4)+P_6(2{,}2{,}2)+P_6(3{,}3{,}0).$$

$$P_6(0{,}0{,}6)=\frac{6!}{0!\cdot 0!\cdot 6!}\cdot 0{,}5^0\cdot 0{,}3^0\cdot 0{,}2^6=0{,}2^6=0{,}000064.$$

$$P_6(1{,}1{,}4)=\frac{6!}{1!\cdot 1!\cdot 4!}\cdot 0{,}5^1\cdot 0{,}3^1\cdot 0{,}2^4=30\cdot 0{,}5\cdot 0{,}3\cdot 0{,}0016=0{,}0072.$$

$$P_6(2{,}2{,}2)=\frac{6!}{2!\cdot 2!\cdot 2!}\cdot 0{,}5^2\cdot 0{,}3^2\cdot 0{,}2^2=90\cdot 0{,}25\cdot 0{,}09\cdot 0{,}04=0{,}081.$$

$$P_6(3{,}3{,}0)=\frac{6!}{3!\cdot 3!\cdot 0!}\cdot 0{,}5^3\cdot 0{,}3^3\cdot 0{,}2^0=20\cdot 0{,}125\cdot 0{,}027=0{,}0675.$$

$$P_6(0{,}0{,}6)+P_6(1{,}1{,}4)+P_6(2{,}2{,}2)+P_6(3{,}3{,}0)\approx 0{,}156.$$

Завдання 4. Гральний кубик підкидають 5 разів. Знайти ймовірність того, що «6» очок випаде а) рівно 3 рази; б) менше 4 разів; в) хоча б один раз.

Завдання 5. Ймовірність того, що пасажир запізниться на потяг дорівнює 0,025. Знайти найімовірніше число пасажирів, які запізнилися на потяг із 700 пасажирів.

Завдання 6. Два рівносильних супротивники грають у шахи. Що ймовірніше виграти:

а) одну партію з двох чи дві з чотирьох?

б) не менше двох партій із чотирьох чи не менше трьох із п’яти?

Нічийний результат партії не враховується.

Завдання 7. У виробництві деякої продукції третій сорт становить 20 %. Знайти імовірність того, що з п’яти навмання взятих виробів цієї продукції не менше ніж 3 будуть третього сорту.

Завдання 8. Імовірність влучення стрільцем у десятку дорівнює 0,6. Чому дорівнює імовірність того, що у разі 8 пострілів буде 6 влучень у десятку?

Завдання 9. 40 % усіх людей – блондини, 30 % – шатени, 20 % – брюнети, 10 % – руді. Знайти ймовірність того, що серед шести чоловік: а) більшість блондини; б) є руді; в) однакова кількість брюнетів і шатенів.

Рекомендації. У варіанті в) використати узагальнену формулу Бернуллі.

Завдання 10. Контрольна робота складається із шести завдань, причому для того, щоб вона була зарахована, слід виконати правильно чотири завдання. Якщо студент буде виконувати лише чотири завдання, то ймовірність правильного виконання кожного з них 0,8; якщо п’ять завдань, то 0,7; якщо шість завдань, то 0,6. Що доцільніше робити студенту?

Практичне заняття 6. Граничні випадки формули Бернуллі: формула Пуассона. Локальна та інтегральна формули Лапласа

Завдання 1. Знайти ймовірність того, що подія A настане 1) точно два рази; 2) найімовірніше число разів; 3) менше ніж три рази; 4) більше, ніж три рази. $n = 900, \;\; p = 1/450$.

Завдання 2. Ймовірність народження хлопчика дорівнює 0,515. Знайти ймовірність того, що з 200 новонароджених дітей хлопчиків і дівчаток буде порівну.

Завдання 3. За результатами перевірок фіскальними органами виявлено, що в середньому кожне друге мале підприємство регіону допускає порушення фінансової дисципліни. Знайти ймовірність того, що з 1 000 зареєстрованих у регіоні малих підприємств допускають порушення фінансової дисципліни від 480 до 520 малих підприємств.

Завдання 4. Магазин отримав партію скляних пляшок молока. Ймовірність того, що при транспортуванні пляшка розіб'ється дорівнює $p = 0{,}06$. Скільки слід перевірити пляшок, щоб з ймовірністю 0,9973 можна було стверджувати, що відносна частота появи розбитих пляшок відхиляється від ймовірності за абсолютною величиною не більше ніж на 0,01?

Завдання 5. Підручник видано тиражом 10 000 примірників. Ймовірність виготовлення бракованого примірника підручника дорівнює 0,0001. Знайти ймовірність того, що тираж має рівно 5 бракованих книг.

Завдання 6. Застосовуючи а) формулу Бернуллі; б) локальну теорему Лапласа і в) формулу Пуассона знайти ймовірність того, що серед 200 осіб виявиться четверо шульгів, якщо у середньому шульги становлять 1 %.

Завдання 7. Нехай ймовірність того, що покупцю необхідно купити взуття 41-го розміру, дорівнює 0,2. Знайти ймовірність того, що із 750 покупців не більше ніж 120 потрібне взуття 41-го розміру.

Завдання 8. Записи страхової компанії показали, що 30 % власників договорів страхування подали запити на відшкодування. Для перевірки було відібрано 15 чоловік, які мають договори. Знайти ймовірність того, що протягом року надійде принаймні 10 запитів.

Завдання 9. Укладено 120 договорів страхування з ймовірністю $p = 0{,}4$ настання події A за одним договором страхування. Знайти межі, в яких міститься частота появи події А з ймовірністю $\lambda = 0{,}975$.

Завдання 10. Ймовірність виготовлення бракованої деталі становить 0,01. Знайти найімовірніше число бракованих деталей серед 500 деталей і ймовірність такої кількості їх у партії.

Питання та інформаційні джерела для самостійного вивчення тем модуля

Назва теми, з якої виносяться питання на самостійне опрацювання	Перелік питань, що вивчаються студентом самостійно	Інформаційне джерело (порядковий номер за переліком)
Модуль 1. Випадкові події, основні властивості		
Тема 1. Основні поняття теорії ймовірностей	Елементи комбінаторики	[1–3, 6–10]
	Випадкові події	[1–12]
	Поняття ймовірності	[1–12]
	Формула класичної ймовірності	[1–12]
	Геометрична ймовірність	[1–3, 6–10]
	Теореми додавання і множення ймовірностей випадкових подій	[1–12]
	Умовна ймовірність. Залежні та незалежні події	[1–3, 6–10]
	Формула повної ймовірності. Формула Байєса	[1–12]
	Формула Бернуллі	[1–12]
	Локальна теорема Лапласа. Інтегральна теорема Лапласа. Теорема Пуассона	[1–12]

Модуль 2. Випадкові величини, функції – основні характеристики

Тема 2. Випадкові величини та їх основні характеристики

У процесі вивчення теми слід ознайомитись з поняттями: дискретної (ДВВ) та неперервної (НВВ) випадкових величин, функції розподілу ВВ та її властивості для ДВВ, функції розподілу та щільність розподілу НВВ. Крім того, слід навчитись знаходити числові характеристики випадкових величин, будувати закони розподілу та полігон розподілу, обчислювати ймовірності попадання у проміжок за допомогою функції розподілу.

Рекомендується приділити увагу також розгляду деяких розподілів ДВВ (біноміальний, геометричний, Пуассона, гіпергеометричний) і НВВ (рівномірний і нормальний), обчисленню ймовірності попадання нормальної величини в інтервал, правила трьох сигм.

Термінологічний словник

Дискретні випадкові величини

Випадкові величини. Закон розподілу випадкової величини

Означення 1. ***Випадковою*** називають величину, яка в результаті випробування прийме одне і тільки одне можливе значення, наперед невідоме.

Означення 2. Випадкова величина X називається дискретною, якщо вона може приймати скінчену або зліченну множину значень.

Означення 3. Законом розподілу дискретної випадкової величини називають відповідність між можливими її значеннями X і їх ймовірностями P (табл. 1).

Таблиця 1 – Закон розподілу дискретної випадкової величини

X	x_1	x_2	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_n

Зазначимо, що в таблиці 1 $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1.$ Біноміальний розподіл – розподіл ймовірностей, що визначаються формулою Бернуллі. Графічно закон розподілу зображають, як показано на рис. 1.

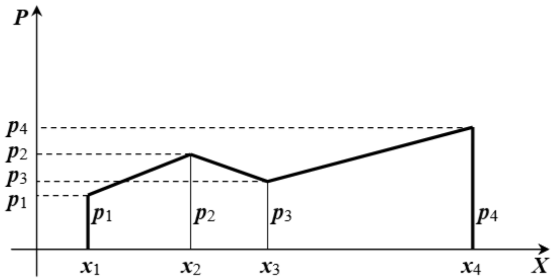


Рисунок 1 – Графік закону розподілу – многокутник розподілу

Функція розподілу ймовірностей випадкової величини та її властивості

Означення 4. ***Функцією розподілу*** ймовірностей (або коротко функцією розподілу) називається функція $F(x),$ визначена на всій числовій осі так: для кожного x $F(x)$ дорівнює ймовірності того, що дискретна випадкова величина ξ прийме значення менше x, тобто

$$F(x)=P(\xi<x).$$

Числові характеристики дискретних випадкових величин

Означення 5. ***Математичним сподіванням*** дискретної випадкової величини називається сума добутків її можливих значень на їх ймовірності:

$$M(X)=x_1p_1+x_2p_2+\ldots+x_np_n,\ M(X)=\sum_{i=1}^{\infty}x_ip_i.$$

Імовірнісний зміст $M(X)$ полягає в тому, що воно наближено дорівнює середньому арифметичному значень випадкової величини, що спостерігалась.

Означення 6. ***Дисперсією*** (розсіюванням) дискретної випадкової величини називається математичне сподівання квадрата відхилення випадкової величини від її математичного сподівання

$$D(X)=M\left(X-M(X)\right)^2\ \ D(X)=M\left(X-M(X)\right)2.$$

Існує інша формула для обчислення дисперсії:

$$D(X)=M\left(X^2\right)-\left(M(X)\right)^2.$$

Означення 7. ***Середнім квадратичним відхиленням*** називається квадратний корінь із дисперсії

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}.$$

Неперервні випадкові величини

Функція розподілу випадкової величини

Розглянемо випадкову величину *X*, можливі значення якої суцільно заповнюють інтервал (a,b).

Означення 8. Нехай X – деяка випадкова величина. ***Функцією розподілу*** $F(x)$ випадкової величини *X* називається функція

$$F(x)=P(X<x).$$

Отже, значення функції розподілу в точці *X* дорівнює ймовірності того, що випадкова величина приймає значення, менше за *X*.

Інша назва функції розподілу – інтегральна функція розподілу.

Означення 9. Випадкова величина називається ***неперервною,*** якщо її функція розподілу є неперервна, неперервно-диференційовна функція (тобто похідна є неперервною).

Означення 10. ***Щільністю*** розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини X називається функція $f(x)$ – перша похідна від функції розподілу $F(x)$: $f(x)=F'(x)$.

Знаючи щільність розподілу $f(x)$, можна знайти функцію розподілу $F(x)$. Нерівність $X<x$ можна записати так: $-\infty<X<x$.

$$P(-\infty<X<x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt,\ \ F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

Якщо всі можливі значення випадкової величини належить інтервалу (a,b), то

$$\int_{a}^{b} f(x)dx=1.$$

Розподіли дискретної випадкової величини

Біноміальний закон розподілу:

$$P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k},\ \ k=0,1,2,...,n,\ \ p+q=1,$$

де n – кількість незалежних експериментів, у кожному з яких з однаковою ймовірністю p може відбутись подія A. X – кількість експериментів, у яких відбувається подія.

Числові характеристики:

$$M(X)=np,\ \ D(X)=np(1-p),\ \ \sigma(X)=\sqrt{np(1-p)}.$$

Ймовірність влучення ДВВ у заданий діапазон значень

$$P(k_1\le X\le k_2)=\sum_{i=k_1}^{k_2} C_n^i p^i(1-p)^{n-i}.$$

Закон розподілу Пуассона:

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},\ \ k=0,1,2,...,\ \ \lambda=\gamma t=np,$$

де γ – інтенсивність настання подій (кількість подій в одиницю часу);

t – певний період часу;

X – кількість подій, що потрапили на інтервал t. Числові характеристики: $M(X)=\lambda$, $D(X)=\lambda$, $\sigma(X)=\sqrt{\lambda}$.

Геометричний закон розподілу

Нехай проводиться n незалежних експериментів, у кожному з яких з однаковою ймовірністю p може відбутися деяка подія A. Випробування закінчуються, як тільки подія A відбулася. Тобто, якщо A з'явилася у k-му випробуванні, то в перших $(k-1)$ випробуваннях подія A не відбулася.

Випадкова величина X – номери першого успішного випробування в схемі Бернуллі набуває значень $1,2,3,...,k,...$ з ймовірностями $P(X=k)=pq^{k-1}$, $k=1,2,...$

Числові характеристики: $M(X)=1/p$, $D(X)=(1-p)/p^2$, $\sigma(X)=\sqrt{1-p}/p$.

Гіпергеометричний закону розподілу

Припустимо, що в урні знаходитися N куль, серед них M – білих і $(N-M)$ чорних. Навмання з урни витягли s куль. Нехай випадкова величина X – число білих куль серед s куль, що витягли з урни.

Нехай задані натуральні числа N,M,s, $M\le s\le N$, можливі значення ВВ X – $0,1,2,...,min\{M,s\}$.

$$P(X=k)=\frac{C_M^k C_{N-M}^{s-k}}{C_N^s},\ k=0,1,2,...,M.$$

Числові характеристики:

$$M(X)=s\cdot(M/N),\ D(X)=s\cdot\frac{(N-s)(N-M)M}{N^2(N-1)},\ \sigma(X)=\sqrt{D(X)}.$$

Розподіли неперервної випадкової величини

НВВ X називається рівномірно розподіленою на відрізку $[a,b]$, якщо щільність ймовірностей цієї величини стала на цьому відрізку і дорівнює 0 поза відрізком.

$$f(X)=\begin{cases}0, x\notin[a,b]\\ c, x\in[a,b]\end{cases} \text{ або } f(X)=\begin{cases}0, x\notin[a,b]\\ 1/(b-a), x\in[a,b]\end{cases}$$

НВВ X називається розподіленою за нормальним законом розподілу, якщо її щільність розподілу ймовірностей має вид:

$f(X)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \sigma>0$ і позначається $N(a,\sigma)$ або $N(a,\sigma^2)$.

$P(|X-a|<\sigma t)=2\Phi(t)$.

Правило трьох сигм: якщо ВВ X має нормальний закон розподілу з параметрами a і σ, тобто $N(a,\sigma)$, то практично достовірно, що її значення розміщені в інтервалі $(a-3\sigma, a+3\sigma)$.

План практичних занять

Зміст практичного заняття	Обсяг годин
Практичне заняття 8. Дискретна випадкова величина (ДВВ). Функція розподілу, полігон розподілу ймовірностей ДВВ. Числові характеристики ДВВ	2
Практичне заняття 9. Неперервна випадкова величина (НВВ). Функція розподілу, щільність розподілу ймовірностей НВВ. Числові характеристики НВВ	2
Практичне заняття 10. Розподіли дискретних випадкових величин та їх числові характеристики: рівномірний, Пуассона, біноміальний, геометричний, гіпергеометричний	2
Практичне заняття 11. Розподіли неперервних випадкових величин: рівномірний і нормальний	2
Практичне заняття 12. Підсумкове заняття на тему «Випадкові величини, функції – основні характеристики». Модульна контрольна робота № 2	2

Практичне заняття 8. Дискретна випадкова величина (ДВВ). Функція розподілу, полігон розподілу ймовірностей ДВВ. Числові характеристики ДВВ

Завдання 1. Задано закон розподілу дискретної випадкової величини. Знайти $M(x)$, $D(x)$, $\sigma(x)$. (N – номер варіанта).

Побудувати многокутник розподілу.

Визначити $F(x)$ та побудувати графік цієї функції.

X	$N-1$	N	$N+1$	$N+2$
P	0,05	0,25	0,33	0,37

У завданнях 2–10 – 1) побудувати закон розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини X; 2) Визначити $F(x)$ та побудувати графік цієї функції.

Завдання 2. Є три ящика. У першому містяться 7 стандартних і 3 браковані однотипні деталі, у другому – 6 стандартних і 4 браковані деталі, а в третьому – 5 стандартних і 5 бракованих. Із кожного ящика навмання беруть по одній деталі. X – появи числа стандартних деталей серед трьох навмання взятих.

Завдання 3. Троє студентів складають іспит із теорії ймовірностей. Імовірність того, що перший студент складе екзамен, становить 0,7, для другого та третього ця ймовірність дорівнює відповідно 0,75 та 0,8. X – числа студентів, які складуть іспит з теорії ймовірностей.

Завдання 4. У грошовій лотереї розігрується 1 виграш в 10 грн, 10 виграшів по 5 грн, 30 виграшів по 1 грн. Загальна кількість білетів –100.

Завдання 5. Під час виготовлення деталі робітникові необхідно виконати 4 незалежні між собою технологічні операції. Імовірність того, що в разі виконання першої операції робітник не припуститься дефекту, дорівнює 0,95; для другої, третьої і четвертої операцій ця ймовірність становить відповідно 0,85; 0,8; 0,75. X – число операцій, під час виконання яких робітник не припуститься браку.

Завдання 6. На шляху руху автомобіля стоять чотири світлофори, кожний з яких з імовірністю 0,5 дозволяє або забороняє рух. X – числа світлофорів, що їх автомобіль промине без затримки.

Завдання 7. Імовірність того, що футболіст реалізує одинадцятиметровий штрафний удар дорівнює 0,8. Футболіст виконав три такі удари. X – числа реалізованих штрафних.

Завдання 8. У партії деталей 20 % нестандартних. Навмання відібрано 4 деталі. X – число нестандартних деталей серед 4 відібраних.

Завдання 9. У цеху працюють 7 чоловіків та 3 жінки. Навмання відібрані 2 людини. X – число чоловіків серед відібраних.

Завдання 10. У містечку тільки три великих підприємства. Ймовірність невчасної сплати податку першим підприємством дорівнює 0,05, другим – 0,07 і третім – 0,09. X – кількість підприємств, що вчасно сплатять податок.

Практичне заняття 9. Неперервна випадкова величина (НВВ). Функція розподілу, щільність розподілу ймовірностей НВВ. Числові характеристики НВВ

У завданнях 1–4 – задана функція розподілу деякої неперервної випадкової величини. 1) Знайти числові характеристики $M(x), D(x)$, $\sigma(x)$. 2) Знайти вираз для щільності. Побудувати графіки для $F(x)$ та $f(x)$.

Завдання 1. $F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0, \\ \dfrac{x^3}{8}, & 0<x\le 2, \\ 1, & x>2. \end{cases}$

Знайти ймовірність того, що випадкова величина прийме значення в інтервалі [1,4].

Завдання 2. $F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0, \\ \dfrac{x^2}{4}, & 0<x\le 2, \\ 1, & x>2. \end{cases}$

Завдання 3–4. $F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0, \\ \dfrac{1}{4}\left(3x^2+3\right), & 0<x\le 1, \\ 1, & x>1. \end{cases}$ $F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 1, \\ \dfrac{1}{2}(x-1), & 1<x\le 3, \\ 1, & x>3. \end{cases}$

Завдання 5. Випадкову величину X задано щільністю

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le -2 \\ a, & -2<x\le 5 \\ 0, & x>5 \end{cases}$$

Знайти: параметр a, функцію розподілу $F(x)$, імовірність попадання ВВ X в інтервал (0,3], числові характеристики.

У завданнях 6–10 – задана щільність розподілу деякої неперервної випадкової величини. 1) Знайти числові характеристики $M(x), D(x)$, $\sigma(x)$. 2) Знайти вираз для функції розподілу. Побудувати графіки для $F(x)$ та $f(x)$.

Завдання 6–7.

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \frac{3}{2}\sin 3x, & 0<x\le\frac{\pi}{3},\\ 0, & x>\frac{\pi}{3}.\end{cases}\qquad f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ 2x, & 0<x\le 1,\\ 0, & x>1.\end{cases}$$

Завдання 8–9.

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \cos x, & 0<x\le\frac{\pi}{2},\\ 0, & x>\frac{\pi}{2}.\end{cases}\qquad f(x)=\begin{cases}0, & x\le -3,\\ \frac{1}{10}(x+3), & -3<x\le 1,\\ \frac{2}{5}(2-x), & 1<x\le 2,\\ 0, & x>2.\end{cases}$$

Завдання 10. Щільність випадкової величини задано графічно (рис. 2). Визначити значення параметра a і аналітичні вирази для $f(x)$ і $F(x)$. Знайти ймовірність того, що значення випадкової величини потрапить в інтервал $[6,8]$, $[-2,2]$.

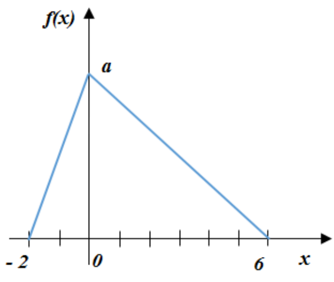


Рисунок 2 – Щільність до завдання 10

Практичне заняття 10. Розподіли дискретних випадкових величин та їх числові характеристики: рівномірний, Пуассона, біноміальний, геометричний, гіпергеометричний

Завдання 1. Ймовірність влучення в мішень дорівнює 0,8. Визначити математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X – числа влучень при 10 пострілах.

Завдання 2. Для просування свого товару на ринку фірма-виробник проводить ряд рекламних кампаній. Кожна рекламна кампанія займає період часу t і закінчується успіхом (продажем товару) незалежно від інших з імовірністю p. Знайти закон розподілу випадкової величини X – період часу, що витрачається на реалізацію партії товару.

Завдання 3. В урні міститься 100 кульок, з них 80 білі, решта чорні. Кульки навмання виймаються з урни по одній і повертаються назад. Визначити закон розподілу ДВВ X – число проведених експериментів, якщо вони здійснюються до першої появи чорної кульки. Знайти $M(X), D(X), \sigma(X)$.

Завдання 4. Протягом години на станцію швидкої допомоги надходить в середньому 5 викликів. Знайти ймовірність, що протягом години: а) рівно 2 виклики; б) не більше ніж 2; в) не менше ніж 3; г) від 3 до 5 викликів.

Завдання 5. Серед 10 однотипних телевізорів 7 відповідають вимогам стандарту, решта – ні. Навмання вибирають 3. X – число телевізорів, які відповідають вимогам стандарту серед 3 вибраних.

Завдання 6. Проводиться стрільба по мішені до першого влучення. Ймовірність влучення дорівнює 0,8. Знайти числові характеристики випадкової величини X – числа проведених пострілів.

Завдання 7. У партії 10 деталей, серед них 6 стандартних. Навмання вибирають 3 деталі. Скласти закон розподілу випадкової величини X – число стандартних деталей серед відібраних. Визначити числові характеристики випадкової величини.

Завдання 8. У бібліотеці є 1 000 підручників з теорії ймовірностей. Імовірність помилки у відповідях у кожному з них дорівнює 0,0002. Знайти ймовірність того, що в бібліотеці буде: а) рівно три; б) не більш двох підручника з неправильними відповідями.

Завдання 9. Знайти числові характеристики випадкової величини, розподіленої за законом:

$$f(X)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ 4e^{-4x}, & x\ge 0 \end{cases}.$$

Завдання 10. Знайти числові характеристики випадкової величини, розподіленої за законом:

$$f(X)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ 2/e^{2x}, & x\ge 0 \end{cases}.$$

Практичне заняття 11. Розподіли неперервних випадкових величин: рівномірний і нормальний

Завдання 1. Тролейбуси прибувають на зупинку кожні 4 хвилини. Визначити ймовірність того, що час очікування тролейбуса не перебільшує 3 хвилини.

Завдання 2. Випадкова величина розподілена за показниковим законом із параметром $\lambda=2$. Визначити ймовірність того, що випадкова величина X набуде значення менше за математичне сподівання.

Завдання 3. Середній час обслуговування ПК $\overline{t}=2$ год. Середнє квадратичне відхилення часу обслуговування дорівнює $\sigma=0{,}403$ год. Визначити ймовірність завершення обслуговування ПК у термін часу від 1,5 до 2,5 год.

Завдання 4. Математичне сподівання і середнє квадратичне відхилення нормально розподіленої випадкової величини відповідно рівні 10 і 2. Знайдіть ймовірність того, що в результаті випробування X прийме значення, яке буде знаходитись у проміжку $[12,14]$.

Завдання 5. Автомат штампує деталі. Контролюється довжина деталі (випадкова величина *X*), яка розподілена нормально із середнім значенням 50 мм. Фактична довжина виготовлених деталей не менша 32 мм і не більша 68 мм. Знайдіть ймовірність того, що довжина навмання взятої деталі: а) більша 55 мм; б) менша 40 мм.

Завдання 6. Випадкова величина X має нормальний розподіл імовірностей з параметрами $a=7$ і $\sigma=2$. Порівняти ймовірності влучення значень випадкової величини *X* у проміжки [3; 7] і [–100; 1]. Зазначити інтервал, у який випадкова величина X влучає з практичною достовірністю.

Завдання 7. Випадкова величина *X* має показниковий розподіл. Імовірність того, що ця випадкова величина набуде значення з проміжку [0; 5], дорівнює 0,7. Знайти ймовірність того, що ця випадкова величина набуде значення з проміжку [7; 9].

Завдання 8. Маршрутний автобус проїжджає через цю зупинку з інтервалам 10 хв. Ви підходите до зупинки у випадковий момент часу. Припускаючи, що час очікування автобуса має рівномірний закон розподілу, знайдіть середню тривалість і середнє квадратичне відхилення цього часу.

Завдання 9. Зріст студентів ВПІ розподілено за нормальним законом, причому $a = 175$ см, а $\sigma = 6$ см. Визначити ймовірність того, що принаймні один із 5 викликаних навмання студентів матиме зріст від 170 до 180 см.

Завдання 10. Знайдіть математичне сподівання і середнє квадратичне відхилення випадкової величини *X,* у якої щільність ймовірностей рівна $f\left(X\right) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{\frac{\left(x+2\right)^2}{18}}$. Користуючись правилом «трьох сігм», укажіть інтервал, симетричний відносно математичного сподівання, в який попадає випадкова величина *X* з імовірністю 0,9973.

Питання та інформаційні джерела для самостійного вивчення тем модуля

Назва теми, з якої виносяться питання на самостійне опрацювання	Перелік питань, що вивчаються студентом самостійно	Інформаційне джерело (порядковий номер за переліком)
Модуль 2. Випадкові величини, функції – основні характеристики		
Тема 2. Випадкові величини та їх основні характеристики	Дискретна випадкова величина	[1–2, 6–12]
	Функція розподілу ВВ та її властивості для ДВВ	[1–2, 6–10]
	Закон розподілу і полігон розподілу ймовірностей ДВВ	[1–2, 6–10]
	Неперервна випадкова величина	[1–2, 6–12]
	Функція розподілу та щільність розподілу НВВ	[1–2, 6–10]
	Числові характеристики ДВВ: математичне сподівання, дисперсія, середнє квадратичне відхилення. Властивості математичного сподівання і дисперсії	[1–2, 6–10]

Продовж. питань та інформаційні джерела для самостійного вивчення тем модуля

Назва теми, з якої виносяться питання на самостійне опрацювання	**Перелік питань, що вивчаються студентом самостійно**	**Інформаційне джерело (порядковий номер за переліком)**
Тема 2. Випадкові величини та їх основні характеристики	Числові характеристики НВВ: математичне сподівання, дисперсія, середнє квадратичне відхилення. Властивості математичного сподівання і дисперсії	[1–2, 6–12]
	Розподіли дискретних випадкових величин: рівномірний, Пуассона, біноміальний, геометричний та їх числові характеристики	[1–2, 6–10]
	Розподіли неперервних випадкових величин і числові характеристики	[1–2, 6–10]
	Нормальний закон розподілу НВВ	[1–2, 6–10]
	Правило «трьох сигм»	[1–2, 6–10]

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ (НАВЧАЛЬНО-ДОСЛІДНІ ПРОЕКТИ) ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ

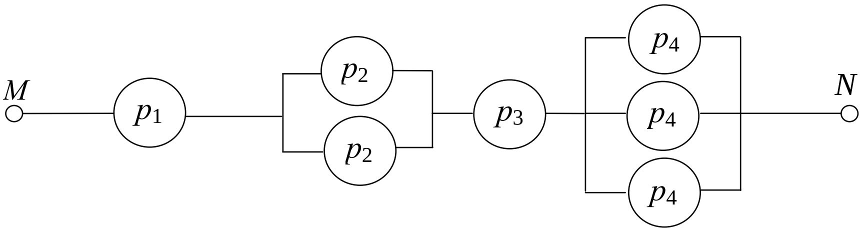
Модуль 1. Випадкові події, основні властивості

Індивідуальним завданням за першим модулем є розрахунково-графічна робота № 1, яку видає студентам викладач.

Зразок розрахунково-графічної роботи № 1

1. У першій урні 5 білих і 5 чорних куль, а у другій урні 4 білих і 8 чорних куль. З першої урни навмання виймають 2 кулі, з другої – 2 кулі. Знайти ймовірність того, що серед вийнятих куль: а) всі кулі одного кольору; б) тільки три білих кулі; в) хоча б одна біла.

2. Коло технічного пристрою між точками M і N складене за схемою, зображеною на малюнку нижче. Різні елементи кола працюють незалежно один від одного відповідно з надійністю: $p_1 = 0{,}8;$ $p_2 = 0{,}7;$ $p_3 = 0{,}6;$ $p_4 = 0{,}9.$ Знайти надійність пристрою загалом.



3. В урні 3 чорних і білих куль, до них кладуть 4 білих кулі. Після цього з урни навмання виймають 4 кулі. Знайти ймовірність того, що всі вийняті кулі білі, враховуючи що всі можливі припущення про початковий вміст урни рівноможливі.

4. В одній урні 5 білих і 5 чорних, а в другій – 4 білих і 7 чорних куль. З першої урни навмання виймають 2 кулі і перекладають їх у другу. Після цього з другої урни також навмання виймають 3 кулі. Знайти ймовірність того, що всі кулі, вийняті з другої урни, білі.

5. Знайти ймовірність того, що подія А настане: а) точно 2 рази; б) найімовірніше число разів; в) менше ніж 9 разів; г) більше, ніж 3 рази. $p = 0{,}0048;$ $n = 420.$

6. Знайти ймовірність того, що подія А настане: а) точно 220 разів; б) більше ніж 181 і менше ніж 241 раз; в) менше ніж181 рази; г) не менше ніж 181 рази. $n = 510;$ $p = 0{,}41.$

Модуль 2. Випадкові величини, функції – основні характеристики

Індивідуальним завданням за першим модулем є розрахунково-графічна робота № 2, яку видає студентам викладач.

Зразок розрахунково-графічної роботи № 2

1. Задано закон розподілу дискретної випадкової величини. Знайти $M(x), D(x), \sigma(x)$. (N – номер варіанта).

X	$N-1$	N	$N+1$	$N+2$
P	0,05	0,25	0,33	0,37

Побудувати многокутник розподілу.

2. Є три ящики. У першому містяться 7 стандартних і 3 браковані однотипні деталі, у другому – 6 стандартних і 4 браковані деталі, а в третьому – 5 стандартних і 5 бракованих. Із кожного ящика навмання беруть по одній деталі.

1) побудувати закон розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини X – появи числа стандартних деталей серед трьох навмання взятих;

2) визначити $F(X)$ та побудувати графік цієї функції.

3. Функція розподілу деякої неперервної випадкової величини задана так:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \dfrac{x^3}{8}, & 0 < x \le 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

1) знайти числові характеристики $M(x), D(x), \sigma(x)$;

2) знайти вираз для щільності. Побудувати графіки для $F(x)$ та $f(x)$. Знайти ймовірність того, що випадкова величина прийме значення в інтервалі [1, 4].

Перед виконанням індивідуальних завдань студентам необхідно попередньо вивчити теоретичні питання, які виносяться на лекції і самостійне вивчення, опрацювати матеріал практичних занять. За необхідності та наявних ускладненнях звертатись за консультацією до викладача.

Виконання РГР оцінюється у відсотках до максимальної суми за РГР.

ПОРЯДОК І КРИТЕРІЇ ОЦІНЮВАННЯ ЗНАНЬ СТУДЕНТІВ

Поточне оцінювання знань студентів

Метою і завданням поточного контролю є визначення рівня засвоєння матеріалу студентами для корекції їх навчальної роботи в разі потреби, а також накопичення балів рейтингу студента з дисципліни.

Засоби поточного контролю вивчення дисципліни:

– опитування на заняттях;
– перевірка підготовки до практичних занять;
– перевірка виконання РГР;
– перевірка виконання модульної контрольної роботи;
– розв’язування практичних завдань біля дошки;
– опитування у процесі індивідуально-консультативних занять для перевірки засвоєння матеріалу пропущених занять.

Об’єктами поточного контролю є: відвідування занять, відповіді на заняттях, виконання РГР, виконання модульних контрольних робіт, додаткові види робіт, які вказано в таблицях нарахування балів (дод. А, Б).

Питання для підготовки до поточного модульного контролю

Назва теми	Питання
Модуль 1. Випадкові події, основні властивості	
Тема 1. Основні поняття теорії ймовірностей	Елементи комбінаторики
	Означення ймовірності та деякі її властивості
	Класифікація подій. Протилежні події
	Теореми додавання та множення ймовірностей випадкових подій
	Ймовірність появи хоча б однієї з подій
	Надійність системи
	Формула повної ймовірності. Формула Байєса

Назва теми	Питання
Тема 1. Основні поняття теорії ймовірностей	Схема Бернуллі. Формула Бернуллі. Узагальнення формули Бернуллі на довільну кількість наслідків випробування
	Граничні випадки формули Бернуллі: формула Пуассона. Локальна та інтегральна формули Лапласа
Модуль 2. Випадкові величини, функції – основні характеристики	
Тема 2. Випадкові величини та їх основні характеристики	Дискретна випадкова величина (ДВВ). Функція розподілу, полігон розподілу ймовірностей ДВВ. Числові характеристики ДВВ
	Неперервна випадкова величина (НВВ). Функція розподілу, щільність розподілу ймовірностей НВВ. Числові характеристики НВВ
	Розподіли дискретних випадкових величин та їх числові характеристики: рівномірний, Пуассона, біноміальний, геометричний, гіпергеометричний
	Розподіли неперервних випадкових величин: рівномірний та нормальний

Зразок модульної контрольної роботи

Модульна контрольна робота 1

1. Кинуто дві гральні кістки. Знайти ймовірність того, що сума очок на гранях, що випали, дорівнює семи.

2. Стрілець стріляє по мішені, яка поділена на дві області. Імовірність влучення в першу область дорівнює 0,45, у другу – 0,35. Знайти ймовірність того, що стрілець при одному пострілі попадає або в першу, або в другу область.

3. У групі спортсменів 20 лижників, 6 велосипедистів та 4 бігуни. Імовірність виконувати кваліфіковану норму така: для лижника – 0,9; для велосипедиста – 0,8; для бігуна – 0,75. Знайти ймовірність того, що: а) спортсмен, вибраний навмання, виконає норму; б) не виконав норму лижник.

4. Імовірність влучання в десятку для цього стрільця при одному пострілі дорівнює 0,2. Визначити ймовірність влучання в десятку при трьох пострілах.

5. Гральна кістка кидається 100 разів. Знайти: а) m_0 – наймовірніше число появ числа очок, кратного трьом та ймовірність цієї появи; б) імовірність того, що число очок кратних трьом з'явиться не більше цього числа.

Модульна контрольна робота 1

1. Задано закон розподілу дискретної випадкової величини. Знайти $M(x), D(x), \sigma(x)$.

X	–5	2	3	4
P	0,4	0,3	0,1	0,2

2. У партії із 6 деталей стандартних 4 деталі. Навмання відібрані 3 деталі. Скласти закон розподілу випадкової величини X – числа стандартних деталей серед відібраних.

3. За заданою щільністю розподілу знайти функцію розподілу неперервної випадкової величини. Побудувати графік функції розподілу.

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le -4;\\ \dfrac{1}{6}, & -4<x\le 2;\\ 0, & x>2.\end{cases}$$

4. Поняття функції розподілу дискретної випадкової величини. Приклад.

5. Поняття математичного сподівання неперервної випадкової величини. Приклад.

Критерії оцінювання знань та система нарахування балів

Виконання модульних контрольних робіт оцінюється у відсотках до максимальної суми за них. Система нарахування балів представлена в таблицях додатків А, Б.

Підсумкове оцінювання знань студентів

Перелік питань для підготовки до підсумкового контролю (3 семестр)

1. Предмет теорії ймовірностей і математичної статистики.
2. Історія зародження теорії ймовірностей. Елементи комбінаторики.

3. Елементарні події. Простір елементарних подій. Випадкові події. Дії над подіями.
4. Класична та статистична ймовірності, зв’язок між ними. Властивості класичної ймовірності.
5. Аксіоми теорії ймовірностей. Геометрична ймовірність.
6. Умовна ймовірність. Залежні і незалежні події.
7. Теореми додавання і множення ймовірностей для довільних випадкових подій, про появу принаймні однієї із сукупності незалежних подій.
8. Особливості основних теорем теорії ймовірностей для незалежних, несумісних подій.
9. Повна група подій. Формула повної ймовірності.
10. Формула Бейеса.
11. Серія незалежних випробувань. Схема Бернуллі.
12. Формула Бернуллі.
13. Узагальнення формули Бернулі на довільну кількість наслідків випробування.
14. Теорема Пуасона.
15. Локальна теорема Лапласа.
16. Інтегральна теорема Муавра-Лапласа.
17. Функції Гауса та Лапласа. Їх властивості та застосування.
18. Випадкові величини (ВВ). Поняття про дискретну випадкову величину (ДВВ).
19. Функція розподілу ВВ та її властивості для ДВВ.
20. Обчислення ймовірностей за допомогою функції розподілу.
21. Закон розподілу і полігон розподілу ймовірностей ДВВ.
22. Означення НВВ. Функція розподілу та щільність розподілу НВВ.
23. Числові характеристики випадкових величин: математичне сподівання, дисперсія, середньоквадратичне відхилення для ДВВ.
24. Числові характеристики випадкових величин: математичне сподівання, дисперсія, середньоквадратичне відхилення для НВВ.
25. Властивості математичного сподівання і дисперсії.
26. Початкові та центральні моменти.
27. Розподіли дискретних випадкових величин: рівномірний, Пуасона, біноміальний, геометричний та їх числові характеристики.
28. Розподіли неперервних випадкових величин і числові характеристики.
29. Рівномірний закон розподілу.

30. Розподіл Стьюдента, Пірсона, Фішера.
31. Нормальний закон розподілу неперервних випадкових величин.
32. Ймовірність попадання нормальної величини в інтервал. Правило трьох сигм.
33. Закони великих чисел
34. Нерівності Чебишева. Теореми Чебишева.

Загальна підсумкова оцінка з дисципліни

Критерії, параметри та шкала оцінювання знань студентів і відповідність оцінок у різних шкалах наведено в додатках А, Б.

Загальна підсумкова оцінка з дисципліни за семестр – це сума оцінок поточного контролю.

Якщо студент не з’явився на підсумковий контроль, то йому виставляється як підсумкова та оцінка, яка отримана за результатами поточного контролю.

Рейтингом студента за дисципліною є кількість балів, що студент отримав у результаті вивчення дисципліни.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНИХ ІНФОРМАЦІЙНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Барковський В. В. Теорія ймовірностей та математична статистика / В. В. Барковський, Н. В. Барковська, О. К. Лопатін. 5-те вид. – Київ : Центр учбової л-ри, 2010. – 424 с.
2. Булаєнко М. В. Теорія ймовірностей. Конспект лекцій з дисципліни «Теорія ймовірностей і математична статистика» (для студентів 2 курсу денної і заочної форм навчання освітньо-кваліфікаційного рівня бакалавр, напряму підготовки 6.070101 «Транспортні технології (за видами транспорту)») / М. В. Булаєнко; Харк. нац. акад. міськ. госп-ва. – Харків : ХНАМГ, 2011. – 174 с.
3. Веригіна І. В. Теорія ймовірностей та математична статистика: Частина 1. Випадкові події: Лекції і практикум [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спеціальності 143 «Атомна енергетика», спеціалізації «Атомні електричні станції» / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад. : І. В. Веригіна, О. В. Островська. – Електронні текстові данні (1 файл: 1,99 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. – 57 с.
4. Грищенко В. О. Теорія ймовірностей і математична статистика : навч. посіб. / В. О. Грищенко. – Київ : Київ. торг.-екон. ун-т, 2002. – 164 с.
5. Дорош А. К. Теорія ймовірностей та математична статистика : навч. посіб. / А. К. Дорош, О. П. Коханівський. – Київ : НТУУ «КПІ», 2006. – 268 с.
6. Жлуктенко В. І. Теорія ймовірностей і математична статистика : навч.-метод. посіб. : у 2 ч. Ч. I : Теорія ймовірностей / В. І. Жлуктенко, С. І. Наконечний. – Київ : КНЕУ, 2000. – 304 с.
7. Кармелюк Г. І. Теорія ймовірностей та математична статистика. Посібник з розв’язування задач : навч. посіб. / Г. І. Кармелюк. – Київ : Центр учбової л-ри, 2007. – 576 с.
8. Кушлик-Дивульська О. І. Теорія ймовірностей та математична статистика : навч. посіб. / Н. В. Поліщук, Б. П. Орел, П. І. Штабалюк. – Київ : НТУУ «КПІ», 2014. – 212 с.
9. Медведєв М. Т. Теорія ймовірностей та математична статистика : підручник / М. Т. Медведєв, І. О. Пащенко. – Київ : Ліра-К, 2020. – 536 с.

10. Огірко О. І. Теорія ймовірностей та математична статистика : навч. посіб. / О. І. Огірко, Н. В. Галайко. – Львів : ЛьвДУВС, 2017. – 292 с.
11. Роскладка О. В. Теорія ймовірностей і математична статистика : навч. посіб. / О. В. Роскладка. – Полтава : ПУСКУ, 2007.
12. Устимчик Г. В. Теорія ймовірностей та математична статистика: Методичні вказівки для студентів напряму 6.040201 «Математика» / Г. В. Устимчик, Л. В. Матвіюк, Г. М. Вартанян. – Одеса : «Одеський національний університет імені І. І. Мечникова», 2015. – 136 с.

ДОДАТКИ

Додаток А

Таблиця відповідності результатів контролю знань за різними шкалами та критерії оцінювання з дисципліни

Оцінка за шкалою ЄКТС*	**Оцінка за баловою шкалою, що використовується в ПУЕТ**	**Оцінка за 4-баловою шкалою**
F	1–34 балів	2 – Незадовільно з обов’язковим повторним вивченням дисципліни
FX	35–59 балів	2 – Незадовільно з можливим повторним складанням іспиту
D E	60–65 балів 66–70 балів	3 – Задовільно
C B	71–78 балів 79–85 балів	4 – Добре
A	86–100 балів	5 – Відмінно

** ЄКТС – Європейська кредитна трансферно-накопичувальна система.*

Додаток Б

Система нарахування балів за видами навчальної роботи з дисципліни «Теорія ймовірностей і математична статистика»

Вид навчальної роботи	**Максимальна кількість балів**
1. Аудиторна (лекції і практичні). Відвідування занять 1 частини (за дистанційного навчання – тестування) (20 балів)	20
1. Аудиторна (лекції та практичні). Модуль 1. Випадкові події, основні властивості. Правильна відповідь під час опитування (2 бали за відповідь, 3 відповіді за 1 модуль) 6 балів. 2. Самостійна робота. Виконання розрахунково-графічного завдання з ч. 1 модуля 1: - за виконання в термін (20 балів); - за виконання з порушенням в тиждень (18 балів); - за виконання з порушенням більше тижня (16 балів). 3. Модульний контроль. МКР (підсумкове тестування) (15 балів)	41
1. Аудиторна (лекції і практичні). Модуль 2. Випадкові величини, функції – основні характеристики. Правильна відповідь під час опитування (2 бали за відповідь, 2 відповіді за 1 модуль) 4 бали. 2. Самостійна робота. Виконання розрахунково-графічного завдання з ч. 1 модуля 2: - за виконання в термін (20 балів); - за виконання з порушенням в тиждень (18 балів); - за виконання з порушенням більше тижня (16 балів). 3. Модульний контроль. МКР (підсумкове тестування) (15 балів)	39
Поточне оцінювання	100
ПМК	
Разом (частина 1)	**100**

ПМК уважається зарахованим, коли студент набрав 60 і більше балів.

ЗМІСТ

Навчально-методичне видання

ЄМЕЦЬ Олег Олексійович
ПАРФЬОНОВА Тетяна Олександрівна

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ І МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА (Частина 1)

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНИЙ ПОСІБНИК

Редагування *Л. М. Діденко*
Комп'ютерне верстання *О. С. Корніліч*

Формат 60х84/16. Ум. друк. арк. 3,4.
Зам. № 257/2047.

Видавець і виготовлювач
Вищий навчальний заклад Укоопспілки
«Полтавський університет економіки і торгівлі»,
к. 115, вул. Коваля, 3, м. Полтава, 36014; ☎(0532) 50-24-81

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 3827 від 08.07.2010 р.