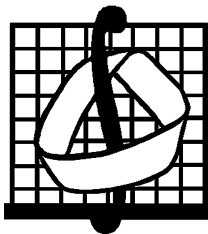


МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА



МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

МАТЕРИАЛЫ
XI Международного семинара
«ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ»,
посвященного 80-летию
со дня рождения
академика О. Б. ЛУПАНОВА

(Москва, 18–23 июня 2012 г.)

Издательство механико-математического факультета МГУ

Москва 2012

М34
УДК 519.7



Издание осуществлено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту 12-01-06040

М34 Материалы XI Международного семинара «Дискретная математика и ее приложения», посвященного 80-летию со дня рождения академика О. Б. Лупанова (Москва, МГУ, 18–23 июня 2012 г.) / Под редакцией О. М. Касим-Заде. — М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ, 2012. — 453 с.

Сборник содержит материалы XI Международного семинара «Дискретная математика и ее приложения», посвященного 80-летию со дня рождения академика О. Б. Лупанова, проходившего на механико-математическом факультете МГУ имени М. В. Ломоносова с 18 по 23 февраля 2012 г. при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 12-01-06040). Для студентов, аспирантов и научных работников в области дискретной математики и математической кибернетики.

Научное издание

МАТЕРИАЛЫ
XI МЕЖДУНАРОДНОГО СЕМИНАРА
«ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ»,
посвященного 80-летию со дня рождения академика О. Б. Лупанова
(Москва, МГУ, 18–23 июня 2012 г.)

Под общей редакцией О. М. КАСИМ-ЗАДЕ

Редакционная группа:

*О. С. Дудакова, К. А. Зыков, Р. М. Колпаков,
В. В. Кочергин, А. В. Чашкин*

Ответственный за выпуск *В. В. Кочергин*

Н/К

ИД № 04059 от 20.02.2001 Подписано к печати 02.08.2012. Формат 60 × 90/16.
Бумага типогр. № 1. Печ. л. 28,5. Тираж 200 экз.
Издательство механико-математического факультета МГУ. 119991, Москва, Ленинские горы, МГУ.
Отпечатано с оригинал-макета в типографии «11-й ФОРМАТ», Москва

© Коллектив авторов, 2012

КОМБИНАТОРНАЯ ЗАДАЧА НАХОЖДЕНИЯ МАКСИМАЛЬНОГО ПОТОКА

О. А. Емец, Е. М. Емец, Ю. Ф. Олексийчук (Полтава)

В работе рассматривается комбинаторная задача нахождения максимального потока и методы ее решения. Рассматриваемая задача является обобщением задачи нахождения максимального потока и позволяет расширить класс моделируемых задач.

Постановка задачи. Пусть транспортная сеть [1] задана графом $\Gamma = (V, U)$ с множеством вершин $V = \{v_1, v_2, \dots, v_{|V|}\}$ и множеством дуг U . Дугу из вершины v_i в вершину v_j будем обозначать u_{ij} . Пропускная способность дуги u_{ij} равна $b_{ij} \geq 0$. Источник будем обозначать v_s , сток — v_t .

Потоком называют функцию $w : U \rightarrow R$ со следующими свойствами:

1. Значение функции w на дуге u_{ij} не может превышать пропускную способность дуги, то есть $w(u_{ij}) \leq b_{ij}$.

2. Сохранение баланса во всех вершинах, кроме стока и источника, то есть $\sum_{u_{iz} \in U} w(u_{iz}) = \sum_{u_{zj} \in U} w(u_{zj}) \forall z, z \neq s, z \neq t$.

Величиною потока $|w|$ будем называть сумму значений функции w по исходящим из источника дугам: $\sum_{u_{si} \in U} w(u_{si}) = |w|$.

В задаче нахождения максимального потока наложим дополнительные ограничения. Пусть поток по дугам $u_{ij} \in U' \subseteq U$ может принимать значения, которые не превышают число $x_{ij} = g_l \in G$, то есть $w(u_{ij}) \leq x_{ij}$, где $G = \{g_1, g_2, \dots, g_\eta\}$ — заданное мультимножество; причем вектор из x_{ij} является k -размещением из η элементов мультимножества G , то есть $x = (x_{i_1 j_1}, x_{i_2 j_2}, \dots, x_{i_k j_k}) \in E_{\eta n}^k(G)$, где n — количество элементов основы [2].

Назовем эту задачу комбинаторной задачей нахождения максимального потока. Рассматриваемая задача впервые была поставлена в [3] и до этого не рассматривалась.

Математическая модель задачи. Пусть поток по дуге u_{ij} , равен y_{ij} , то есть $y_{ij} = w(u_{ij})$. Задача состоит в отыскании максимального значения функции f и соответственных значений x_{ij} , y_{ij} :

$$f = \sum_{u_{jt} \in U} y_{jt} \rightarrow \max, \quad (1)$$

при выполнении условий: сохранение баланса в вершинах

$$\sum_{u_{iz} \in U} y_{iz} = \sum_{u_{zj} \in U} y_{zj}, z \neq t, z \neq s, \quad (2)$$

ограничения на пропускную способность дуг

$$0 \leq y_{ij} \leq b_{ij} \quad \forall u_{ij} \in U, \quad (3)$$

и при дополнительных комбинаторных ограничениях

$$y_{ij} \leq x_{ij} \quad \forall u_{ij} \in U, \quad (4)$$

$$x = (x_{i_1 j_1}, x_{i_2 j_2}, \dots, x_{i_k j_k}) \in E_{\eta n}^k(G). \quad (5)$$

Задача (1)–(5) является частным случаем линейной задачи евклидовой частично комбинаторной оптимизации на размещениях [2].

Методы решения. Известны методы решения евклидовых комбинаторных задач на размещениях (см. например, [2–5]), которые применимы для решения комбинаторной задачи нахождения максимального потока [3]. Справедлива теорема.

Теорема. *Комбинаторная задача нахождения максимального потока является NP-трудной.*

Учитывая NP-трудность задачи, актуальной является разработка приближенных методов. В [6] предложен "жадный" алгоритм для решения задачи. Идея метода состоит в том, что на каждом этапе находится самый короткий путь из источника в сток (если таких путей несколько, то выбирается путь с максимальной пропускной способностью без учета комбинаторных ограничений). Затем x_{ij} с найденного пути принимают значения, которые максимизируют допустимый поток по этому пути. После этого находится остаточная сеть и т. д. Справедливо такое утверждение.

Теорема. *Время работы жадного алгоритма для комбинаторной задачи нахождения максимального потока $T(n) = O(|U|n|w^*|)$, где $|U|$ — количество дуг в графе, n — количество разных элементов в мультимножестве G , $|w^*|$ — искомая величина максимального потока.*

Рассмотрим применение метода ветвей и границ для решения задачи. Пронумеруем дуги, на которые наложены комбинаторные ограничения: u_1, u_2, \dots, u_k . Как начальное рекордное значение можно взять решение, полученное некоторым приближенным методом, например жадным алгоритмом. Начальным этапом будем считать

классическую задачу нахождения максимального потока (без комбинаторных ограничений), начальной оценкой — ее решение.

Ветвление делается так: для u_i полагаем x_i равным всем доступным значениям из G (по порядку). Оценкой будет решение классической задачи с пропускными способностями $b_{ij}^* = \min(b_{ij}, x_{ij})$. Если оценка больше рекордного значения, продолжаем ветвление, иначе — отсекаем вершину (очевидно, что добавление дополнительных ограничений не может увеличить максимальный поток). Изменяя $i = 1, 2, \dots, k$ и используя поиск в глубину находим решение задачи.

Список литературы

1. Форд Л. Р., Фалкерсон Д. Р. Поток в сетях. — М.: Мир, 1966.
2. Стоян Ю. Г., Емец О. О. Теория и методы евклидовой комбинаторной оптимизации. — К.: СДО, 1993. — 188 с.
3. Емец О. О., Емец Е. М., Олексійчук Ю. Ф. Знаходження максимального потоку в мережі з додатковими комбінаторними обмеженнями // Таврический вестник информатики и математики. — 2011. — № 1. — С. 43–50.
4. Емец О. А., Емец Е. М., Олексійчук Ю. Ф. Прямой метод отсечений для задач комбинаторной оптимизации с дополнительными ограничениями // Кибернетика и системный анализ. — 2011. — № 6. — С. 116–124.
5. Барболина Т. Н., Емец О. А. Полностью целочисленный метод отсечения для решения линейных условных задач оптимизации на размещениях // Журн. вычисл. математики и матем. физики. — 2005. — Т. 45, № 2. — С. 254–261.
6. Емец О. А., Емец Е. М., Олексійчук Ю. Ф. Методы решения задачи нахождения максимального потока с дополнительными комбинаторными ограничениями // Материалы 3-й международной конференции "Математическое моделирование, оптимизация и информационные технологии" (Кишинев, 19–23 марта 2012 г.). — Кишинев: Эврика, 2012. — С. 333–337.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	3
-------------------	---

Пленарные доклады

М. П. Минеев, В. Н. Чубариков О новых применениях арифметики в криптографии	4
Н. П. Редькин О сложности индивидуальных булевых функций ...	26
М. А. Федоткин Системы управления конфликтными потоками неоднородных требований и принцип Ляпунова — Яблонского	35
И. В. Кучеренко Решение проблемы описания границ рекурсивных классов обратимых клеточных автоматов	42
В. Н. Шевченко Триангуляции выпуклых конусов и реализация их f -векторов	49
В. А. Захаров Модели и алгоритмы в задаче проверки эквивалентности программ	53
Н. Ю. Золотых, А. Ю. Чирков Сложность расшифровки пороговых функций многозначной логики	63

Секция

«Синтез, сложность и надежность управляющих систем»

Ф. М. Аблаев, А. В. Васильев Квантовый метод отпечатков для модели квантовых коммуникационных вычислений	78
Ф. М. Аблаев, К. Р. Хадиев Уточнение иерархии классов булевых функций, представимых в моделях k -OBDD ветвящихся программ	80
В. Б. Алексеев О билинейной сложности перемножения матриц размеров 2×4 и 4×2	82
М. А. Алехина О сложности асимптотически оптимальных по надежности схем при однотипных константных неисправностях на выходах элементов	85
А. А. Андреев Об одной последовательности функций многозначной логики	88
О. Ю. Барсукова О числе полных базисов из двухвходовых элементов с заданным коэффициентом ненадежности	91
А. Ю. Бернштейн, Н. В. Шилов Мультиагентная геометрическая задача о назначениях: информационный аспект	92
М. Блезер, Б. В. Чокаев О почти билинейных алгоритмах для локальных и сверхосновных алгебр	95
С. В. Блинов, С. А. Ложкин О синтезе рекурсивных схем из функциональных элементов с ограниченной глубиной рекурсии	98

А. С. Нагорный О пересечениях классов монотонных функций многозначной логики	207
Д. Ю. Панин О полноте систем монотонных одноместных функ- ций в P_k	210
Д. К. Подолько О некоторых свойствах операции суперпозиции специального вида	212
С. Н. Селезнева Нижняя оценка сложности нахождения полино- мов булевых функций в одном классе схем с разделенными перемен- ными	216
Л. Н. Сысоева Универсальные множества обобщенных фор- мул	218
В. П. Тарасова Позиционно-оптимальные стратегии поиска обла- сти наибольших значений функции (многомерный случай)	220
Р. В. Хелемендик О трансляции формул логики линейного вре- мени в формулы логики ветвящегося времени	223

Секция «Комбинаторный анализ»

М. А. Башов Несуществование аналога теоремы Краскала— Катоны для задачи минимизации двусторонней тени	227
Д. Белаззогу, Р. М. Колпаков, М. Раффино Об эффективном поиске буквенных составов в фрагментах двумерных слов	230
Л. Н. Бондаренко, М. Л. Шарапова Статистики на vr - монотонных перестановках	231
Л. Н. Бондаренко, М. Л. Шарапова Статистики на группе перестановок и перманенты	234
В. А. Емеличев, В. В. Коротков Инвестиционная булева задача с критериями Вальда и Сэвиджа в условиях неопределенности	237
О. А. Емец, А. О. Емец К оптимизации на размещениях	240
О. А. Емец, Е. М. Емец, Ю. Ф. Олексийчук Комбинаторная задача нахождения максимального потока	243
А. Н. Исаченко, Я. А. Исаченко H -периметр и L -окружение матроида	246
А. Н. Исаченко, А. М. Ревякин Базово упорядоченные матро- иды	249
Л. М. Коганов Эквивалентность правил Мэзона для передаточ- ной функции в графе сигнальных потоков основной формуле метода трансфер-матрицы	252
В. К. Леонтьев Производящие функции в задаче о ранце	255
В. Е. Маренич Простые решеточные матрицы над дистрибутив- ными решетками	257
Е. Е. Маренич Теорема Фробениуса для полугруппы матриц над дистрибутивной решеткой	260
А. М. Ревякин Координатизация матроидов	263