Українська Федерація Інформатики

Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова
Національної академії наук України

ВНЗ Укоопспілки «Полтавський університет економіки і торгівлі»
(ПУЕТ)

КОМБІНАТОРНА ОПТИМІЗАЦІЯ ТА НЕЧІТКІ МНОЖИНИ (КОНеМ – 2013)

Матеріали III Всеукраїнського наукового семінару
(м. Полтава, 30-31 серпня 2013 року)

За редакцією д. ф.-м. н., професора О. О. Ємця

Полтава
ПУЕТ
2013

УДК 519.7+519.8
ББК 22.176
К63

ПРОГРАМНИЙ КОМІТЕТ

К63 Комбінаторна оптимізація та нечіткі множини (КОНеМ – 2013) : матеріали III Всеукр. наук. семінару, (м. Полтава, 30–31 серп. 2013 р.) / за ред. О. О. Ємця. – Полтава : ПУЕТ, 2013. – 87 с. – Текст укр., рос.

ISBN 978-966-184-232-7

У збірнику тез семінару висвітлено сучасну проблематику в таких галузях, як комбінаторна оптимізація та суміжні питання, математичне моделювання і обчислювальні методи, теорія та застосування нечітких множин, сучасні проблеми оптимізації та невизначеності в прийнятті рішень, сучасні проблеми комбінаторики.

Збірник розрахований на фахівців з кібернетики, інформатики, системних наук.

УДК 519.7+519.8
ББК 22.176

Матеріали друкуються в авторській редакції мовами оригіналів.
За виклад, зміст і достовірність матеріалів відповідають автори.

ISBN 978-966-184-232-7

ЗМІСТ

Аралова Н. И., Машкина И. В. Исследование на математических моделях адаптационных возможностей организма к измененным условиям окружающей среды 5

Барболіна Т. М. Розв’язування однієї задачі вибору маршрутів перевезення 7

Будник В. М., Риженко Т. М., Будник М. М. Синтез 4-значних нечітких вирішуючих правил 10

Буй Д. Б., Компан С. В. Некласическая прикладная логика для объектно-ориентированного программирования 12

Гуляницький Л. Ф., Рудик В. О. q-кодування в задачі прогнозування третинної структури протеїну 15

Донець Г. П. Методи комбінаторного розпізнавання 19

Емец О. А., Емец А О. О слабой разрешимости и слабой допустимости нечетких линейных систем уравнений 27

Емец О. А., Чиликина Т. В. Теорема о решении безусловной задачи минимизации линейной функции на размещениях 35

Ємець О. О., Ольховська О. В. Деякі властивості функції мінімуму та максимуму 37

Ємець О. О., Парфьонова Т. О. Метод гілок та меж для задачі оптимізації на перестановках з сепарабельною цільовою функцією та лінійними обмеженнями 40

Ємець О. О., Тур О. В. Фрактальні властивості комбінаторної множини розміщень 42

Зинченко А. И., Величко И. Г., Козин И. В. Топологическая структура G-множества в задаче плоского регулярного раскроя 47

Кашникова И. В. Об использовании математического аппарата теории нечетких множеств для решения прикладных задач логистики 48

Колєчкіна Л. М., Двірна О. А. Розв'язування екстремальних задач на комбінаторних конфігураціях при умові багатокритеріальності з використанням методу послідовного вводу обмежень............ 51

Косолап А. И. Метод точной квадратичной регуляризации для задач комбинаторной оптимизации 53

Кузь Б. О. Розробка структур даних для розв'язування задачі комівояжера великої розмірності.. 55

Леонова М. В. Задача навчального розкладу.............................. 56

Мельник І. М., Піднебесна Г. А. Алгоритм гілок і границь роз'вязання задачі вибору оптимальної регресійної моделі як задачі комбінаторної оптимізації та особливості його реалізації 60

Морозов Д. І. Ріст диференційовних ізометрій бінарного кореневого дерева.. 63

Нагорный А. С. О ядровых аксиомах вложения в трехзначной логике 64

Ночвай В. І. Нечітка багатокритеріальна задача управління якістю повітря 66

Олексійчук Ю. Ф. Обчислювальні експерименти застосування методу імітації відпалу для комбінаторної задачі знаходження максимального потоку 68

Плотников А. Д. Исследование и моделирование задач класса NP.. 72

Рясная И. И., Сенько А. Е., Ходзинский А. Н. О применении относительных мер сходства по расстоянию.......................... 74

Селезнева С. Н. О схемной сложности нахождения полиномов булевых функций... 77

Тимофієва Н. К. Вхідні дані та аргумент цільової функції в задачах комбінаторної оптимізації.. 80

Гордеев Р. Н. О некоторых вариациях центральной предельной теоремы для нечетких случайных величин................................ 83

Гордеев Р. Н., Звягинцев Н. В. Применение мягких вичислений для анализа гетерогенных данных 84

Інформація про семінар 86

УДК 519.8

ИССЛЕДОВАНИЕ НА МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ АДАПТАЦИОННЫХ ВОЗМОЖНОСТЕЙ ОРГАНИЗМА К ИЗМЕНЕННЫМ УСЛОВИЯМ ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЫ

Н. И. Аралова, *к. т. н., ст. н. с.*
Институт кибернетики им. В. М. Глушкова НАН Украины
aralova@ukr.net;
И. В. Машкина*, к. т. н.*
Киевский университет имени Б. Гринченко
mashkinai@ukr.net

Вопросы изучения процессов адаптации организма человека к измененным условиям окружающей среды и оценки газового состояния системы дыхания в ходе адаптации есть достаточно актуальными, потому что они связаны многих практических задач медицины труда, физиологии спорта, подводной физиологии.

Среди многих функциональных систем организма, которые реагируют на такие влияния, как физическая нагрузка, гипобарическая гипоксия, гипербарическая среда и другие, и особенно выделяется система дыхания, поскольку именно она наиболее восприимчива к этим влияниям на нее ложится много функций в процессе адаптации. В связи с этим важной задачей при исследовании адаптационных процессов и определении адаптационных возможностей организма человека есть прогнозирование газового состояния системы дыхания как во время адаптации к особенным условиям жизнедеятельности, так и после прохождения той или другой фазы адаптационного процесса. Предложенная задача решается с помощью применения математической модели газообменных функций систем дыхания и кровообращения, на которые влияют гипобарические условия окружающей среды или повышенные уровни исполняемых организмом физических нагрузок.

Можно выделить три стадии адаптационных процессов – краткосрочную, среднесрочную и долгосрочную. Каждая из них характеризуется своими особенностями функционирования системы саморегуляции, поэтому представляется целесообразным изучать реакцию этой системы на внешние и внутренние возмущения отдельно для каждой стадии адаптационного процесса. Заметим, что в настоящее время инструментальным путем невозможно установить целый ряд показателей, которые характеризуют состояние системы дыхания и кровообращения. Но прогнозирование газового состояния организма возможно при использовании математических моделей, разработанных в Институте кибернетики Ю.Н. Онопчуком с соавторами.

В данной работе с помощью математической модели с оптимальным управлением динамики процесса массопереноса респираторных газов рассчитываются локальные и системные кровотоки, напряжения респираторных газов в крови и тканях. Оптимальное управление предполагает автоматическое разрешение конфликтной ситуации, возникающей в определенных условиях между метаболическими потребностями дыхательной и сердечной мышц, участвующих в обеспечении процесса массопереноса газов. При решении задачи прогнозирования реакции системы дыхания на воздействующее возмущение (физическая нагрузка, гипоксическая среда и т. п.) осуществляется индивидуализация модели управления. С этой целью в функционале качества

$$J = \int_{t_0}^{T} \left[\rho_1 \sum_i \lambda_i \left(G_{ti}O_2 - q_{ti}O_2 \right)^2 + \rho_2 \sum_i \lambda_i \left(G_{ti}CO_2 + q_{ti}CO_2 \right)^2 \right] d\tau ,$$

где $G_{ti}O_2, G_{ti}CO_2$ – соответственно потоки кислорода и углекислого газа через капиллярно-тканевой барьер;

$q_{ti}O_2, q_{ti}CO_2$ – скорость утилизации кислорода и образования; углекислого газа в i-том тканевом регионе;

ρ_1, ρ_2 – коэффициенты, отражающие чувствительность организма к недостатку кислорода и избытку углекислого газа в организме;

λ_i – коэффициенты, характерезующие степень кровенаполнения тканей.

Для каждого обследуемого выбираются соответствующие его индивидуальным особенностям коэффициенты ρ_1 и ρ_2.

Состояние динамической системы, которая представлена в модели, определяется уровнем напряжений кислорода (pO_2) и углекислоты (pCO_2) в крови и тканевых регионах. Таким образом в процессе моделирования формируются кислородные и углекислотные портреты организма при различной интенсивности функциональной деятельности мышц.

С помощью модели можно имитировать влияние внешних и внутренних возмущений по результатам модельного прогнозирования стационарного газового состояния в конкретные моменты времени на основании полученных инструментальным путем данных. В качестве стационарных условий газового состояния выбирается своевременная и адекватная доставка кислорода к тканям работающих органов и адекватное вымывание углекислого газа. В связи с тем, что экспериментальным путем невозможно определить объемные скорости кровотоков в отдельных органах, решается задача распределения объемной скорости системного кровотока по тканевым капиллярам отдельных органов, основываясь на гипоксическом и гиперкапническом стимулах регуляции дыхания. Задача формулируется как задача квадратичного программирования. Данная методика успешно применялась при исследовании адаптационных возможностей организма человека выполняющего тяжелую физическую работу в условиях гипобарической гипоксии.

УДК 519.8

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ОДНІЄЇ ЗАДАЧІ ВИБОРУ МАРШРУТІВ ПЕРЕВЕЗЕННЯ

Т. М. Барболіна, *к. ф.-м. н., доцент*
Полтавський національний педагогічний університет імені В. Г. Короленка
tn_b@rambler.ru

Розглядається така лінійна умовна евклідова задача комбінаторної оптимізації: знайти пару $\left\langle C\left(x^*\right), x^*\right\rangle$ таку, що:

$$C\left(x^*\right) = \underset{x \in R^k}{\operatorname{extr}} \sum_{j=1}^{k} c_j x_j \ , \ \ x^* = \arg \underset{x \in R^k}{\operatorname{extr}} \sum_{j=1}^{k} c_j x_j \qquad (1)$$

за комбінаторної умови

$$\left(x_1, x_2, ..., x_k\right) \in \tilde{E}_{\eta n}^{k}\left(G\right) \qquad (2)$$

та додаткових обмежень

$$\sum_{j=1}^{k} a_{ij} x_j \le b_i \quad i \in J_m , \qquad (3)$$

де $c_j, a_{ij}, b_i \in R^1$, $G = \left\{ e_1^{\eta_1}, ..., e_n^{\eta_n} \right\}$ – задана мультимножина;

$\tilde{E}_{\eta n}^{k}(G)$ – підмножина загальної множини розміщень $E_{\eta n}^{k}(G)$, елементи $x=(x_1,...,x_k)$ якої задовольняють умову: для будь-якого $l \in J_n$ кількість $\nu_l(x)$ координат точки $x \in R^k$, що дорівнюють елементу $e_l \in S(G)$, не менше заданого числа η_l'.

Як приклад практичної задачі, що моделюється задачею вигляду (1)–(3), розглянемо видозміну наведеної в [1] задачі про вибір маршрутів перевезення. Нехай фірма здійснює закупівлю товару на k' підприємствах і доставляє його в k'' магазинів для продажу. Для кожного підприємства відомий обсяг V_i' ($i \in J_{k'}$) продукції, що виробляється, та вартість a_i одиниці продукції. Також відомі величини V_j'' мінімального обсягу закупівлі та b_j вартості одиниці продукції для j-го магазину ($j \in J_{k''}$). Вартість перевезення одиниці товару з i-го підприємства до j-го магазину складає c_{ij} грошових одиниць.

Для перевезення товару фірма має η машин, з них η_i машин мають вантажопідйомність e_i ($i \in J_n$). Необхідно максимізувати прибутки фірми, якщо на кожний маршрут між підприємством-виробником та магазином розподіляється не більше однієї машини, вантажопідйомність якої використовується повністю, і не менше r машин повинні залишитися на фірмі.

Нехай $k = k' \cdot k''$ – загальна кількість маршрутів, x_{ij} – обсяг товару, що перевозиться з i-го підприємства до j-го магазину. Розглянемо також мультимножину $G=\left\{e_0^{\eta_0}, e_1^{\eta_1}, ..., e_n^{\eta_n}\right\}$,

де $e_0 = 0$, $\eta_0 = k$, $|G| = \tilde{\eta} = \eta + k$, $|S(G)| = \tilde{n} = n+1$. Вимога залишати незадіяними не менше r машин означає, що серед координат точки $x=(x_{11},...,x_{1k''},...,x_{k'k''}) \in E_{\tilde{\eta}\tilde{n}}^{k}(G)$ повинно бути не менше $(k-\eta+r)$ нулів. Сформуємо евклідову комбінаторну множину $\tilde{E}_{\tilde{\eta}\tilde{n}}^{k}(G)$ таким чином:

$$\tilde{E}_{\tilde{\eta}\tilde{n}}^{k}(G) = \left\{x \in E_{\tilde{\eta}\tilde{n}}^{k}(G) \middle| \nu_l(x) \geq \eta_l' \ \forall i \in J_n^0\right\},$$

де $\nu_l(x)$ – кількість координат x_{ij} точки $(x_{11},...,x_{1k''},...,x_{k'k''})$, що дорівнюють елементу $e_l \in S(G)$, $\eta_0' = k - \eta + r$, $\eta_1' = ... = \eta_n' = 0$.

Таким чином, задача полягає у максимізації функції

$$P(x)=\sum_{j=1}^{k''}\left(b_j\sum_{i=1}^{k'}x_{ij}\right)-\sum_{i=1}^{k'}\left(a_i\sum_{j=1}^{k''}x_{ij}\right)-\sum_{i=1}^{k'}\sum_{j=1}^{k''}c_{ij}x_{ij} \tag{4}$$

при обмеженнях

$$(x_{11},...,x_{1k''},...,x_{k'k''})\in\tilde{E}_{\tilde{\eta}\tilde{n}}^{k}(G), \tag{5}$$

$$\sum_{j=1}^{k''}x_{ij}\le V_i' \quad \forall i\in J_{k'}, \tag{6}$$

$$\sum_{i=1}^{k'}x_{ij}\ge V_j'' \quad \forall j\in J_{k''}. \tag{7}$$

Для розв'язування задачі (1)–(3) можуть використовуватися запропоновані в [1, 2] алгоритми методу побудови лексикографічної еквівалентності для розв'язування оптимізаційних задач на розміщеннях. Оскільки допустимі розв'язки задачі (1)–(3) є розміщеннями, на які накладаються додаткові обмеження, то видозміні підлягають алгоритми розв'язування допоміжних задач. Як і в задачах на розміщеннях, при розв'язуванні допоміжних задач здійснюватимемо пошук комбінаторного λ-класу V, найближчого зліва (або справа) до заданого λ-класу. Якщо точка $x\in V$, одержана в результаті цього пошуку, задовольняє умову

$$v_l(x)\ge\eta_l' \ \forall l\in J_n, \tag{8}$$

то вважатимемо x розв'язком допоміжної задачі в ході розв'язування задачі (1)–(3). В іншому випадку знову шукаємо комбінаторний λ-клас V, найближчий зліва (справа) до λ-класу, визначеного точкою x. Процес продовжуватиметься до того моменту, коли буде знайдено λ-клас, представник якого задовольняє умову (8), або виявиться, що задача розв'язку не має.

Таким чином, у доповіді розглянуто задачу вибору маршрутів перевезення як евклідову задачу комбінаторної оптимізації, у якій накладається обмеження на мінімальну кількість повторів елементів мультимножини, та запропоновано підхід до розв'язування таких задач.

Інформаційні джерела

1. Емец О. А. Комбинаторная оптимизация на размещениях: монография / О. А. Емец, Т. Н. Барболина. – К. : Наук. думка, 2008. – 159 с.

2. Барболіна Т. М. Наближений метод розв'язування оптимізаційних задач на розміщеннях / Т. М. Барболіна // Матеріали II Всеукраїнської науково-практичної конференції «Інформатика та системні науки» ІСН-2011 17–19 березня 2011 р. / за ред. д. ф.-м. н., проф. Ємця О. О. – Полтава : РВВ ПУЕТ, 2011. – С. 31–34.

УДК 519.8

СИНТЕЗ 4-ЗНАЧНИХ НЕЧІТКИХ ВИРІШУЮЧИХ ПРАВИЛ

В. М. Будник, *м. н. с.;*
Т. М. Риженко*, м. н. с.;*
М. М. Будник, *д. т. н.*
Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України
budnyk@meta.ua

Вступ та мета. Відомо, що при використанні порогового вирішувального правила (*ВП*) похибка класифікації зростає для осіб, у яких значення діагностичного параметра близьке до порогу ($X_П$). Перспективними є складні багатозначні та нечіткі *ВП*, найпростішим з них є 3-значне *ВП* (*3ВП*), де обчислюють нижню ($X_Н$) та верхню ($X_В$) межі проміжного інтервалу, які розбивають діапазон значень параметра на 3 інтервали, що відповідають негативному, проміжному та позитивному класам. Методика синтезу *3ВП* та багатозначних не чітких ВП детально наведено в [1, 2]. Метою роботи є розвиток методів синтезу багатозначних ВП на основі функцій належності (*ФН*) для вирішення задач дискримінації та класифікації на 4 класи.

Дискримінація за наявності двох навчальних груп. Точність багатозначних *ВП* визначається значеннями функцій ймовірності (*ФЙ*) на межах інтервалів параметру, які відповідають різним класам. Тоді для 4-значного ВП (*4ВП*) точності для негативного (позитивного) класу аналогічні 3ВП:

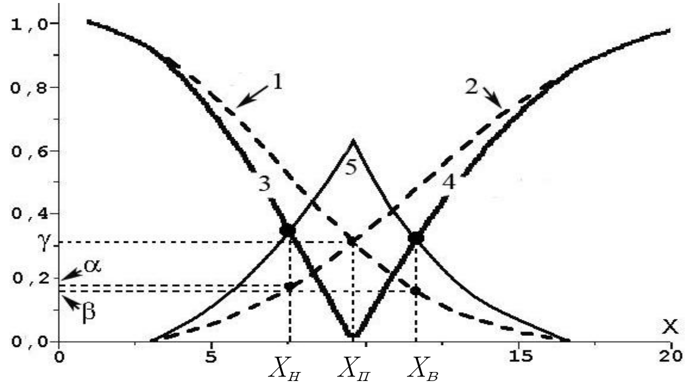
$$V_{нег} = 1 - \beta, \quad V_{поз} = 1 - \alpha, \tag{1}$$

де $\alpha(\beta)$ – ймовірність похибки 1-го (2-го) роду,
$\alpha = F_2(X = X_Н)$, $\beta = F_1(X = X_В)$, $F_{1,2}$ – *ФЙ* негативного (позитивного) класу.

Проміжний інтервал ділиться на 2 під-інтервала $X_Н<X<X_П$ та $X_П<X<X_В$, а проміжний клас ділиться на 2 класи, точність для яких V_1 (2) описується виразом:

$$V_1 = \gamma - \alpha, \quad V_2 = \gamma - \beta, \tag{2}$$

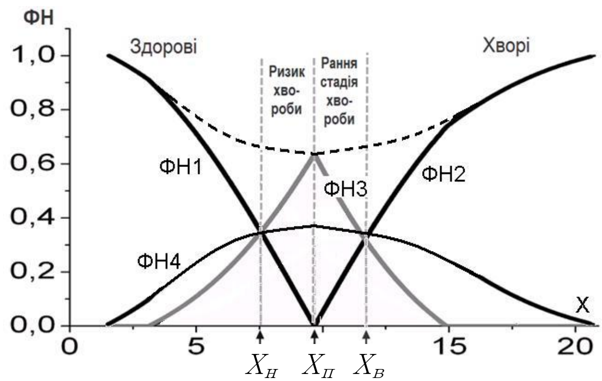
де $\gamma = F_2(X_П) = F_1(X_П)$ – значення *ФЙ* в точці перетину $X_П$ (рис. 1).



$X_Н$ $X_П$ $X_В$

Рисунок 1 – Правило для дискримінації:
1(2) – *ФЙ* навчальних груп здорових (хворих);
3(4,5) – *ФН* негативного (позитивного, проміжного) класу

Класифікація за наявності двох навчальних груп. Точність нечітких *ВП* визначається *ФН* при значенні параметра для даної особи. 4-й невизначений клас – це доповнення до універ-сальної множини. У цьому виродженому випадку йому відповідає весь інтервал значень параметра (рис. 2), а *ФН* 4-го класу описується виразом: $ФН4 = 1-(ФН1+ФН2+ФН3)$.



$X_Н$ $X_П$ $X_В$

Рисунок 2 – Правило для класифікації при 2-х навчальних групах

Дискримінація за наявності трьох навчальних груп. Поріг визначається як медіана *ФЙ* проміжної навчальної групи $X_П = Me_3$, де має місце максимум її *ФН*, тому $\gamma = F_3(Me_3) = 0$. Крім того *ФН* крайніх класів можуть бути ненульовими при значенні порогу (рис. 3).

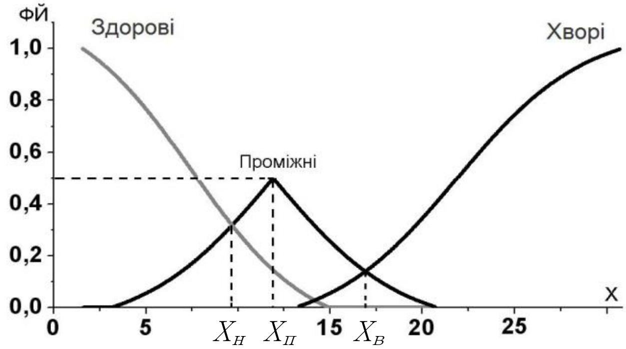


Рисунок 3 – Правило для дискримінації при 3-х навчальних групах

В доповіді дається розв'язок задач дискримінації та класифікації на 4 класи за наявності 2- та 3-х навчальних груп.

Інформаційні джерела

1. Закорчений О., Будник М., Риженко Т., Будник В. Синтез 3- та 4-значних вирішуючих правил для виявлення миготливої аритмії обтяженої ІХС / Біомедичні ІТ в охороні здоров'я (БМІТ-2008) : зб. доп. н.-техн. школи-семінару, ФМШ «Жукин», 18-21.06.2008. – К. : Ін-т кібернетики НАНУ. – С. 8–12.
2. Закорчений О. В., Будник М. М. Синтез багатозначних нечітких вирішувальних правил / Обчислювальна та прикладна математика : мат. 4-ї Міжн. конф. імені акад. І. І. Ляшка, м. Київ, 8–10 вересня 2011 р. – К. : КНУ імені Тараса Шевченка. – С. 78.

УДК 519.8

НЕКЛАСИЧЕСКАЯ ПРИКЛАДНАЯ ЛОГИКА ДЛЯ ОБЪЕКТНО-ОРИЕНТИРОВАННОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

[1] ***Д. Б. Буй,*** *профессор, д. ф.-м. н.;*
[2] ***С. В. Компан,*** *аспирант*
Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Украина
[1]*e-mail: buy@unicyb.kiev.ua*
[2]*e-mail: skompan@mail.ru*

Объектно-ориентированное программирование в настоящее время стало ведущей парадигмой программирования и потому требует создания и исследования соответствующих адекватных моделей. Доклад касается построения неклассической логики для работы с спецификациями классов, в нем изложены усиления результатов [1–2].

Введем объектную алгебраическую систему. Формально ее можно задать как $< O, K; \Omega_{obj}; \Omega_{spec}, \leq >$, где O – множество объектов классов, K – множество спецификаций классов, Ω_{obj} – множество операций над объектами, Ω_{spec} – множество операций над спецификациями классов, а бинарное отношение $\leq \subseteq K \times K$ – частичный порядок, уточняющий наследование.

Рассмотрим операцию пересечения $\cap$, которая моделирует построения родительского класса (суперкласса). Под спецификацией класса будем понимать пару $K =< s, \mu >$, где s – функциональное бинарное отношение, которое атрибуту ставит в соответствие его тип, а μ – функциональное бинарное отношение, которое методу ставит в соответствие его сигнатуру.

Операция пересечения спецификаций классов есть операция вида $\cap : K \times K \to K$, причем для значений имеем

$$< s_1, \mu_1 > \cap < s_2, \mu_2 > =< s_1 \bigcap s_2, \mu_1 \bigcap \mu_2 >,$$

где $\bigcap$ – стандартное теоретико-множественное пересечение.

Ниже $f \Big| X$ – ограничение функции f по множеству X, $domf$ – область определения функции, $\approx$ – отношение совместности функций: $f \approx g \overset{def}{\Leftrightarrow} f \mid X = g \mid X$, где $X \overset{def}{=} domf \bigcap domg$.

Лемма. Для произвольных функциональных бинарных отношений f и g выполняется равенство: $f \bigcap g = (f \bigcap g) \Big| (domf \bigcap domg)$.

В предыдущей работе одного из авторов было установлено основное свойство отношения совместности функций: $f \approx g \Leftrightarrow f \bigcup g$ – функциональное бинарное отношение. Следующие следствия леммы указывает иные интересные критерии совместности.

Следствие 1. Пусть f, g – произвольные функциональные бинарные отношения, а $X \overset{def}{=} domf \bigcap domg$. Тогда имеют место две эквивалентности:

$$f \approx g \Leftrightarrow dom(f \bigcap g) = X, \ \neg(f \approx g) \Leftrightarrow dom(f \bigcap g) \subset X.$$

Следствие 2. Пусть $X \overset{def}{=} domf \bigcap domg$; выполняются следующие утверждения.

1) $X = \varnothing \Leftrightarrow f \approx g$ и $f \bigcap g = f_{\varnothing}$.

2) $X = dom(f \bigcap g) \Leftrightarrow f \approx g$ и $f \bigcap g = f\big|X = g\big|X$.

3) $dom(f \bigcap g) \neq X \Leftrightarrow \neg(f \approx g)$ и $\left\{x \middle| x \in X \wedge f(x) \neq g(x)\right\} \neq \varnothing$.

Приведем результат о структуре частично упорядоченного множества (ч. у. м.) $\left\langle F, \subseteq \right\rangle$, где F – множество всех функциональных бинарных отношений, а $\subseteq$ – обычное теоретико-множественное включение.

Предложение 1. Ч. у. м. $\left\langle F, \subseteq \right\rangle$ есть нижняя полурешетка, при этом $\inf\left\{f, g\right\} = f \bigcap g$.

Уточним бинарную операцию объединения спецификаций классов $\cup$ на множестве спецификаций классов. Эта операция является операцией вида: $\cup : \mathrm{K} \times \mathrm{K} \rightarrow \mathrm{K}$, причем для значений имеем:

$$< s_1, \mu_1 > \cup < s_2, \mu_2 > = < s_1 \nabla s_2, \mu_1 \nabla \mu_2 >,$$

где ∇ – операция наложения, т. е. $f \nabla g \overset{def}{=} g \bigcup f\big|(domf \setminus domg)$.

Операция объединения спецификаций классов $\cup$ уточняет множественное наследование классов.

Результаты и выводы

Построенная алгебраическая система по существу является неклассической прикладной логикой. Операция пересечения играет роль конъюнкции, а операция объединения – дизъюнкции. Особенностью данной логики является бесконечность носителя и некоммутативность дизъюнкции. Операции обладают многими свойствами операций классической логики (коммутативность пересечения, ассоциативность, взаимная дистрибутивность, законы поглощения). Подчеркнем еще раз, что специфика модели дизъюнкции состоит в некоммутативности соответствующей операции и в отсутствии, вообще говоря, единицы (в отличие от классической булевой алгебры); что до «нуля» (наименьшего элемента), то им является нигде не определенная функция.

Информационные источники

1. Буй Д. Б. Операции объединения и пересечения спецификаций классов в многосортной алгебраической системе для объектно-ориентированного программирования / Д. Б. Буй, С.В. Компан // Сборник

научных трудов SWorld. Материалы международной научно-практической конференции «Современные проблемы и пути их решения в науке, транспорте, производстве и образовании'2012». – Вып. 4. Т. 3. – Одесса : КУПРИЕНКО, 2012. – ЦИТ: 412–1264 – С. 45–49.
2. Dmitriy Buy. The Concepts of Object, Class, Inheritance, Life Cycle: Formalization / Dmitriy Buy, Sergiy Kompan. // First International Workshop Critical infrastructure safety and security (CrlSS-Dessert'11), Kirovograd, Ukraine, May 11–13, 2011. – P. 235–243.

УДК 519.8

q-КОДУВАННЯ В ЗАДАЧІ ПРОГНОЗУВАННЯ ТРЕТИННОЇ СТРУКТУРИ ПРОТЕЇНУ

Л. Ф. Гуляницький, *д. т. н., зав. відділом №180*
Інститут кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України
leonhul.icyb@gmail.com;
В. О. Рудик, *аспірантка*
Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України
Vitalina.Rudyk@gmail.com

Розглядається задача прогнозування третинної структури протеїнів, яка є однією із важливих проблем обчислювальної біології [1]. Молекула білка є лінійною послідовністю амінокислотних залишків, поєднаних між собою пептидними зв'язками. Завдяки різноманітним (зокрема гідрофобним) взаємодіям білок приймає певну стабільну форму у просторі, яку називають третинною структурою молекули. Для дослідження та передбачення третинної структури білка математичними методами широко використовуються ґратчаті моделі. До них належить і найвідоміша модель проблеми – гідрофобно-полярна модель Ділла [1, 2]. В ній для подання форми молекули кожен амінокислотний залишок розташовується у вузлі певної дискретної ґратки, причому сусідні у послідовності залишки – у сусідніх вузлах, таким чином визначаючи певний шлях. Щоб таке подання відповідало суті проблеми, накладається умова відсутності самоперетинів – в кожному вузлі ґраток має розташовуватись не більш ніж один аміноксилотний залишок. Шляхи, для яких виконується ця умова, називаються допустимими структурами, інші – недопустимими.

При розв'язанні задачі прогнозування третинної структури протеїнів не завжди ефективним є подання структури через послідовність координат вузлів ґраток. Формалізувавши поняття ґратки, запропонуємо інший варіант подання структури у ній, яке назвемо q-кодуванням.

В теорії груп ґратка L в Евклідовому просторі R^n визначається як дискретна підгрупа R^n [3].

Означення 1. Ґратку можна подати як множину векторів

$$L = \{\sum_{i=1}^{m} a_i e_i \mid a_i \in Z\},$$

де $B = \{e_1, e_2, ..., e_m\} \subseteq R^n$ – деякий базис;

Z – множина цілих чисел.

Далі розглядатимемо тривимірний випадок, тобто значення $n = 3$, а елементи L будемо називати вузлами.

Означення 2. Ґратки інваріантні відносно відображення $f : R^n \to R^n$, якщо для усіх $v \in L$ виконується $f(v) \in L$.

Для визначення поняття сусідства у ґратках задамо деяке бінарне відношення сусідства $R \subseteq L \times L$.

Означення 3. Вузол $v \in L$ вважається сусіднім до вузла $u \in L$ тоді і тільки тоді, коли $(u, v) \in R$.

Сусідство в ґратках інваріантне відносно відображення $f : R^n \to R^n$, якщо ґратки інваріантні відносно f і для двох сусідніх вузлів $u, v \in L$ сусідами також будуть $f(u)$ и $f(v)$. Якщо відношення сусідства інваріантне відносно переносу на будь-який вектор $v \in L$, його можна подати через множину векторів сусідства $V = \{v_1, ..., v_s\} \subseteq L$: вузол $c_1 \in L$ буде сусіднім до вузла $c_2 \in L$ тоді і тільки тоді, коли $c_1 - c_2 \in V$.

Означення 4. Шляхом довжини m в ґратці L з сусідством R будемо називати таку послідовність $c_{(m)} = c_1 c_2 ... c_m$, що $c_i \in L,\ i = \overline{1, m}$, і $(c_i, c_{i+1}) \in R,\ i = \overline{1, m-1}$ (умова зв'язності).

Нехай □ – множина натуральних чисел.

Означення 5. Під кодуванням шляху $c_1 c_2 ... c_m$ (позначимо $Enc(c_1 c_2 ... c_m) = s_1 s_2 ... s_k$) будемо розуміти послідовність $s_1 s_2 ... s_{m+p}$,

$s_i \in S, \quad i = \overline{1, m+p}$, де S – деякий алфавіт кодування, а $p \in Z$ – фіксований параметр кодування, якщо виконуються такі умови:

1. для будь-яких $m \in N$ и $s_1, s_2, ..., s_{m+p} \in S$ існують $c_1, c_2, ..., c_m \in L$ такі, що $Enc(c_1 c_2 \ldots c_m) = s_1 s_2 \ldots s_{m+p}$;

2. з умови $Enc(c_1 c_2 \ldots c_m) = s_1 s_2 \ldots s_{m+p}$ випливає $Enc(c_1 c_2 \ldots c_m c_{m+1}) = = s_1 s_2 \ldots s_{m+p} s_{m+p+1}$.

Означення 6. Кодування інваріантне відносно відображення $f: R^n \to R^n$, якщо ґратки та відношення сусідства у них інваріантні відносно f, і для довільних $m \in N$, $c_1, c_2, ..., c_m \in L$, з умови $Enc(c_1 c_2 \ldots c_m) = s_1 s_2 \ldots s_{m+p}$ випливає, що $Enc(f(c_1) f(c_2) \ldots f(c_m)) = = s_1 s_2 \ldots s_{m+p}$

Означення 7. Кодування, що задається формулою

$$Enc_{abs}(c_1 c_2 \ldots c_m) = (c_2 - c_1)(c_3 - c_2) \ldots (c_m - c_{m-1}) \tag{1}$$

назвемо абсолютним.

Для введення поняття *q*-кодування розглянемо тривимірні ґратки L з множиною векторів сусідства V, для яких виконується наступна властивість: якщо $\bar{v} \in V$ – деякий фіксований вектор, то

$$\forall v' \in V \quad \exists q_{v'} \in \boldsymbol{H} : \; (\forall v \in V \;\; q_{v'} v q_{v'}^{-1} \in V) \wedge (q_{v'} v' q_{v'}^{-1} = \bar{v}). \tag{2}$$

Використовуючи поняття кватерніонів [4], побудуємо процедуру, яка по абсолютному кодуванню шляху буде конструювати його кодування Enc_q, яке назвемо *q*-кодуванням.

Якщо позначити $Q_V = \{Q(v) \mid v \in V\}$, то можна показати, що ґратки з описаною вище властивістю інваріантні відносно поворотів, що задаються кватерніонами $q \in Q_V$.

Зафіксуємо деякий вектор сусідства $a_0 \in V$. З умови (2) випливає, що існує функція $Q: V \to Q_V$ така, що для всіх $a \in V$ виконується рівність $Q(a) a_0 Q(a)^{-1} = a$, причому в якості $Q(a_0)$ виберемо тотожній кватерніон, тобто той, що описує нульовий поворот: $Q(a_0) = (0, (0, 0, 1))$.

Нехай задано абсолютне кодування шляху $a_1a_2...a_{m-1} = Enc_{abs}(c_1c_2...c_m)$, підраховане за формулою (1). Побудуємо *q*-кодування $r_1r_2...r_{m-2} = Enc_q(c_1c_2...c_m)$, $r_i \in Q_V$ за наступною схемою:

1) $r_0 = Q(a_1)$;

2) $r_k = Q(r_{k-1}^{-1}r_{k-2}^{-1}...r_0^{-1}a_{k+1}r_0r_1...r_{k-1}),\ k = \overline{1, m-2}$.

З наведеного алгоритму виведемо також зворотній.

Твердження 1. Якщо $a_1 = a_0$, а $a_k = r_1r_2...r_{k-1}a_0r_{k-1}^{-1}...r_2^{-1}r_1^{-1}$, $k = \overline{2, m-1}$, то *q*-кодування, що відповідає абсолютному кодуванню $a_1a_2...a_{m-1}$, дорівнює $r_1r_2...r_{m-2}$.

Основну властивість *q*-кодування сформулюємо так.

Твердження 2. Поворот шляху, що задається абсолютним кодуванням $a_1a_2...a_{m-1}$ за умови, що $a_1 = a_0$, описаний кватерніоном $q \in Q_V$, не змінює його *q*-кодування.

Висновки. Для подання шляхів у ґратках можна використовувати різні підходи. Абсолютне кодування є відносно простим із обчислювальної точки зору і розрізняє шляхи з точністю до паралельного переносу. *q*-кодування зберігає найважливішу з огляду на специфіку задачі інформацію про форму шляху, але не про його орієнтацію у просторі, завдяки цьому зможе мати переваги при використанні в алгоритмах розв’язання задач прогнозування третинної структури протеїнів [5], оскільки дозволяє звужувати досліджувану множину розв’язків, що зменшує час пошуку оптимальної структури.

Информационные источники

1. Dill K. A., Banu Ozkan S., Scott Shell M., Weikl T. R. The protein folding problem // Annual Review of Biophysics. – 2008. – 37. – P. 289–316.
2. Dill K. A. Theory for the folding and stability of globular proteins // Biochemistry. – 1985. – 24 (6). – P. 1501–1509.
3. Conway J. H., Sloane N. J. A. Sphere packings, lattices and groups. – New York : Springer-Verlag. – 1998. – 703 p.
4. Kuipers J. B. Quaternions and Rotation Sequences. – New Jersey : Princeton University Press. – 1999. – 391 p.
5. Istrail S., Lam F. Combinatorial algorithms for protein folding in lattice models: a survey of mathematical results // Commun. Inf. Syst. – 2009. – 9(4). – P. 303–345.

МЕТОДИ КОМБІНАТОРНОГО РОЗПІЗНАВАННЯ

Г. П. Донець, *д. ф.-м. н., с. н. с.*
Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України

Розглянемо типову задачу, що може мати широку інтерпретацію.

Задача 1. Нехай мається в наявності n альтернатив прийняття економічних рішень $A = \{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$, про які відомо лише те, що серед них є m прийнятних $(m < n)$. Існує механізм, який для фіксованого k $(k \leq m)$ дозволяє визначити, чи існує серед альтернатив довільної k – вибірки хоча б одна неприйнятна. Необхідно за мінімальну кількість k - вибірок знайти k прийнятних альтернатив.

Поняття механізму, що дозволяє одержати відповідь на експеримент, можна трактувати в самому широкому розумінні слова. Наведемо кілька прикладів.

Приклад 1. Нехай n вимикачів незалежно приєднано до однієї лампочки. Відомо, що серед них m зіпсованих. Експеримент складається в одночасному включенні k вимикачів ($1 < k \leq m$). Якщо серед них хоча б один справний, то лампочка запалюється. Необхідно за мінімальну кількість спроб знайти k несправних вимикачів.

Багато задач про монети, серед яких зустрічаються фальшиві, можна звести до задачі 1, при цьому відповіддю на різні експерименти є результат зважування на двочасткових вагах визначених комбінацій монет.

Задача 1 може мати конкретне трактування серед різних фірм комерційного характеру типу банків, страхових компаній, що продають облігації, влаштовують лотереї і т. д. Щоб не збанкрутувати, вони повинні уміти вирішувати наступну задачу.

Приклад 2. Задача про лотерею. Нехай задана множина натуральних чисел $N_n = \{1, 2, \cdots, n\}$... З неї випадковим чином вибирається підмножина виграшних чисел $M = \{i_1, i_2, \cdots, i_m\} (m<n)$... Експеримент полягає у виборі k чисел $(k \leq m)$ з N_n. Треба знайти мінімальну кількість таких k-*вибірок*, щоб хоча б одна з них належала M.

Знаючи розв'язок цієї задачі, будь-який підприємець зможе себе застрахувати від неприємних несподіванок. Приклад 1 допоможе нам сформулювати задачу 1 у новій математичній постановці.

Задача комбінаторного розпізнавання (ЗКР). Нехай задана множина з n чисел $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$, яка складається з m одиниць і $n - m$ нулів. Експеримент полягає у виборі фіксованої кількості k $(k \leq m)$

чисел, після чого стає відомим їхній добуток. Необхідно за мінімальну кількість спроб знайти k чисел, рівних 1.

Зміст останнього речення у постановці цієї задачі дає нам не меншу підставу називати її також задачею комбінаторного пошуку. Тут єдиним обмеженням є фіксований обсяг вибірки. Можна ускладнювати умови задачі кількістю заданих множин, способом (черговістю) вибірок елементів з них і т. д. Можна назвати всі задачі такого роду обмеженими ЗКР.

Стратегія оптимального розв'язування обмежених ЗКР складається в такому розбитті вихідної множини чисел на групи, щоб потім, провівши експерименти за допомогою k – вибірок у кожній з них, знайти необхідну кількість визначених чисел.

Таким чином, розв'язок задачі має вигляд деякого розбиття вихідної множини чисел.

На відміну від розглянутих задач існує досить могутній клас задач, що умовно можна назвати необмеженими ЗКР. Наведемо їхню формальна постановку.

Задача комбінаторного розпізнавання (необмежена). Нехай задана множина з n чисел $X=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$, яка складається з m одиниць і $n - m$ нулів. Експеримент полягає у виборі довільної кількості k $(k \leq m)$ чисел, після чого стає відомим їхній добуток. Необхідно за мінімальну кількість спроб знайти всі числа, рівні 0 (або, що те ж саме, рівні 1).

Будемо розглядати обмежену задачу 1.

Позначимо мінімальну кількість спроб, за яку необхідно знайти k несправних вимикачів, – $F_m^k(n)$. В подальшому будемо розглядати задачу 1 тільки в такій постановці. Розглянемо приклад 1 для таких значень: $n = 9$, $m = 4$, $k = 2$.

Найпростішим розв'язком є такий: пробуємо всі комбінації з двох вимикачів, поки не натрапимо на два зіпсованих – і тоді лампочка не засвітиться. Всього таких комбінацій $C_9^2 = 36$, серед них $C_4^2 = 6$ комбінацій з зіпсованими вимикачами. Отже в найгіршому випадку через 31 спробу ми розв'яжемо задачу. Більш вдалий розв'язок отримаємо, коли 9 вимикачів розіб'ємо на дві групи (5 + 4). Тоді в якійсь групі буде не менш двох зіпсованих вимикачів і, комбінуючи по два вимикачі у кожній групі, отримаємо розв'язок задачі. Щоб отримати оцінку кількості спроб, треба розглянути всі варіанти розбиття чотирьох зіпсованих вимикачів на дві групи. Якщо в групі з p вимикачів q зіпсованих ($q \geq 2$), то кількість спроб дорівнює $C_p^2 - C_q^2 + 1$. Тоді серед розбиттів (0,4), (1,3), (2,2), (3,1) та (4,0) найгірший випадок (1,3), або (3,1) дає 14 спроб. Можна розбити 9 вимикачів на чотири групи $(3 + 2 + 2 + 2)$. Спочатку зробимо $C_3^2 + C_2^2 + C_2^2 + C_2^2 = 6$ спроб, Якщо лампочка засвітиться кожний раз, то це може бути тільки тоді, коли в кожній групі буде по одному зіпсованому вимикачу.

Беремо дві групи по 2 вимикача і комбінуємо з них 2, по одному з кожної групи. Це вимагає 4 спроби, а в сумі розв’язок отримаємо за 10 спроб. Але існує ще один розв’язок коли 9 вимикачів розбиваємо на три групи $(3 + 3 + 3)$. Тоді обов’язково знайдеться група, в якій не менш двох зіпсованих вимикачів. Кількість спроб тепер становить $C_3^2 + C_3^2 + C_3^2 = 9$, що і буде оптимальним розв’язком, іншими словами $F_4^2(9) = 9$.

Очевидно, що $F_m^m(n) = C_n^m$, тому що набір з одиниць єдиний і для його знаходження в найгіршому випадку потрібно перебрати всі комбінації. Для $k = 2$ вже є досвід розв’язування задачі [1]. При цьому був знайдений принцип, за яким краще всього треба розбивати всю множину чисел на групи.

Принцип оптимальності: для $k = 2$ необхідно всю множину чисел розбити на стільки груп, щоб хоча в одній з них було не менш двох одиниць.

Звідси витікає, що число груп повинно бути $m - 1$.

Позначимо $\lambda \equiv n \,(mod\, m - 1)$.

Лема 1.

$$F_3^2(n) = \frac{n(n-2) + \lambda}{4}. \tag{1}$$

Нехай $\lambda \equiv n \equiv 0 \,(mod\ 2)$. Тоді n розбивається на дві однакові групи з $n / 2$ чисел, i

$$F_3^2(n) = C_{n/2}^2 + C_{n/2}^2 = 2 \cdot \frac{n / 2(n / 2 - 1)}{2} = \frac{n(n-2)}{4}.$$

Якщо $\lambda \equiv 1(mod\ 2)$, то n розбивається на два різних числа $\frac{n+1}{2}$ та $\frac{n-1}{2}$.

Тоді $F_3^2(n) = C^2_{\frac{n+1}{2}} + C^2_{\frac{n-1}{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{2}\cdot\frac{n-1}{2} + \frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-3}{2}\right) = \left(\frac{n-1}{2}\right)^2$.

Можна записати загальну формулу

$$F_3^2(n) = \frac{(n-\lambda)(n-2+\lambda)}{4} = \frac{n(n-2)+2\lambda-\lambda^2}{4}.$$

Враховуючи те, що $\lambda^2 \equiv \lambda(mod\,2)$, отримаємо формулу (1).

Лема 2. При поділу n на $m-1$ груп отримаємо розбиття:

$$n = (m-1-\lambda)\left(\frac{n-\lambda}{m-1}\right) + \lambda\left(\frac{n-\lambda}{m-1}+1\right) \tag{2}$$

При діленні числа n на q отримаємо залишок $n(mod\ q)$. Отож $n = q\left\lfloor\frac{n}{q}\right\rfloor + n(mod\,q)$.

Запишемо $q = [q - n\,(\mathrm{mod}\ q)] + n\,(\mathrm{mod}\ q)$, звідки

$$n = \left[q - n(mod\,q)\right]\left[\frac{n}{q}\right] + n(mod\,q)\left(\left[\frac{n}{q}\right]+1\right).$$

Підставляючи сюди $q = m-1$ та $\left[\frac{n}{m-1}\right] = \frac{n-\lambda}{m-1}$, отримаємо шукану формулу (2).

Звідси легко вивести загальну формулу

$$n = \sum_{i=0}^{q-1}\left[\frac{n+i}{q}\right]. \tag{3}$$

Теорема 1.

$$F_m^2(n) = \frac{(n-\lambda)(n+\lambda-m+1)}{2(m-1)} \tag{4}$$

Скористаємося результатами леми 2 при розбитті множини чисел на $m-1$ груп.

$$F_m^2(n) = (m-1-\lambda)C^2_{\frac{n-\lambda}{m-1}} + \lambda C^2_{\frac{n-\lambda}{2}+1} =$$

$$= \frac{m-1-\lambda}{2}\left(\frac{n-\lambda}{m-1}\right)\left(\frac{n-\lambda}{m-1}-1\right) + \frac{\lambda}{2}\left(\frac{n-\lambda}{m-\lambda}+1\right)\left(\frac{n-\lambda}{m-1}\right)$$

Після скорочень отримаємо формулу (4).

Теорема 2.

$$F_{2r+1}^{3}(n)=\frac{1}{6r^{2}}(n-\lambda)(n-\lambda-r)(n-2r+2\lambda),\quad (r\geq 1) \tag{5}$$

Для $k = 3$ знаходити отриманий розв'язок будемо користуючись принципом оптимальності. Треба розбити n на r приблизно рівних груп, тоді хоча б в одній з них буде не менш трьох одиниць. При цьому необхідно, щоб кожна група мала об'єм не менший трьох. Тому з (3) випливає

$$F_{2r+1}^{3}(n)=\sum_{i=0}^{r-1}C_{\left[\frac{n+i}{r}\right]}^{3}\,. \tag{6}$$

Якщо скористатись параметром $\lambda\equiv n(\mathrm{mod}\ r)$, то групи будуть складатись з $r-\lambda$ чисел по $\frac{n-\lambda}{r}$ і λ чисел по $\frac{n-\lambda}{r}+1$.

Тому

$$F_{2r+1}^{3}(n)=(r-\lambda)C_{\frac{n-\lambda}{r}}^{3}+\lambda C_{\frac{n-\lambda}{r}+1}^{3}=\left(\frac{r-\lambda}{6}\right)\left(\frac{n-\lambda}{r}\right)\left(\frac{n-\lambda}{r}-1\right)\left(\frac{n-\lambda}{r}-2\right)+ \\ +\frac{\lambda}{6}\left(\frac{n-\lambda}{r}+1\right)\left(\frac{n-\lambda}{r}\right)\left(\frac{n-\lambda}{r}-1\right) \tag{7}$$

Спрощуючи цей вираз, одержимо формулу (6).

Приклад 3. Нехай $n = 73,\ m = 11$. Тоді $r = 5$, а $\lambda=3$.

По формулі (7) при розбитті числа 73 на 5 груп (14, 14, 15, 15, 15) отримаємо

$$F_{11}^{3}(73)=2C_{15}^{3}+3C_{14}^{3}=2\cdot 364+3\cdot 455=2093\,.$$

А по формулі (5.5) відповідно

$$F_{11}^{3}(73)=\frac{1}{6\cdot 25}(73-3)(73-3-5)(73-10+6)=\frac{70\cdot 65\cdot 69}{150}=2093\,.$$

Задача 1 може породити більш складну задачу, яка пригодиться для подальших викладень.

Задача 3. Задані множини чисел $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_{n_1}\}$ та $Y = \{y_1, y_2,\ldots y_{n_2}\}$, причому в першій множині міститься m_1 одиниць ($m_1 \leq n_1$), а в другій – m_2 одиниць ($m_2 \leq n_2$). Експеримент полягає у виборі k

($k \ge 1$) чисел з будь-яких множин ($k \le m_1 + m_2$), після чого стає відомим їх добуток. Необхідно за мінімальну кількість спроб знайти k чисел, які дорівнюють 1.

Позначимо цю кількість $F^{k}_{m_1,m_2}\left(n_1, n_2\right)$. В загальному вигляді цю задачу ще не розв'язано. Розглянемо її частинний випадок для $k = 3$, $m_1 = m_2 = 2$. Нам необхідно знайти $F^{3}_{2,2}\left(n_1, n_2\right)$. Очевидно, що всі комбінації по три повинні складатися з чисел із різних множин: одне число з одної множини, а два – з другої. Ми можемо перебрати в одній множині всі комбінації по два числа і по черзі приєднувати числа з другої множини. В кінці кінців ми натрапимо на одну комбінацію з двох одиниць, а в другій натрапимо на одиницю після $n_2 - 1$ спроб. Це дає оцінку $F^{3}_{2,2}\left(n_1, n_2\right) \le C^{2}_{n_1}(n_2 - 1)$. Очевидно, що комбінувати по два числа треба в множині з меншою кількістю чисел, так як з $n_2 \ge n_1$ випливає

$$C^{2}_{n_2}(n_1 - 1) \ge C^{2}_{n_1}(n_2 - 1).$$

Але така стратегія в загальному вигляді не є оптимальною. Як показано в [2], оптимальною є покрокова стратегія, а саме.

1. Якщо $n_2 \ge n_1$, то беремо всі комбінації по два з множини X і один елемент з множини Y, наприклад, y_1. Якщо добуток трьох чисел хоч один раз буде дорівнювати 1, то задача розв'язана, в противному разі $y_1 = 0$. Вилучаємо y_1 з множини Y, тепер її об'єм став рівний $n_2 - 1$.

2. Нехай $s = min\ (n_1,\ n_2)$. За $\left|n_2 - n_1\right| C^{2}_{s}$ спроб ми досягнемо ситуації, коли об'єм більшої множини зменшиться до рівня меншої множини, і треба знайти $F^{3}_{2,2}\left(s, s\right)$. Тепер ситуація симетрична і можна комбінувати в будь-якій множині. За C^{2}_{s} спроб ми перейдемо до ситуації з об'ємами множин ($s,\ s - 1$). Тепер, комбінуючи по два у меншій множині, за C^{2}_{s-1} спроб перейдемо до ситуації з об'ємами множин ($s - 1,\ s - 1$).

3. На i – му кроці ($3 \le i \le s$) за допомогою $C^{2}_{i} + C^{2}_{i-1}$ спроб ми переходимо до об'ємів множин ($i - 1,\ i - 1$). Якщо добуток трьох чисел в будь-який момент буде дорівнювати 1, то задача розв'язана, інакше продовжуємо спроби.

4. В найгіршому випадку в кінці кінців дійдемо до ситуації, коли залишаться дві множини $X_1 = Y_1 = (1,1)$. Тепер можна брати довільні 3 елементи з них, які є розв'язком задачі. Підрахуємо кількість спроб для найгіршого випадку, починаючи з об'ємів множин $(s,\ s)$.

$$(C_s^2 + C_{s-1}^2) + (C_{s-1}^2 + C_{s-2}^2) + \ldots\ldots (C_3^2 + C_2^2) =$$

$$C_s^2 + 2\sum_{i=3}^{s-1} C_i^2 + C_2^2 = C_s^2 + 2C_s^3 - 1.$$

Тим самим доведена

Лема 3.

$$F_{2,2}^3\left(n_1, n_2\right) = (\left|n_2 - n_1\right| - 1)C_s^2 + 2C_s^3 - 1, \qquad (8)$$

де $s = \min(n_1,\ n_2)$.

Зокрема, $F_{2,2}^3\left(s, s\right) = \dfrac{s\left(s-1\right)\left(2s-1\right)}{6} - 1.$

Тепер розглянемо задачу для випадку, коли $m = 2r$, тобто не обхідно знайти $F_{2r}^3(n)$. Можливі дві стратегії: розбивати n на r груп, або на $r - 1$ груп.

Розглянемо першу стратегію, яку оцінимо як F_1. Позначимо $\left[\dfrac{n}{r}\right] = \alpha$, $\lambda_1 \equiv n\left(mod\, r\right) = n - \alpha r$. Тоді число n розбивається на $r - \lambda_1$ груп по α чисел в кожній та λ_1 груп по $\alpha + 1$ чисел в кожній. По (7) необхідно зробити $(r - \lambda_1)C_\alpha^3 + \lambda_1 C_{\alpha+1}^3$ спроб. В найгіршому випадку цього не досить, бо може виникнути ситуація, коли кожна група має рівно по дві одиниці. Тоді треба скористуватися формулою (8) і зробити ще $F_{2,2}^3\left(\alpha, \alpha\right)$ спроб, якщо $\lambda \neq r - 1$, або $F_{2,2}^3\left(\alpha, \alpha+1\right)$ для $\lambda = r - 1$. Разом це дає

$$F_1 = \left(r - \lambda_1\right)\frac{\alpha\left(\alpha-1\right)\left(\alpha-2\right)}{6} + \lambda_1 \frac{\alpha\left(\alpha-1\right)\left(\alpha-2\right)}{6} +$$

$$+ \frac{\alpha\left(\alpha-1\right)}{2}\left[2 - sgn(r - 1 - \lambda_1)\right] + \frac{\alpha\left(\alpha-1\right)\left(\alpha-2\right)}{6} - 1.$$

Після перетворень отримаємо

$$F_1 = \frac{\alpha\left(\alpha-1\right)}{6}[r\alpha - 2r + 3\lambda_1 + 2\alpha - 3\,sgn\left(r-1-\lambda_1\right)+2].$$

Тепер підставимо вираз для λ_1 і остаточно маємо

$$F_1 = \frac{\alpha\left(\alpha - 1\right)}{6}\left[3\left(n - sgn(r-1-\lambda_1)\right) - 2\left(\alpha + 1\right)\left(r - 1\right)\right] - 1. \quad (9)$$

Оцінимо другу стратегію як F_2. Позначимо

$$\left[\frac{n}{r-1}\right] = \beta,\ \lambda_2 \equiv n\left(mod\, r - 1\right) = n - \left(r - 1\right)\beta.$$

Тоді число n розбивається на $r - 1 - \lambda_2$ груп по β чисел в кожній та λ_2 груп по $\beta + 1$ чисел в кожній. Але на відміну від першої стратегії тут якщо після перевірки $r - 2$ груп не досягнемо розв'язку, то це означає, що в ($r - 1$)-й групі знаходяться не менше чотирьох одиниць. Якщо в цій групі чотири числа, то всі вони дорівнюють одиниці, тобто для розв'язку достатньо з цієї групи взяти будь-які 3 одиниці. Якщо група містить більше чотирьох чисел, то треба розбити її на дві частини. В залежності від величини останньої групи отримаємо дві оцінки другої стратегії. Якщо $\lambda_2 = 0$, то всі групи мають по β чисел, в противному разі остання група має $\beta + 1$ чисел. Це означає, що

$$F_2 = \left(r - 1 - \lambda_2\right)C_\beta^3 + (\lambda_2 - 1)C_{\beta+1}^3 + F_4^3(\beta+1) \quad \text{для } \lambda_2 > 0; \quad (10)$$

$$F_2 = (r-2)C_\beta^3 + F_4^3(\beta) \quad \text{для } \lambda_2 = 0.$$

Розбиваючи останню групу на дві, можемо скористатися формулами (3) та (8). В першому випадку отримаємо розбиття групи на дві компоненти $\left(\left[\frac{\beta+1}{2}\right], \beta+1-\left[\frac{\beta+1}{2}\right]\right)$, в другому випадку, враховуючи формулу (3), на такі $\left(\left[\frac{\beta}{2}\right], \beta - \left[\frac{\beta}{2}\right]\right) = \left(\beta - \left[\frac{\beta+1}{2}\right], \left[\frac{\beta}{2}\right]\right)$.

Позначимо $\left[\frac{\beta + 1}{2}\right] = \gamma$. Для перевірки необхідно зробити в першому випадку $C_\gamma^3 + C_{\beta+1-\gamma}^3$ спроб, а в найгіршому випадку ще $F_{2,2}^3(\gamma, \beta+1-\gamma)$.

Враховуючи вираз для λ_2, після перетворень першої формули отримаємо остаточний вигляд

$$F_2 = \frac{\beta(\beta-1)}{6}[3n-(\beta+1)(2r-1)+C^3_{\left[\frac{\beta}{2}\right]+1}+\left[\frac{\beta}{2}\right]C^2_{\left[\frac{\beta+1}{2}\right]}-1$$

для $\lambda_2 > 0.$ (11)

Для другого випадку необхідно спочатку зробити $C^3_{\beta-\gamma}+C^3_{\gamma}$ перевірок, а потім ще $F^3_{2,2}(\beta-\gamma,\ \gamma)$ спроб. У результаті перетворень остаточно отримаємо

$$F_2 = \frac{\beta(\beta-1)(\beta-2)}{6}(r-2)+C_{\left[\frac{\beta+1}{2}\right]}+\left[\frac{\beta-1}{2}\right]C_{\left[\frac{\beta+1}{2}\right]}-1$$

для $\lambda_2 = 0.$ (12)

Переконаємось на прикладах про справедливість отриманих формул.

Информационные источники

1. В. І. Білецький, Г. П. Донець, Е. І. Ненахов. Комбинаторне розпізнавання. Задачі та їх розв’язування // Теория оптимальных решений. – К. : Ин-т кибернетики имени В. М. Глушкова НАН Украины, 2012. – С. 21–29.
2. Г. А. Донец, С. Т. Кузнецов. Об одной комбинаторной задаче погического типа // Теория оптимальных решений. – К. : Ин-т кибернетики имени В. М. Глушкова НАН Украины, 2012. – С. 101–108.

УДК 519.8

О СЛАБОЙ РАЗРЕШИМОСТИ И СЛАБОЙ ДОПУСТИМОСТИ НЕЧЕТКИХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

О. А. Емец, *д. ф.-м. н., профессор;*
А. О. Емец, *к. ф.-м. н., доцент*
ВУЗ Укоопсоюза «Полтавский университет экономики и торговли»
yemetsli@mail.ru, yemets2008@ukr.net

Во многих задачах возникает необходимость представления данных в интервальном в виде и с помощью нечетких чисел одновременно. В [1] изложен аппарат, связывающий интервалы и нечеткие числа.

В докладе исследуются свойства этого аппарата.

Определение 1. Под *нечеткой линейной системой уравнений*

$$A^f x = b^f \tag{1}$$

будем понимать совокупность пяти интервальных линейных систем [2]

$$\left[\begin{array}{l} I_A^4 x = I_b^4; \\ I_A^3 x = I_b^3; \\ I_A^2 x = I_b^2; \\ I_A^1 x = I_b^1; \\ I_A^0 x = I_b^0. \end{array}\right. . \tag{2}$$

Определение 2 [2]. Под *интервальной линейной системой* уравнений

$$I_A x = I_b \tag{3}$$

понимают семейство всех систем линейных уравнений

$$Ax = b, \tag{4}$$

где

$$A \in I_A;\ b \in I_b. \tag{5}$$

Определение 3. Система линейных уравнений (4) называется *разрешимой*, если она имеет некоторое решение, и *допустимой*, если она имеет неотрицательное решение.

Определение 4. [2] Система уравнений (3) называется *слабо разрешимой (допустимой)*, если какая-либо из систем (4) с данными (5) разрешима (допустима). Система уравнений (3) называется *сильно разрешимой (допустимой)*, если каждая система (4) с данными (5) разрешима (допустима).

Поставим в соответствие системе уравнений $I_A^t = I_b^t$ с номером t $\forall t = 0, 1, 2, 3, 4$ семейство систем уравнений вида (4) с номером t с данными (5) соответственно:

$$A^t x = b^t, \tag{6}$$

$$A^t \in I_A^t;\ b^t \in I_b^t. \tag{7}$$

Определение 5. Нечеткая система уравнений (1) называется *слабо разрешимой (допустимой)* в четком смысле, если какая-либо из систем (6) с данными (7) при $t = 4$

$$A^4 x = b^4 \tag{8}$$

разрешима (допустима). Нечеткая система уравнений (1) называется *сильно разрешимой (допустимой) в четком смысле*, если каждая система (8) с данными (7) при $t = 4$ разрешима (допустима).

Определение 6. Нечеткая система уравнений (1) называется *слабо разрешимой (допустимой) в квазичетком смысле*, если при $t = 3$ какая-либо из систем (6) с данными (7)

$$A^3 x = b^3 \tag{9}$$

разрешима (допустима). Нечеткая система уравнений (1) называется *сильно разрешимой (допустимой)* в *квазичетком смысле*, если каждая система (9) с данными (7) при $t = 3$ разрешима (допустима).

Определение 7. Нечеткая система уравнений (1) называется *слабо разрешимой (допустимой) в получетком (в полунечетком) смысле*, если при $t = 2$ какая-либо система из систем (6) с данными из (7)

$$A^2 x = b^2 \tag{10}$$

разрешима (допустима). Нечеткая система уравнений (1) называется *сильно разрешимой (допустимой)* в *получетком (в полунечетком) смысле*, если каждая система (10) с данными (7) при $t = 2$ разрешима (допустима).

Определение 8. Нечеткая система уравнений (1) называется *слабо разрешимой (допустимой) в квазинечетком смысле*, если при $t = 1$ какая-либо система из систем (6) с данными из (7)

$$A^1 x = b^1 \tag{11}$$

разрешима (допустима). Нечеткая система уравнений (11) называется *сильно разрешимой (допустимой)* в *квазинечетком смысле*, если каждая система (11) с данными (7) при $t = 1$ разрешима (допустима).

Определение 9. Нечеткая система уравнений (1) называется *слабо разрешимой (допустимой) в нечетком смысле*, если при $t = 0$ какая-либо система из систем (6) с данными из (7)

$$A^0 x = b^0 . \tag{12}$$

разрешима (допустима). Нечеткая система уравнений (1) называется *сильно разрешимой (допустимой)* в *нечетком смысле*, если каждая система (12) с данными (7) при $t = 0$ разрешима (допустима).

Введение определений 3–9 объясняется следующим. Пусть необходимо определить является ли разрешимой некоторая система уравнений

$$A_0 x = b_0,\ A_0 \in R^{m\times n};\ x \in R^n;\ b_0 \in R^m, \tag{13}$$
но о данных этой системы известно только, что
$$A_0 \in A^f,\ b_0 \in b^f.$$

Тогда, очевидно, что система уравнений (13) разрешима, если система уравнений (1) сильно разрешима в четком смысле. Система уравнений (13) не разрешима, если известно, что система уравнений (1) не является слабо разрешимой в нечетком смысле. В других ситуациях она сильно или слабо разрешима с разной степенью нечеткости.

Вектор $x \in R^n$ называется [2] слабым решением интервальной системы уравнений (3), если он удовлетворяет системе уравнений (4) для некоторых A и b, удовлетворяющих условию (5).

Определение 10. Вектор $x^t \in R^n$ называется *слабым решением типа* t ($t = 0, 1, 2, 3, 4$) нечеткой линейной системы уравнений $A^f x = b^f$ (1), если он является слабым решением в смысле [2] системы уравнений $I_A^t x = I_b^t$ вида (3).

Свойства нечетких матриц и нечетких систем вида (1)–(2) дает следующее утверждение.

Теорема 1. Имеют место включения:
$$I_A^t \supset I_A^{t+1}\ \ \forall t = 0,1,2,3.$$
$$I_b^t \supset I_b^{t+1}\ \ \forall t = 0,1,2,3.$$

Следствие из теоремы 1. Для $\Delta^t = \dfrac{1}{2}(\overline{A}^t - \underline{A}^t)$ – матрицы радиусов интервальной матрицы I_A^t и $\delta^t = \dfrac{1}{2}(\overline{b}^t - \underline{b}^t)$ – вектора радиусов интервального вектора I_b^t, где I_A^t, I_b^t вводятся согласно определения нечеткой матрицы (см. [1]) и определения 1, имеют место неравенства:
$$\Delta^{t+1} < \Delta^t,\ \delta^{t+1} < \delta^t,\ t = 0,1,2,3.$$

Теорема 2. Вектор $x^t \in R^n$ есть слабым решением типа t ($t = 0,1,2,3,4$) нечеткой линейной системы уравнений $A^f x = b^f$ (1) тогда и только тогда, когда он удовлетворяет неравенству
$$|\, A_c^t x^t - b_c^t \,| \le \Delta^t \,|\, x^t \,| + \delta^t, \tag{14}$$

где $A_c^t = \frac{1}{2}(\underline{A}^t + \overline{A}^t)$ – средняя матрица интервальной матрицы I_A^t;

$\Delta^t = \frac{1}{2}(\overline{A}^t - \underline{A}^t)$ – матрица радиусов интервальной матрицы I_A^t;

$b_c^t = \frac{1}{2}(\underline{b}^t + \overline{b}^t)$ – средний вектор интервального вектора I_b^t;

$\delta^t = \frac{1}{2}(\overline{b}^t - \underline{b}^t)$ – вектор радиусов интервального вектора I_b^t.

Теорема 3. Если вектор $x^t \in R^n$ является слабым решением типа t, $(t = 1, 2, 3, 4)$ нечеткой линейной системы уравнений $A^f x = b^f$ (1), то он является слабым решением типа $t-1$ этой системы.

Следствие 1 из теоремы 3. Если при $t = 0, 1, 2, 3, 4$ вектор $x^t \in R^n$ удовлетворяет неравенству (14) при выполнении условий теоремы 3, то он удовлетворяет и неравенству

$$| A_c^{t-1} x^t - b_c^{t-1} | \leq \Delta^{t-1} | x^t | + \delta^{t-1},$$

где обозначения взяты из условия теоремы 3.

Следствие 2 из теоремы 3. Если вектор $x^t \in R^n$ – слабое решение типа t нечеткой системы уравнений $A^f x = b^f$ вида (1), то он является слабым решением типов $t-1, \ldots, 1, 0$.

Замечание 1. Максимальный тип t_{max} слабого решения $x^t = (x_1^t, \ldots, x_n^t)$ нечеткой линейной системы вида (1) определяет ограничение на значения функции принадлежности элементов этого решения. Очевидно, что $\forall i = \overline{1, n}$ $\mu^t = \mu(x_i^t) \geq \frac{t_{max}}{4}$, т. е. $\mu(x_i^t) \in \left\{ \frac{t_{max}}{4}, \frac{t_{max}}{4} + \frac{1}{4}, \ldots, 1 \right\}$.

Замечание 2. Отметим, что слабое решение системы (1): типа 4 – это слабое решение в четком смысле; типа 3 – в квазичетком смысле; типа 2 – в получетком (или, что тоже самое – в полунечетком) смысле; типа 1 – в квазинечетком смысле; типа 0 – в нечетком смысле.

Введем в рассмотрение вектор $y \in R^m$, координаты которого определим так:

$$y^i = \frac{(A_c^t x^t - b_c^t)_i}{(\Delta^t | x^t | + \delta^t)_i}, \text{ при } (\Delta^t | x^t | + \delta^t)_i > 0,$$

$$i = \{1, 2, ..., m\}; \tag{15}$$

$$y^i = 1, \text{ при } (\Delta^t \mid x^t \mid + \delta^t)_i = 0, \; i = \{1, 2, ..., m\}. \tag{16}$$

Определим $\forall x \in R^m$ вектор $sgn\ x$, i-ая координата, ($i = 1, 2, ..., m$), которого такова:

$$(sgn\ x)_i = \begin{cases} 1, & x_i \geq 0; \\ -1, & x_i < 0. \end{cases}$$

Обозначим D_y для вектора $y \in R^m$ квадратную матрицу из $R^{m \times n}$, в которой его элементы стоят на главной диагонали, а все остальные – нулевые, т. е.

$$D_y = diag(y_1, ..., y_m) = \begin{pmatrix} y_1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & y_2 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & y_{m-1} & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & y_m \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что $\forall x \in R^m$ имеет место представление:

$$| x | = D_z x,$$

где

$$z = sgn\ x, \tag{17}$$

поскольку для произвольного $z \in R^m$ имеем $D_z x = (z_1 x_1, z_2 x_2, ..., z_m x_m)^T$, здесь и далее T – символ транспонирования.

Теорема 4. Если вектор x^t – решение неравенства (14), то он удовлетворяет равенству

$$(A_c^t - D_y \Delta D_z) x^t = b_c^t + D_y \delta^t,$$

где вектор y определяется условием (15), (16) а z – (17) при $x = x^t$.

Теорема 5. Нечеткая линейная система $A^f x = b^f$ вида (3) тогда и только тогда является слабо разрешимой:

1) в четком смысле, когда система $A_{ez}^4 x \leq \bar{b}^4$; $-A_{-ez}^4 x \leq -\underline{b}^4$ разрешима для некоторого $z \in Y_n$;

2) в квазичетком смысле, когда система $A_{ez}^3 x \leq \bar{b}^3$; $-A_{-ez}^3 x \leq -\underline{b}^3$ разрешима для некоторого $z \in Y_n$;

3) в получетком (полунечетком) смысле, когда система $A^2_{ez}x \le \bar{b}^2$; $-A^2_{-ez}x \le -\underline{b}^2$ разрешима для некоторого $z \in Y_n$;

4) в квазинечетком смысле, когда система $A^1_{ez}x \le \bar{b}^1$; $-A^1_{-ez}x \le -\underline{b}^1$ разрешима для некоторого $z \in Y_n$;

5) в нечетком смысле, когда система $A^0_{ez}x \le \bar{b}^0$; $-A^0_{-ez}x \le -\underline{b}^0$ разрешима для некоторого $z \in Y_n$;

Слабая разрешимость в четком ($t = 4$), квазичетком ($t = 3$), получетком ($t = 2$), квазинечетком ($t = 1$) и нечетком ($t = 0$) смыслах системы (1) согласно определений 5–10 означает существование некоторого слабого решения типа t нечеткой линейной системы уравнений $A^f x = b^f$.

Поэтому с учетом теоремы 5 справедливо следующее.

Следствие из теоремы 5. Если нечеткая система $A^f x = b^f$ вида (3) является: 1) слабо разрешимой в четком смысле, то она слабо разрешима в квазичетком смысле; 2) слабо разрешимой в квазичетком смысле, то она слабо разрешима в получетком (полунечетком) смысле; 3) слабо разрешимой в получетком смысле, то она слабо разрешима в квазинечетком смысле; 4) слабо разрешимой в квазинечетком смысле, то она слабо разрешима в нечетком смысле.

То есть, слаборазрешимость является свойством вложенности: из слаборазрешимости при большем t следует ее справедливость и при всех меньших t.

Утверждение 6. Проверка слабой разрешимости нечеткой линейной системы уравнений $A^f x = b^f$ вида (1) в любом из 5 смыслах (четком, квазичетком, получетком, квазинечетком, нечетком) является NP-трудной задачей.

Справедливость утверждения следует из того, что проверка слабой разрешимости нечеткой системы (1) – это проверка на слабую разрешимость соответствующей интервальной линейной системы, что в соответствии с [2, теорема 2.12] есть NP-трудной задачей.

О допустимости нечетких линейных систем уравнений

Для характеризации слабой допустимости (в соответствующем смысле $t \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$) нечеткой системы уравнений вида (1) воспользуемся теоремой 2.

Теорема 7. Нечеткая система уравнений $A^f x = b^f$ вида (1) является слабо допустимой (в соответствующем параметре $t \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ смысле) тогда и только тогда, когда допустима система

$$\underline{A}^t x \le \overline{b}^t ,$$
$$-\overline{A}^t x \le -\underline{b}^t .$$

Утверждение 8. Проверка слабой допустимости нечеткой линейной системы (1) в любом из пяти (соответствующих разным $t \in \{ 0, 1, 2, 3, 4 \}$ смыслах) может быть выполнена с полиномиальными затратами времени.

Замечание 3. Результаты работы обобщаются, при необходимости, на случай рассмотрения более, чем пяти α-уровней [3-4] нечеткого числа.

Замечание 4. Если пик нечеткого числа [1] достигается не в одной точке a_M на отрезке $[\underline{a}_4, \overline{a}_4]$, то результаты роботы обобщаются и на этот случай.

В докладе введены понятия слабой и сильной разрешимости (допустимости) нечеткой линейной системы уравнений в пяти смыслах (четком, квазичетком, получетком, квазинечетком и нечетком). Обоснованы критерии слабой разрешимости и слабой допустимости нечеткой системы уравнений во всех пяти смыслах. Доказаны другие свойства нечетких систем и их слабых решений (во всех пяти смыслах).

Далее целесообразно изучить сильную разрешимости и сильную допустимость нечеткой линейной системы уравнений.

Информационные источники

1. Емец О. А. Представление нечетких систем линейных уравнений через интервальные системы линейных уравнений / О. А. Емец, А. О. Емец // Материалы IV Всеукраинской научно-практической конференции «Информатика и системные науки» (Полтава, 21–23 марта 2013 г.) / под ред. О. А. Емца: тезисы докл. – Полтава : ПУЕТ, 2013. – С. 84–93. – Режим доступа: http://dspace.puet.edu.ua//handle/123456789/1613.
2. Фидлер М. Задачи линейной оптимизации с неточными данными / М. Фидлер, Й. Недома, Я. Рамик, И. Рон, К. Циммерманн. – М. – Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Ин-т компьютерных исследований, 2008 – 288 с.

3. Заде Л. А. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений / Л. А. Заде. – М. : Мир, 1976 – 165 с.
4. Заде Л. А. Размытые множества и их применение в распознавании образов и кластер-анализе. В сб.: Классификация и кластер / Л. А. Заде. – М. : Мир, 1980. – С. 208–247.

УДК 519.854

ТЕОРЕМА О РЕШЕНИИ БЕЗУСЛОВНОЙ ЗАДАЧИ МИНИМИЗАЦИИ ЛИНЕЙНОЙ ФУНКЦИИ НА РАЗМЕЩЕНИЯХ

О. А. Емец, *д. ф.-м. н., профессор;*
Т. В. Чиликина, *к. ф.-м .н.*
tv.0502@mail.ru

В данной работе решается задача безусловной оптимизации линейной функции, заданной на размещениях, с использованием известного решение такой задачи для задания функции на перестановках ([1], теорема 348).

Пусть задано мультимножество G η действительных чисел, среди которых k различных, т. е. $G=\{g_1,...,g_\eta\}$, $g_i \in R^1 \quad \forall i \in J_\eta = \{1,2,...,\eta\}$, основа G – упорядоченное множество, $S[G]=\{e_1,e_2,...,e_n\}$, первичная спецификация G – упорядоченное множество $[G]=\{\eta_1,...,\eta_n\}$, где $\eta_1+...+\eta_n=\eta, \quad \eta_i = k_G(e_i)$– кратность элемента в мультимножестве G $\forall i \in J_n$. Здесь и далее J_n – множество первых n натуральных чисел.

Образуем, используя G, общее множество k-размещений $E^k_{\eta n}(G)$, т.е. множество всех упорядоченных k-выборок из G [2].

Рассмотрим такую задачу: найти пару $\langle C^*, x^* \rangle$, где

$$C^* = \min_{x=(x_1,...,x_k)\in E^k_{\eta n}(G)} \sum_{j=1}^{k} c_j x_j; \tag{1}$$

$$x^* = (x_1^*,...,x_k^*) = \arg\min_{x\in E^k_{\eta n}(G)} \sum_{j=1}^{k} c_j x_j. \tag{2}$$

Такую задачу, как известно, называют [7] задачей безусловной линейной полностью комбинаторной задачей на размещениях. В [2, теорема 3.1] задается ее решение: если

$$g_1 \le \ldots \le g_\eta, \tag{3}$$

$$c_1 \ge \ldots \ge c_s \ge 0 \ge c_{s+1} \ge \ldots \ge c_k, \;\; s \in J_k^o, \tag{4}$$

а вектор x^* определяется как (2), то

$$x_i^* = g_i \;\; \forall i \in J_s, \tag{5}$$

$$x_{s+i}^* = g_{\eta-r+i} \;\; \forall i \in J_r, \tag{6}$$

где

$$r+s=k;\; r,s \in J_k^0, \tag{7}$$

а

$$J_k^0 = J_k \cup \{0\}. \tag{8}$$

Доказательство этого факта в [7] проводиться непосредственно.

Покажем, как это утверждение можно получить из теоремы 348 в [1] о минимуме скалярного произведения векторов с фиксированными наборами элементов.

Как следует из теоремы 348 [1] координаты $y_1^*, \ldots, y_\eta^*$ точки $y^* \in E_{\eta n}(G)$, является перестановкой элементов мультимножества G в задаче нахождения пары $\langle d^*, y^* \rangle$, где

$$d^* = \min_{y=(y_1,\ldots,y_\eta)\in E_\eta(G)} \sum_{j=1}^{\eta} d_j y_j; \tag{9}$$

$$y^* = \arg\min_{y\in E_\eta(G)} \sum_{j=1}^{\eta} d_j y_j; \tag{10}$$

а $E_{\eta n}(G)$ – множество перестановок элементов мультимножества G в [2], находится при выполнении условия (3) и такого:

$$d_1 \ge \ldots \ge d_\eta, \tag{11}$$

так:

$$y_j^* = g_j \;\; \forall j \in J_\eta. \tag{12}$$

Теорема. Если

$$d_j = c_j \;\; \forall j \in J_s, \tag{13}$$

$$d_{\eta-r+j} = c_{s+j} \;\; \forall j \in J_r, \tag{14}$$

$$d_j = 0 \;\forall j \in J_{\eta-r} \setminus J_s , \qquad (15)$$

где r, s удовлетворяют условиям (7), (8), то условие (12) эквивалентно условиям (5), (6) при

$$x_j^* = y_j^* \quad \forall i \in J_s , \qquad (16)$$

$$x_{s+j}^* = y_{\eta-r+j}^* \;\forall j \in J_r , \qquad (17)$$

а $c^* = d^*$.

Доказательство.

Перестановка $y = \left(y_1, \ldots, y_s, y_{s+1}, \ldots, y_{\eta-r}, y_{\eta-r+1}, \ldots, y_\eta\right) \in E_{\eta n}\left(G\right)$ определяет при условиях (7), (8) k -размещения

$$x = \left(y_1, y_2, \ldots, y_s, y_{\eta-r+1}, y_{\eta-r+2}, \ldots, y_\eta\right) \in E_{\eta n}^k\left(G\right).$$

Поскольку в силу (15) $d_j = 0 \;\forall y_j$ не вошедших из y в x и выполняется условие (13), (14), то $d^* = c^*$, а из (12), (5), (6) и соотношения между x и y следуют формулы (16), (17). Что и требовалось доказать.

В работе получено новое простое решение полностью комбинаторной задачи безусловной оптимизации на множестве размещений. Как направление дальнейших исследований можно рассматривать обобщение этого подхода на другие задачи.

Информационные источники

1. Харди Г. Г. Неравенства / Г. Г.Харди, Дж. Е. Литтльвуд, Г. Полиа. – М. : Изд-во иностр.лит., 1948. – 456 с.
2. Стоян Ю. Г. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації / Ю. Г. Стоян, О. О. Ємець. – К. : Ін-т системн. досліджень освіти, 1993. – 188 с.

УДК 519.8

ДЕЯКІ ВЛАСТИВОСТІ ФУНКЦІЇ МІНІМУМУ ТА МАКСИМУМУ

О. О. Ємець, *д.ф.-м.н., профессор;*
О. В. Ольховська, *аспірант*
ВНЗ Укоопспілки «Полтавський університет економіки і торгівлі»
lena@olhovsky.name

Для доведення математичних співвідношень (див. наприклад [1, 2]) використовують властивості мінімуму та максимуму функції. При їх використанні іноді простіше заново довести потрібні властивості, ніж їх знайти в літературі. Розглянемо деякі властивості мінімуму та максимуму, які використовувалися при доведенні збіжності модифікованого ітераційного методу розв'язування задачі комбінаторної оптимізації ігрового типу на розміщеннях [1]. Нехай $a(p)$ і $b(p)$ – задані на P дійсні функції.

Властивість 1.Справедлива нерівність:

$$\max_{p\in P}\left(a(p)+b(p)\right) \ge \max_{p\in P}\left(a(p)\right)+\min_{p\in P}\left(b(p)\right).$$

Доведення. За властивістю максимуму $\max_{p\in P}\left(a(p)+b(p)\right) \ge$ $\ge a(p)+b(p)$. Це справедливо для $\forall\, p \in P$, зокрема:

$$\max_{p\in P}\left(a(p)+b(p)\right) \ge \max_{p\in P}\left(a(p)\right)+b\left(p^*\right), \tag{1}$$

де $p^* = arg\max_{p\in P} a(p)$. Точка $p \in P$ з властивості мінімуму

$$b\left(p^*\right) \ge \min_{p\in P}\left(b(p)\right). \tag{2}$$

Тоді з (1), (2) випливає $\max_{p\in P}\left(a(p)+b(p)\right) \ge \max_{p\in P}\left(a(p)\right)+\min_{p\in P}\left(b(p)\right)$. Що і треба було довести.

Властивість 2. Справедлива нерівність:

$$\min_{p\in P}\left(a(p)+b(p)\right) \le \min_{p\in P}\left(a(p)\right)+\max_{p\in P}\left(b(p)\right).$$

Доведення. За властивістю мінімуму $\min_{p\in P}\left(a(p)+b(p)\right) \le a(p)+b(p)$. Це справедливо для $\forall\, p \in P$, зокрема:

$$\min_{p\in P}\left(a(p)+b(p)\right) \le \min_{p\in P}\left(a(p)\right)+b\left(p^{**}\right), \tag{3}$$

де $p^{**} = arg\min_{p\in P} a(p)$. Точка $p \in P$ з властивості максимуму

$$b\left(p^{**}\right) \le \max_{p\in P}\left(b(p)\right). \tag{4}$$

Тоді з (4), (5) випливає властивість $\min_{p\in P}\left(a(p)+b(p)\right) \le \min_{p\in P}\left(a(p)\right)+$ $+\max_{p\in P}\left(b(p)\right)$. Що і треба було довести.

Властивість 3. Справедлива нерівність:

$$\min_{p\in P}\left(a\left(p\right)+b\left(p\right)\right)\geq \min_{p\in P}\left(a\left(p\right)\right)+\min_{p\in P}\left(b\left(p\right)\right).$$

Доведення. З властивостей мінімуму та максимуму

$$\max_{p\in P}\left(a\left(p\right)\right)+b\left(p\right)\geq a\left(p\right)+b\left(p\right)\geq \min_{p\in P}\left(a\left(p\right)\right)+b\left(p\right) \text{ та}$$

$$a\left(p\right)+\max_{p\in P}\left(b\left(p\right)\right)\geq a\left(p\right)+b\left(p\right)\geq a\left(p\right)+\min_{p\in P}\left(b\left(p\right)\right).$$

Додавши ці нерівності маємо справедливість такої:

$$\max_{p\in P}\left(a\left(p\right)\right)+\max_{p\in P}b\left(p\right)\geq a\left(p\right)+b\left(p\right)\geq \min_{p\in P}a\left(p\right)+\min_{p\in P}\left(b\left(p\right)\right), \quad \text{а}$$

отже $\min_{p\in P}\left(a\left(p\right)+b\left(p\right)\right)\geq \min_{p\in P}a\left(p\right)+\min_{p\in P}\left(b\left(p\right)\right)$.

Властивість 4. Якщо $a\left(p\right)$ і $b\left(p\right)$ задані функції, то виконується наступна нерівність:

$$\max_{p\in P}\left(a\left(p\right)+b\left(p\right)\right)\leq \max_{p\in P}\left(a\left(p\right)\right)+\max_{p\in P}\left(b\left(p\right)\right).$$

Доведення. Використовуючи твердження 3 можемо записати

$$\min_{p\in P}\left(-a\left(p\right)+\left(-b\left(p\right)\right)\right)\geq \min_{p\in P}\left(-a\left(p\right)\right)+\min_{p\in P}\left(-b\left(p\right)\right), \text{ тоді}$$

$$-\max_{p\in P}\left(a\left(p\right)+b\left(p\right)\right)\geq -\max_{p\in P}\left(a\left(p\right)\right)-\max_{p\in P}\left(b\left(p\right)\right) \text{ або}$$

$$\max_{p\in P}\left(a\left(p\right)+b\left(p\right)\right)\leq \max_{p\in P}\left(a\left(p\right)\right)+\max_{p\in P}\left(b\left(p\right)\right),$$

що і треба було довести.

В роботі доведені деякі властивості максимуму і мінімуму, які необхідні зокрема для доведення доведенні збіжності модифікованого ітераційного методу розв’язування задачі комбінаторної оптимізації ігрового типу.

Информационные источники

1. Емец О. А. Доказательство сходимости итерационного метода решения задачи комбинаторной оптимизации игрового типа на размещениях / О. А. Емец, Е. В. Ольховская – Кибернетика и сист. анализ. – 2013. – № 1. – С. 102–114.
2. Ємець О. О. Про оцінки мінімумів цільових функцій при оптимізації на сполученнях / О. О. Ємець, А. А. Роскладка // Український математичний журнал. – 1999. – Т. 51. – №8. – С. 1118–1121.

УДК 519. 854.5

МЕТОД ГІЛОК ТА МЕЖ ДЛЯ ЗАДАЧІ ОПТИМІЗАЦІЇ НА ПЕРЕСТАНОВКАХ З СЕПАРАБЕЛЬНОЮ ЦІЛЬОВОЮ ФУНКЦІЄЮ ТА ЛІНІЙНИМИ ОБМЕЖЕННЯМИ

О. О. Ємець, *д. ф.-м. н., професор;*
Т. О. Парфьонова, *к. ф.-м. н., доцент*
ВНЗ Укоопспілки «Полтавський університет економіки і торгівлі»

Постановка задачі

Розглянемо задачу: знайти $\left\langle F^*, x^* \right\rangle$, де

$$F^* = \min_{x \in R^k} \sum_{j=1}^{k} c_j f(x_j), \tag{1}$$

$$x^* = \arg\min_{x \in R^k} \sum_{j=1}^{k} c_j f(x_j) \tag{2}$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{k} a_{ij} x_j = b_i, i \in J_l, \tag{3}$$

$$\sum_{j=1}^{k} a_{ij} x_j \le b_i \;\; i \in J_m \setminus J_l, \tag{4}$$

$$x = (x_1, ..., x_k) \in E_{k\nu}(G). \tag{5}$$

В задачі (1)–(5) R^k – дійсний арифметичний евклідів k-вимірний простір, $c_j, a_{ij}, b_i \in R^1$ – відомі сталі, m, k, ν – задані натуральні константи, l – відомий натуральний параметр або нуль, $m \ge l$, $J_m = \{1, 2, ..., m\}$ – множина перших m натуральних чисел, а $J_0 = \varnothing$ – порожня множина, $G = \{g_1, g_2 ..., g_k\}$ – мультимножина, $g_j \in R^1 \;\; \forall j \in J_k$. В умові (5) $E_{k\nu}(G)$ позначає множину перестановок чисел мультимножини G, а ν позначає кількість різних чисел в G, тобто кількість елементів основи $S(G)$ мультимножини G, $|S(G)| = \nu, \nu \le k$.

Галуження в МГМ для задачі (1)–(5)

Не порушуючи загальності міркувань можемо вважати змінні задачі (1)–(5) пронумерованими так, що

$$c_1 \ge c_2 \ge ... \ge c_k, \tag{6}$$

а елементи мультимножини так, що

$$f(g_1) \le f(g_2) \le \ldots \le f(g_k) \tag{7}$$

При утворенні дерева галуження в МГМ змінні x_τ в перестановці x будемо вибирати з невикористаних в порядку (6), а їх значення $g_t \in G$ – з невикористаних елементів в порядку (7).

Підмножини, що утворюються на першому рівні галуження позначимо D_{i_1}:

$$D_{i_1} = \Big\{ x = (x_1, \ldots, x_k) \in R^k \ / \ x_1 = g_{i_1};\ \sum_{j=2}^{k} a_{ij} x_j + a_{i1} g_{i_1} = b_i \ \forall i \in J_l,$$

$$\sum_{j=2}^{k} a_{ij} x_j + a_{i1} g_{i_1} \le b_i \quad \forall i \in J_m \setminus J_l \Big\},\ i_1 \in J_k. \tag{8}$$

Множину D_{i_1}, що містить принаймні два елемента можна аналогічно розгалузити на підмножини $D_{i_1 i_2}$, $i_2 \in J_k \setminus \{ i_1 \}$ і т. д.

На r-му рівні, $r \le k$, аналогічного утворення підмножин маємо:

$$D_{i_1 i_2 \ldots i_r} = \Big\{ x = (x_1, \ldots, x_k) \in R^k \ / \ x_j = g_{i_j};\ \forall j \in J_r;\ i_j \in J_k;$$

$$\sum_{j=r+1}^{k} a_{ij} x_j + \sum_{j=1}^{r} a_{ij} g_{i_j} = b_i \quad \forall i \in J_l$$

$$\sum_{j=r+1}^{k} a_{ij} x_j + \sum_{j=1}^{r} a_{ij} g_j \le b_i \quad \forall i \in J_m \text{₩} J_l \Big\},\ i_j \in J_k;\ j \in J_r \tag{9}$$

Оцінювання в МГМ для задачі (1)-(5)

Як відомо, в задачі мінімізації функції $F(x)$: $R^k \to R^1$ на $D = D_1 \cup \ldots \cup D_n$ оцінкою D_i може виступати число $\upsilon_i \in R^1$, яке задовольняє умову: $\upsilon_i \le F(x) \ \ \forall x \in D_i,\ i \in J_n$.

Нехай $\tilde{G} = G - \{ g_{i_1}, \ldots, g_{i_r} \} = \{ \tilde{g}_1, \ldots, \tilde{g}_{k-r} \}$. Не порушуючи загальності міркувань, можна так пронумерувати елементи мультимножини $\tilde{G}$, що

$$f(\tilde{g}_1) \le f(\tilde{g}_2) \le \ldots \le f(\tilde{g}_{k-r}) \tag{10}$$

Теорема. Оцінкою допустимої підмножини $D_{i_1 i_2 \ldots i_r}$ в представленні (9) задачі (1)–(5) в МГМ є число

$$\xi = \xi_{i_1 i_2 \dots i_r} = \nu_{i_1 i_2 \dots i_r} + c^*_{i_1 i_2 \dots i_r} \quad (11)$$

де

$$\nu = \nu_{i_1 i_2 \dots i_r} = \sum_{j=1}^{r} c_j f(g_{i_j}) \quad (12)$$

$$c^* = c^*_{i_1 i_2 \dots i_r} = \sum_{j=1}^{k-r} c_{k+j} f(\tilde{g}_j) \quad (13)$$

при виконанні умов (6) та (10).

Правила відсікання в МГМ для задачі (1)–(5).

Як відомо, основне правило відсікання в задачі мінімізації $F(x)$ на $D = D_1 \cup \dots \cup D_n$ – це не галуження далі підмножини D_i допустимої множини D, якщо її оцінка $\nu_i \geq F_0 = F(x_0),\ x_0 \in D$, де F_0 – поточний рекорд мінімального значення цільової функції $F(x)$.

Крім цього справедливі всі правила, розглянуті в [1].

В доповіді розглянуті і розв'язані всі проблеми організації роботи МГМ для задачі мінімізації на множині перестановок сепарабельною цільової функції за мінімальних обмежень.

Информационные источники

1. Емец О. А. Решение линейных условных полностью комбинаторных оптимизационных задач на перестановках методом ветвей и границ / О. А. Емец, Е. М. Емец, Т. А. Парфенова, Т. В. Чиликина // Кибернетика и системный анализ. – 2013. – № 2. – С. 121–138.

УДК 519

ФРАКТАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ КОМБІНАТОРНОЇ МНОЖИНИ РОЗМІЩЕНЬ

О. О. Ємець, *професор, д. ф.-м. н.;*
О. В. Тур*, асистент*
ВНЗ Укоопспілки «Полтавський університет економіки та торгівлі»

Розглянемо мультимножину $G = \{g_1, \dots, g_\eta\} = \{e_1^{\eta_1}, \dots, e_n^{\eta_n}\}$, яка, очевидно має основу $S(G) = (e_1, \dots, e_n)$, та первинну специфікацію $[G] = (\eta_1, \dots, \eta_n),\ \eta_1 + \dots + \eta_n = \eta$. Не порушуючи загальності міркувань, вважаємо

$$e_1 < e_2 < \ldots < e_n \qquad (1)$$

Утворимо загальну множину k -розміщень [1] з G: $E^k_{\eta n}(G)$.

Процес утворення k -розміщень можна ілюструвати деревом $D(G)$ (рис. 1).

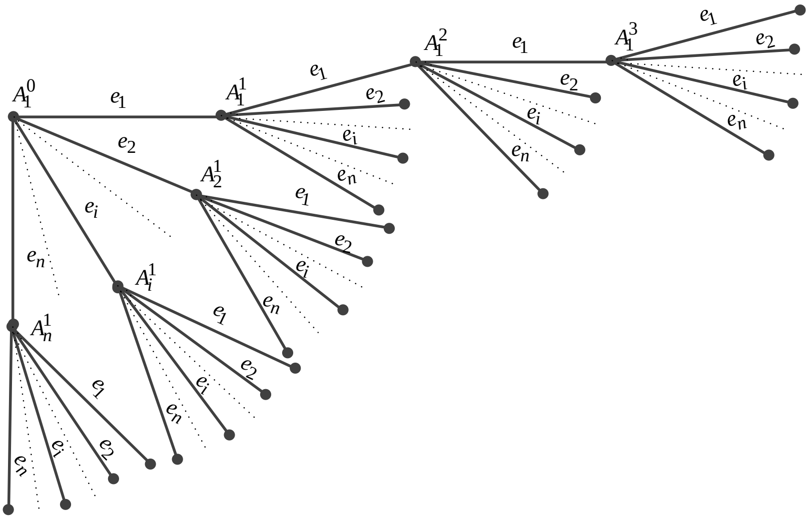


Рисунок 1 – Процес утворення k -розміщень

Перший рівень дерев $D(G)$ відповідає вибору 1-розміщень: (e_1), $(e_2),\ldots,(e_n)$. Другий рівень відповідає вибору 2-розміщень: $(e_1,e_1),(e_1,e_2),\ldots,(e_1,e_n),(e_2,e_1),(e_2,e_2),\ldots,$ $\ldots,(e_2,e_n),\ldots,(e_n,e_1),\ldots,(e_n,e_n)$ і т. д. Кожній вершині дерева відповідає свій вектор V накопичених кратностей елементів основи. На i -тому рівні: $V=\left(V_1^i,\ldots,V_n^i\right)$, де $V_j^i \ge 0$; $\sum_{j=1}^{n} V_j^i = i$, $V_j^i \le \eta_j$ $\forall\, j \in J_n = \{1,2,\ldots,n\}$. На k -му рівні вершини k -го рівня – це k -розміщення. На η -му рівні – висячі вершини – це перестановка елементів з G.

Зауважимо, що дерево $D(G)$ можна розглядати як предфрактальне дерево [1–2]. В цьому випадку побудова починається з n-зірки [1–2]. Затравкою виступає n-зірка, якщо $\forall i \quad V_j^i \leq \eta_j$, або p-зірка, де $p < n$ (див. рис. 1). Зірки, взагалі кажучи, різні, в залежності від первинної специфікації $[G] = (\eta_1, ..., \eta_n)$.

Розглянемо основні властивості та знайдемо числові характеристики дерева $D(G)$

Теорема 1. Діаметр предфрактального дерева $D(G)$ для множини k-розміщень $E_{\eta n}^k(G)$ дорівнює $2k$, де $G = \{g_1, ..., g_\eta\}$, $S(G) = (e_1, ..., e_n)$, $[G] = (\eta_1, ..., \eta_n)$, $n \geq 2$.

Доведення. Доведення проведемо за математичною індукцією по рівню l дерева $D(G)$, що відповідає l-розміщенням, $l \leq k$.

Перевіримо твердження при $l = 1$. Ініціатором є n-зірка (рис. 2). Діаметр зірки дорівнює 2. Отже, твердження справедливе.

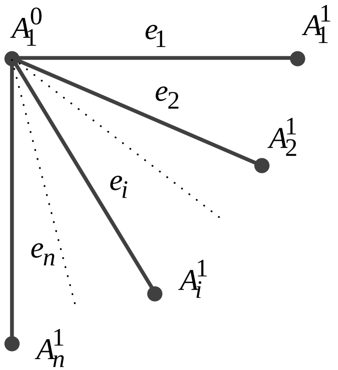


Рисунок 2 – n-зірка – ініціатор

Нехай воно справедливе для $l = m$. Тобто дерево, що побудовано за m кроків має діаметр $2m$. Цей діаметр досягається на ланцюзі з кінцями – висячими вершинами – m-розміщеннями. До кожної висячої вершини приєднується p-зірка (точніше вершина замінюється p-зіркою) при утворенні $(m+1)$-го рівня (тобто $(m+1)$-розміщення). Тут $p \le n$. Відстань від висячих вершин зірок до центру зірки одиниця. Тобто діаметральний ланцюг з обох кінців подовжується на одне ребро. Тобто діаметр дерева на $(m+1)$-му рівні є $2(m+1)$. Що і доводить теорему.

Теорема 2. Радіус r_k предфрактального дерева $D(G)$ для множини k-розміщень $E_{\eta n}^{k}(G)$ дорівнює k, де $G = \{e_1^{\eta_1}, ..., e_n^{\eta_n}\}$.

Доведення. Доведення проведемо за математичною індукцією по рівню l, $l \le k$ дерева $D(G)$.

Перевіримо твердження при $l = 1$. Ініціатором є n-зірка з радіусом (рис.3) $r_1 = 1$. Це відстань від центру зірки до висячої вершини.

Нехай твердження справедливе для $l = m$ і радіус $r_m = l$. Граф на $(m+1)$-му етапі побудови (для $(m+1)$-розміщень) утворюється заміною вершин графа m-го етапу (для m-розміщень), взагалі кажучи, різними, в залежності від первинної специфікації $[G] = (\eta_1, ..., \eta_n)$, p-зірками, $p \le n$.

При цьому радіальний ланцюг, що утворюється на $(m+1)$-му етапі побудови предфрактального дерева – це радіальний ланцюг дерева m-го етапа та одне ребро p-зірки, що приєднали до нього. Оскільки відстань від центру зірки до її висячих вершин є одиницею, то радіус дерева $(m+1)$-го етапу побудови предфрактального дерева $D(G)$ $r_{m+1} = m+1$.

Згідно методу математичної індукції це означає справедливість теореми $\forall l$. Теорема доведена.

Теорема 3. В дереві $D(G)$ центром є вершина A_1^0, що є центром n-зірки, яка виступає ініціатором.

Доведення. Доведення ґрунтується на означенні центру як вершини, з мінімальним ексцентриситетом. Для n-зірки – ініціатора – центр це вершина A_1^0 (рис. 1.), що має степінь n. Радіальний ланцюг з'єднує центр з висячою вершиною ребром, тобто ланцюг має довжину 1.

В процесі побудови дерева $D(G)$ (див. доведення теореми 2) до радіального ланцюга приєднуються p-зірки, $p \le n$, що очевидно, не змінює, того що центром утвореного графа залишається вершина A_1^0. Твердження теореми доведено.

Наслідок. У дерева $D(G)$ є тільки один центр.

Справедливість наслідку випливає з означення центру та з побудови радіального ланцюга (див. доведення теореми 2).

Зауважимо, що кількість K висячих вершин в дереві $D(G)$ – це кількість k-розміщень з елементів мультимножини G, тобто $K = \left|E_{hn}^k(G)\right|$. Відомо [3], що коли $h_i = k \ \forall j \in J_n$ $K = n^k$, а коли $h_i = 1 \ \forall j \in J_n$, тобто G-множина, то $K = n(n-1)...(n-k+1)$. Підрахунок K для загального випадку множини $E_{hn}^k(G)$ наведено в [4].

В доповіді розглянуто фрактальні властивості розміщень при представленні їх множини деревом.

Інформаційні джерела

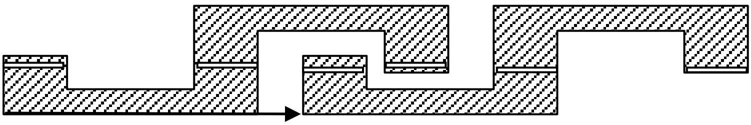
1. Перепелиця В. А. К проблеме распознавания фрактальних графов / В. А. Перепелиця, Н. В. Сергиенко, А. М. Кочкаров // Кибернетика и системный анализ. – 1999. – № 4. – С. 72–89
2. Сергеева Л. Н. Моделирование структуры экономических систем и процесов / Л. Н.Сергеева. – Запорожье : ЗГУ, 2002. –88 с.
3. Стоян Ю. Г. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації / Ю. Г. Стоян, О. О. Ємець. – К. : Ін-т системн. досліджень освіти, 1993. – 188 с.
4. Ємець О. О. Про кількість елементів в загальних множинах розміщень та полірозміщень / О. О. Ємець, Т. В. Чілікіна // Інформатика та системні науки (ІСН-2013) : матеріали IV Всеукр. наук.-практ. конф., (м. Полтава, 21–23 берез. 2013 р.). – Полтава : ПУЕТ, 2013. – С. 117–124. Режим доступу: http://dspace.puet.edu.ua//handle/123456789/1619.

УДК 519.852

ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА G-МНОЖЕСТВА В ЗАДАЧЕ ПЛОСКОГО РЕГУЛЯРНОГО РАСКРОЯ

[1]***А. И. Зинченко***;
[2]***И. Г. Величко**, к. ф.-м. н., доцент;*
[1]***И. В. Козин**, д. ф.-м. н., профессор*
[1]Запорожский национальный университет
[2]Запорожский национальный технический университет
andriver@znu.edu.ua

Рассматривается задача регулярного плоского раскроя на полосе. Одинаковые соседние фигуры на полосе раскроя располагаются так, чтобы они не имели общих точек. Множество допустимых сдвигов соседней фигуры называется G-множеством для исходной фигуры [1]. То есть, G-множеством фигуры F на плоскости называется множество $G(F)=\left\{\lambda>0\ /\ F\cap F+\lambda\bar{i}\ =\varnothing\right\}$, где «+» обозначает сумму по Минковскому. Очевидно, что задача плотной укладки однотипных фигур сводится к определению границ G-множества заданой фигуры.



Если провести горизонтальную прямую, паралельную направлению сдвига, то она пересечется с исходной фигурой по системе интервалов. Эта система не должна иметь общих точек с аналогичной системой сдвинутой фигуры. Таким образом G-множество исходной фигуры есть пересечение всех G-множеств для каждой из систем интервалов, описаных выше.

В [2] исследованы различные, с точки зрения топологии, допустимые расположения исходной и сдвинутой системы интервалов. Каждому допустимому сдвигу системы из n интервалов поставлен в соответствие кортеж $\left(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\right)$ из n компонент, где α_i – это максимальный номер интервала из заданной совокупности, правее которого оказался сдвинутый интервал с номером i .

На рисунке приведена исходная и сдвинутая система интервалов, отвечающая кортежу (2,2,3). Элементы кортежа должны быть натуральными и удовлетворять таким требованиям:

$$\alpha_1 \le \alpha_2 \le \ldots \le \alpha_n = n,\ i \le \alpha_i,\quad i = \overline{1,n}.$$

Для любого кортежа, удовлетворяющего данным требованиям, можно найти систему интервалов, для которой существует допустимый сдвиг, отвечающий данному кортежу.

Теорема 1: количество разных последовательностей длины n, которые удовлетворяют этим условиям, равняется n-му числу Каталана C_n.

Количество допустимых кортежей для заданной системы из *n* интервалов F_n равно количеству компонент связности G-множества для фигуры F. Из теоремы 1 следует, что количество компонент связности множества $G(F)$ не превышает C_n.

Теорема 2: Количество компонент связности G-множества системы *n* интервалов не превосходит величины $\frac{n(n-1)}{2}+1$.

Информационные источники

1. Зінченко А. І., Козін І. В. Використання G-множин при моделюванні процесу оптимального розташування фігур в 2D областях. // Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки. 2012. – № 2. – С. 35–40.
2. Величко І. Г., Зінченко А. І. Аналітичний спосіб визначення кроку штампування при однорядному регулярному розкрої // Вісник двигунобудування, 2011. – № 1 – С. 113–116.

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АППАРАТА ТЕОРИИ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ ЛОГИСТИКИ

И. В. Кашникова, *к. ф.-м. н., доцент*
Белорусский государственный экономический университет, Минск
innabseu@mail.ru

Логистика приобретает все большую актуальность и внедряется практически во все направления экономической деятельности. Постоянное возрастание роли логистики в экономике обусловлено ростом промышленности, расширением ассортимента материалов, готовой продукции, сокращением их времени поставки, неопределенностью экономической ситуации и неустойчивостью. Кроме того, в условиях жесткой конкуренции, характерной для современного рынка, основной стратегией фирмы для повышения ее конкурентных преимуществ является ориентация на удовлетворение возможных потребностей потребителей.

Основным инструментарием логистики являются различные экономико-математические методы, которые можно разделить на такие группы, как: эконометрика, исследование операций, экономическая кибернетика, методы оптимального управления, математическая статистика. Широкий класс задач логистики посвящен выбору наилучшего поведения в условиях неопределенно заданных входных параметров. Традиционный подход к учету неопределенности предполагает, что для неопределенных параметров известны вероятностные характеристики. Однако в реальных ситуациях эти параметры скорее обладают свойством нестохастической неопределенности. Поэтому для анализа таких моделей более корректно будет применение теории нечетких множеств.

Одной из наиболее распространенных задач в логистике является задача управления запасами. При управлении запасами для определения оптимальной партии поставок в логистике используется формула Уилсона.

Общие затраты в единицу времени рассчитываются по формуле (1):

$$L = \frac{Kv}{q} + s \cdot \frac{q}{2}. \tag{1}$$

где L – суммарные затраты в единицу времени;

K – транспортно-заготовительные расходы;

S – переменные затраты, которые рассчитываются как доля затрат на хранение от цены продукции;

V – размер спроса в единицу времени.

Оптимальным размером партии поставки является величина q^*, при которой суммарные затраты являются минимальными.

Отсюда оптимальный размер партии заказа:

$$q^* = \sqrt{\frac{2Kv}{s}}. \tag{2}$$

Рассмотрим ситуацию, когда, когда величины транспортно-заготовительных расходов и переменных затрат представлены нечеткими числами. Это может быть обусловлено следующими причинами:

- Неопределенность в прогнозировании инфляции, которая повлияет на размеры затрат;
- Неопределенность в прогнозировании закупочных цен, которая связана с общей неопределенностью рыночной ситуации;
- Неточность определения размеров переменных затрат. Размер переменных затрат определяется как доля от стоимости продукции, величина этой доли оценивается на основе экспертных оценок;
- Неточность определения размеров транспортно-заготовительных расходов. Это расходы включают в себя затраты на размещение заказа, поиск поставщика, сопровождение заказа и ряд других.

Таким образом, уместно принять данные параметры в виде нечетких треугольных чисел.

$$K = \left[K_{min}, \bar{K}, K_{max} \right]$$

$$s = \left[s_{min}, \bar{s}, s_{max} \right].$$

Тогда, используя правила арифметических действий над нечеткими треугольными числами [2] получим, что затраты для партии поставки q будут представлены в виде следующего нечеткого числа:

$$L(q) = \left[L_{min}, \bar{L}, L_{max} \right] = \left[\frac{K_{min}V}{q} + s_{min}\frac{q}{2}, \frac{\bar{K}V}{q} + \bar{s}\frac{q}{2}, \frac{K_{max}V}{q} + s_{max}\frac{q}{2} \right] \quad (3)$$

Для расчета оптимальной партии поставки с нечеткими данными рекомендуется использовать следующий алгоритм:

1. Провести дефаззификацию нечеткого числа (3) по формуле (4) [2]

$$\sigma(L) = \frac{L_{min} + 4\bar{L} + L_{max}}{6} \quad (4)$$

2. Рассчитать оптимальную партию поставки $\tilde{q}$ для $\sigma(L)$.
3. Для рассчитанной оптимальной партии найти нечеткое значение $L(\tilde{q})$.

Полученное нечеткое число охватывает весь спектр возможных значений суммарных затрат при оптимальной партии поставок q^*. Это позволит более взвешенно принимать управленческие решения по выбору стратегии управления запасами.

Информационные источники

1. Модели и методы теории логистики / под ред. Лукинского В. С. – С.Пб. : Питер, 2008. – 448 с.
2. Ярушкина Н. Г. Основы теории нечетких и гибридных систем / Н. Г. Ярушкина – М. : Финансы и статистика, 2004. – 320 с.

УДК 519.85

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЕКСТРЕМАЛЬНИХ ЗАДАЧ НА КОМБІНАТОРНИХ КОНФІГУРАЦІЯХ ПРИ УМОВІ БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНОСТІ З ВИКОРИСТАННЯМ МЕТОДУ ПОСЛІДОВНОГО ВВЕДЕННЯ ОБМЕЖЕНЬ

Л. М. Колєчкіна, *д. ф.-м. н., професор;*
О. А. Двірна
ВНЗ Укоопспілки «Полтавський університет економіки і торгівлі»
ludapl@ukr.net, rodionovaoa@mail.ru

Розглядається клас задач на комбінаторних конфігураціях при умові багатокритеріальності, що є актуальними, оскільки використовуються як моделі великої кількості прикладних задач, що вимагають одночасного досягнення оптимальних значень кількох критеріїв [1, 2].

Розглянемо алгоритм розв'язування екстремальних задач на комбінаторних конфігураціях (ЕЗКК) при умові багатокритеріальності з використанням методу послідовного вводу обмежень (МПВО). Задачу сформулюємо наступним чином: знайти точки комбінаторної конфігурації $X = \{x\}$, у яких задана векторна функція $F(f_1, f_2, .., f_n)$, де $f_i = < c_i, x_i > \to extr, i \in N_n$, досягає оптимального значення і виконуються додаткові обмеження задачі $A_{ij} x_j \le b_j$.

Головна ідея алгоритму МПВО полягає у формуванні «ідеальної» оцінки та визначенні вагових коефіцієнтів кожного з критеріїв оптимальності, що зводить задачу до скалярної. Шляхом порівняння отриманого результату з оцінкою визначається оптимальний розв'язок. Якщо оцінка не задовільна, то множина альтернатив уточнюється і процедура повторюється. Розглянемо алгоритм.

Алгоритм розв'язування ЕЗКК при умові багатокритеріальності з використанням МПВО

1. Ввести змінну $k = 0$. Ввести максимально допустиму відстань ρ^*.

2. За координатним методом визначити точки комбінаторної конфігурації, що задовольняють кожному з початкових обмежень $D_i \subset X$, де $i \in N_S$ та знайти їх перетин $D* = D_1 \cap D_2 \cap ... \cap D_S$. $D^{(k)} = D*$. Перейти на крок 4.

3. Знайти точки комбінаторної конфігурації, що задовольняють $s+k$-му обмеженню $D_{s+k} \subset X$ та перетин $D^{(k)} = D^{(k-1)} \cap D_{s+k}$.

4. Визначити оптимальні значення кожного критерію на множині $D^{(k)}$ та сформувати «ідеальну» оцінку $f^{*(k)}$ як вектор оптимальних значень критеріїв.

5. Визначаємо величини σ_i^k, $i \in N_m$ за формулою:

$$\sigma_i^k = \frac{1}{m} \sum_{l=1}^{m} \frac{f_i^{max(k)} - f_i(x^{il})}{f_i^{max(k)} - f_i^{min(k)}}.$$

6. Обчислити вагові коефіцієнти критеріїв за формулою:

$$a_i^k = \frac{\sigma_i^k}{\sum_{j=1}^{m} \sigma_j^k}, i \in N_m.$$

7. Визначити критерій оптимальності: $F = \sum_{i=1}^{k} a_i^k f_i \to max$.

8. Знайти x^k, як розв'язок задачі $Z(F, D^{(k)})$, та його оцінку y^k.

9. Якщо y^k задовольняє «ідеальну» оцінку $f^{*(k)}$, тобто $\rho(y^k, f^{*(k)}) \le \rho^*$ перейти на крок 10, інакше – на крок 11.

10. Знайти відхилення по кожному критерію $\Delta_i = f_i(x^k) \big/ f_i^{max(k)}$, $\Delta i \in N_m$ та визначити номер критерію, значення якого необхідно покращити, ω_r – рівень, до якого слід покращити обраний критерій. Збільшити значення k на 1. До обмежень задачі додати k-те обмеження у вигляді $f_r(x) \ge \omega_r$. Перейти на крок 3.

11. x^k – шуканий розв'язок. Завершити роботу алгоритму.

Перевагою алгоритму є те, що з кожним новим уточненням множини альтернатив кількість точок, що задовольняють обмеженням задачі, зменшується, що полегшує роботу алгоритму. Крім того для потрібно знайти лише множину точок, що задовольняють новому приєднаному обмеженню та перетин цієї множини зі сформованою на попередньому етапі. Таким чином, з кожним новим уточненням громіздкість обчислень зменшується і робота алгоритму пришвидшується.

Особливістю алгоритму є його гнучкість в плані використання експертних оцінок для аналізу результату, одержаного на кожному з етапів. Можна використати два варіанти: 1) експерти постійно приймають участь у діалоговій процедурі, вказуючи чи є розв'язок оптимальним і, якщо ні, то значення якої з функцій треба покращити; 2) максимально допустима відстань від «ідеального» до одержаного розв'язку та максимальні величини відхилень для кожної з функцій задаються на початку роботи алгоритму і не потребують подальшого втручання у його роботу.

Висновки. Запропоновано алгоритм розв'язування ЕЗКК при умові багатокритеріальності з використанням МПВО та координатного методу. Даний підхід дозволяє зменшити кількість точок множини, які потрібно розглянути, скоротити кількість обчислень на кожному новому етапі, гнучкий у використанні експертної оцінки, а тому є актуальним та перспективним при проведенні подальших досліджень.

Інформаційні джерела

1. Донець Г. П. Екстремальні задачі на комбінаторних конфігураціях : монографія / Донець Г. П., Колєчкіна Л. М. – Полтава : ПУЕТ, 2011. – 362 с.
2. Волошин О. Ф. Моделі та методи прийняття рішень : навч. посіб. / Волошин О. Ф., Мащенко С. О. – К. : Видавничо-поліграфічний центр Київський университетет, 2006. – 336 с.

УДК 519.85

МЕТОД ТОЧНОЙ КВАДРАТИЧНОЙ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ДЛЯ ЗАДАЧ КОМБИНАТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

***А. И. Косолап**, д. ф.-м. н., профессор*
Украинский государственный химико-технологический университет
anivkos@ua.fm

Задачи комбинаторной оптимизации возникают во многих отраслях знаний. Такие задачи, как правило, являются NP-полными, что затрудняет их решение для задач большой размерности. Переменные задач комбинаторной оптимизации являются булевыми или целочисленными. Существует большой класс задач на перестановках [1]. Число допустимых решений в комбинаторных задачах равно 2^n или $n!$, или больше и выбор наилучшего решения является сложной проблемой. В последние годы задачи комбинаторной оптимизации преобразуют к непрерывной оптимизации. При таком преобразовании получаем многоэкстремальную задачу, в которой необходимо найти точку глобального минимума. В настоящее время для решения задач глобальной оптимизации одним из наиболее эффективных является метод точной квадратичной регуляризации [2].

Рассмотрим задачу булевой оптимизации

$$min\{c^T x \ / \ Ax \le b, x = 0 \vee 1\}, \qquad (1)$$

которая преобразуется к непрерывной оптимизации

$$min\{c^T x \ / \ Ax \le b, 0 \le x \le 1, \sum_{i=1}^{n}(x_i - \frac{1}{2})^2 = \frac{n}{4}\} \qquad (2)$$

Задача (2) эквивалентна задаче (1), так как множество $\{x|0 \le x_i \le 1, x_i^2 - x_i = 0, \forall i\}$ совпадает с множеством вершин гиперкуба. Ограничения задачи (2) определяют в n-мерном пространстве точки пересечения выпуклого многогранника со сферой.

Рассмотрим класс задач целочисленной оптимизации

$$min\{c^T x \mid Ax \le b, x \ge 0, x \in Z\},$$

где Z – множество целых чисел. Такая задача преобразуется к многоэкстремальной задаче

$$min\{c^T x \mid Ax \le b, x \ge 0, \sum_{i=1}^{n}(1 - cos(2\pi x_i)) \le 0\}. \qquad (3)$$

Если переменными задачи (3) являются различные целые числа, то она преобразуется к виду

$$min\{c^T x \ / \ Ax \le b, x \ge 0, \sum_{i=1}^{n}(1 - cos(2\pi x_i)) \le 0, (x_i - x_j)^2 \ge 1, \forall i \ne j\}. \qquad (4)$$

Преобразованные задачи (2)–(4) решались методом точной квадратичной регуляризации. Этот метод позволяет преобразовать общую задачу нелинейной оптимизации

$$min\{f_0(x) \mid f_i(x) \le 0, i = 1,...,m, x \in E^n\}, \qquad (5)$$

где все $f_i(x)$ – дважды дифференцированные функции, E^n – евклидово пространство, к максимизации нормы вектора на выпуклом множестве

$$max\{||\bar{x}||^2| f_0(x)+s+(r-1)||\bar{x}||^2\leq d,\ f_i(x)+$$
$$+r||\bar{x}||^2\leq d, i=1,...,m\},$$

где s и r – параметры, а $\bar{x}=(x_1,...,x_n,x_{n+1}),\ \ d$ – новая переменная (s должно удовлетворять условию $f_0(x^*)+s\geq||x^*||^2,\ x^*$ – решение задачи (5)). Необходимо найти минимальное значение d, для которого выполняется условие $r||\bar{x}||^2=d.$ Соответствующее значение $\bar{x}$ будет точкой глобального минимума задачи (5). Существует значение $R>0$, что для всех $r>R$ допустимое множество преобразованной задачи будет выпуклым. При увеличении r это множество стремится к пересечению шаров. Максимум нормы вектора на пересечении шаров эффективно находится двойственным методом [2].

Информационные источники

1. Емец О. А. Комбинаторная оптимизация на размещениях / О. А. Емец, Т. Н. Барболина. – К. : Наук. думка, 2008. – 160 с.
2. Косолап А. И. Методы глобальной оптимизации / А. И. Косолап. – Днепропетровск : Наука и образование, 2013. – 318 с.

УДК 519.16

РОЗРОБКА СТРУКТУР ДАНИХ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ КОМІВОЯЖЕРА ВЕЛИКОЇ РОЗМІРНОСТІ

Б. О. Кузь
Національний університет «Львівська політехніка»
bohdankuz@rambler.ru

Для розв'язування задач комівояжера великих розмірностей (кількість точок від 10^5) використовуються евристичні та генетичні алгоритми.

Виникає проблема збереження початкових даних та результатів роботи алгоритму. Через велику тривалість обчислень та розділення методу розв'язування задачі на етапи важливим також є зберігання результатів проміжних обчислень. Це дозволяє продовжити виконання обчислень з попереднього етапу у випадку зміни параметрів алгоритму.

В доповіді наводиться опис структур даних для зберігання початкової множини даних, кластеризації, часткових розв'язків та остаточних результатів обчислень. Обґрунтовано особливості представлення даних для задач великих розмірностей.

Информационные источники

1. K. Helsgaun An Effective Implementation of k-Opt Moves for the Lin–Kernighan TSP Heuristic // Datalogiske Skrifter, Writings on Computer Science, No. 109, Roskilde University, 2006.
2. R. Bazylevych, R. Dupas, B. Prasad, B. Kuz, R. Kutelmakh, L. Bazylevych: A Parallel Approach for Solving a Large-Scale Traveling Salesman Problem. Proc. of the 5-th Indian Intern. Conf. on Artificial Intelligence, IICAI-2011, India, 2011. – pp. 566–579.
3. Базилевич Р. П., Кутельмах Р. К., Кузь Б. О. «Алгоритм розв'язання задачі комівояжера великої розмірності методом «тора», Вісник НУ «Львівська політехніка» № 686, Львів, 2010. – С. 179–182.

УДК 519.854

ЗАДАЧА НАВЧАЛЬНОГО РОЗКЛАДУ

М. В. Леонова, *пошукач*
Полтавський національний педагогічний університет
імені В. Г. Короленка

Складання розкладу занять є однією з найбільш важливих задач кожного навчального закладу. Задача про розклад є досить дослідженою та актуальною у сучасній науковій літературі. Методи її розв'язання тісно зв'язані з особливостями різних навчальних закладів, вимогами та обмеженнями щодо складання розкладу.

Задача навчального розкладу полягає в тому, щоб скласти оптимальний у деякому сенсі графік занять певного факультету на тиждень, враховуючи такі параметри: N_1 викладачів, N_2 дисциплін, N_3 видів занять, N_4 груп, N_5 аудиторій, N_6 робочих днів тижня, N_7 пар. Номери викладачів позначимо $v \in J_{N_1}$; дисциплін $l \in J_{N_2}$; видів занять $z \in J_{N_3}$; груп $g \in J_{N_4}$; аудиторій $a \in J_{N_5}$; робочих днів тижня $d \in J_{N_6}$; пар $t \in J_{N_7}$.

Тоді елемент розкладу представляє собою точку в 7-вимірному просторі виду $r = (v, l, z, g, a, d, t)$, що задовольняє певним умовам.

Можна розглядати розклади, що оптимізують той чи інший критерій та враховують різні реальні обмеження. Таким задачам присвячені роботи [1]–[3].

Розглянемо задачу складання розкладу, що максимізує його ефективність, яка визначається матрицею C, що має сім вимірів, які відповідають: 1-й – викладачі, 2-й – дисципліни, 3-й – види занять, 4-й – групи, 5-й – аудиторії, 6-й – робочі дні тижня, 7-й – номери пар. Тобто $c_{i_1 i_2 i_3 i_4 i_5 i_6 i_7}$ – це ефективність заняття, що проводить викладач i_1 з дисципліни i_2, вид заняття i_3, в групі i_4, в аудиторії i_5, день тижня i_6, пара i_7.

Зрозуміло, що деякі елементи матриці C відповідають неможливим з точки зору обмежень комбінаторних індексів, тому цей елемент може бути довільним (невизначеним, або 0, або $-\infty$).

Введемо булеву змінну

$$X_{v,l,z,g,a,d,t} = \begin{cases} 1, \textit{ коли викладач } v \textit{ призначається на дисципліну } l \\ \quad \textit{з видом заняття } z, \textit{в групі } g, \textit{в аудиторії } a, \textit{в день } d, \\ \quad \textit{на пару } t; \\ 0, \textit{ в іншому випадку.} \end{cases}$$

Математична модель задачі може бути представлена у вигляді:

$$F(x) = \sum_{v=1}^{N_1} \sum_{l=1}^{N_2} \sum_{z=1}^{N_3} \sum_{g=1}^{N_4} \sum_{a=1}^{N_5} \sum_{d=1}^{N_6} \sum_{t=1}^{N_7} c_{v,l,z,g,a,d,t} X_{v,l,z,g,a,d,t} \to max, \quad (1)$$

за обмежень

1) лише один викладач може бути призначений на дисципліну l, вид заняття z, групу g, аудиторію a, день d, пару t:

$$\sum_{v=1}^{N_1} X_{v,l,z,g,a,d,t} = 1, \quad (2)$$

2) лише на одну дисципліну може бути призначений викладач v, вид заняття z, група g, аудиторія a, день d, пара t:

$$\sum_{l=1}^{N_2} X_{v,l,z,g,a,d,t} = 1, \quad (3)$$

3) лише одному виду занять може відповідати викладач v, дисцип-

ліна *l*, група *g*, аудиторія *a*, день *d,* пара *t*:

$$\sum_{z=1}^{N_3} X_{v,l,z,g,a,d,t} = 1, \tag{4}$$

4) лише одній групі може відповідати викладач *v*, дисципліна *l*, вид заняття *z*, аудиторія *a*, день *d,* пара *t*:

$$\sum_{g=1}^{N_4} X_{v,l,z,g,a,d,t} = 1, \tag{5}$$

5) лише одній аудиторії може бути призначений викладач *v*, дисципліна *l*, вид заняття *z*, група *g*, день *d,* пара *t*:

$$\sum_{a=1}^{N_5} X_{v,l,z,g,a,d,t} = 1, \tag{6}$$

Нехай маємо мультимножину $G = \left\{0^{N-K}, 1^{K}\right\}$ з основою $S\left(G\right) = \left(0,1\right)$ та первинною специфікацією $\left[G\right] = \left(N - K; K\right)$, де $N = N_1 \cdot N_2 \cdot N_3 \cdot N_4 \cdot$ $\cdot N_5 \cdot N_6 \cdot N_7$, *K* – кількість елементів розкладу, які треба обрати. Тоді допустимий розв'язок задачі є впорядкованою *K*-вибіркою з множини *G*, тобто елементом загальної множини переставлень $E_K\left(G\right)$:

$$x \in (x_{1111111}, \ldots, x_{N_1,N_2,N_3,N_4,N_5,N_6,N_7}) \in E_k(G) \tag{7}$$

Множина $E_K\left(G\right)$ лежить в вершинах загального переставного многогранника $\Pi_K\left(G\right)$: $x \in \Pi_K\left(G\right)$.

Далі розглянемо обмеження задачі, які задаються у вигляді нерівностей.

Обмеження на кількість годин в тиждень для групи:

$$\sum_{v=1}^{N_1}\sum_{l=1}^{N_2}\sum_{z=1}^{N_3}\sum_{a=1}^{N_5}\sum_{d=1}^{N_6}\sum_{t=1}^{N_7} X_{v,l,z,g,a,d,t} \le T_g \quad \forall\, g \in J_{N_4}, \tag{8}$$

Обмеження на кількість годин в тиждень для викладача:

$$\sum_{l=1}^{N_2}\sum_{z=1}^{N_3}\sum_{g=1}^{N_4}\sum_{a=1}^{N_5}\sum_{d=1}^{N_6}\sum_{t=1}^{N_7} X_{v,l,z,g,a,d,t} \le T_v \quad \forall\, v \in J_{N_1}, \tag{9}$$

Обмеження на кількість пар в день для групи:

$$2 \le \sum_{v=1}^{N_1}\sum_{l=1}^{N_2}\sum_{z=1}^{N_3}\sum_{a=1}^{N_5}\sum_{t=1}^{N_7} X_{v,l,z,g,a,d,t} \le T_{g,d} \quad \forall g \in J_{N_4}, d \in J_{N_6} \tag{10}$$

Обмеження на кількість повторень деяких занять. Наприклад, викладач v_i може бути призначений на дисципліну l_i в групі g_i не більше n_{v_i,l_i,g_i} раз:

$$\sum_{z=1}^{N_3}\sum_{a=1}^{N_5}\sum_{d=1}^{N_6}\sum_{t=1}^{N_7} X_{v_i,l_i,z,g_i,a,d,t} \le n_{v_i,l_i,g_i} \tag{11}$$

Розглянемо також обмеження типу «не призначати». Наприклад, не призначати викладача v_i на час t_i:

$$\sum_{l=1}^{N_2}\sum_{z=1}^{N_3}\sum_{g=1}^{N_4}\sum_{a=1}^{N_5}\sum_{d=1}^{N_6} X_{v_i,l,z,g,a,d,t_i} = -\infty \tag{12}$$

Не призначати викладача v_i на день d_i:

$$\sum_{l=1}^{N_2}\sum_{z=1}^{N_3}\sum_{g=1}^{N_4}\sum_{a=1}^{N_5}\sum_{t=1}^{N_7} X_{v_i,l,z,g,a,d_i,t} = -\infty \tag{13}$$

Не призначати групу g_i і аудиторію a_i:

$$\sum_{v=1}^{N_1}\sum_{l=1}^{N_2}\sum_{z=1}^{N_3}\sum_{d=1}^{N_6}\sum_{t=1}^{N_7} X_{v,l,z,g_i,a_i,d,t} = -\infty \tag{14}$$

Обмеження на відсутність «вікон» у студентів. Наприклад, з першої по четверту або з другої по п'яту пари записуються так:

$$\begin{gathered}\left[\left(X_{vlzgadt_1}\right)^2 + \left(\left(X_{vlzgadt_2}-1\right)\left(X_{vlzgadt_3}-1\right)\ldots\left(X_{vlzgadt_5}-1\right)\right)^2\right]\times \\ \times\left[\left(\left(X_{vlzgadt_1}-1\right)\left(X_{vlzgadt_2}-1\right)\ldots\left(X_{vlzgadt_4}-1\right)\right)^2 + \left(X_{vlzgadt_5}\right)^2 + \right] = 0\end{gathered} \tag{15}$$

6

Суттєвою умовою для складання нового розкладу є обмеження на навчальне навантаження викладача в певній групі з певної дисципліни та форми занять:

$$\underline{K}_{v_i,l_i,z_i,g_i} \le \sum_{a=1}^{N_5}\sum_{d=1}^{N_6}\sum_{t=1}^{N_7} x_{v_i,l_i,z_i,g_i,a,d,t} \le \overline{K}_{v_i,l_i,z_i,g_i}$$

де $\overline{K}_{v_i,l_i,z_i,g_i}$ – максимальна кількість годин на тиждень;

$\underline{K}_{v_i,l_i,z_i,g_i}$ – мінімальна кількість годин на тиждень.

Аналіз задачі дає змогу дещо спростити її розв'язання за рахунок зменшення її вимірності. Так, наприклад, в одну вісь можна об'єднати параметри «викладач-дисципліна-вид заняття», оскільки вони нерозривно зв'язані при складанні навантаження. Також, можливим є об'єднання параметрів «пара-день».

В статті нами була побудована математична модель задачі навчального розкладу та виділено різні можливі типи обмежень щодо його складання.

Інформаційні джерела

1. Муха В. С. Задача ученого расписания: постановка и решение // Проблемы управления и информатики. – 2012. – № 6. – С. 125–136.
2. Конвей Р. В. Теория расписаний / Р. В. Конвей, В. Л. Максвелл, Л. В. Миллер. – М. : Наука, 1975. – 360 с.
3. Танаев С. В. Введение в теорию расписаний / Р. В. Конвей, В. Л. Максвелл, Л. В. Миллер. – М. : Наука, 1975. – 256 с.

УДК 519.1

АЛГОРИТМ ГІЛОК І ГРАНИЦЬ РОЗ'ВЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ВИБОРУ ОПТИМАЛЬНОЇ РЕГРЕСІЙНОЇ МОДЕЛІ ЯК ЗАДАЧІ КОМБІНАТОРНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ ТА ОСОБЛИВОСТІ ЙОГО РЕАЛІЗАЦІЇ

***І. М. Мельник**, к.ф.-м.н., с. н. с.;*
***Г. А. Піднебесна**, пр. ін.*
МННЦІТіС НАН України
ivanmelnyk@ukr.net; pidnebesna@mail.ru

Вступ. Вибір оптимальної регресійної моделі відноситься до класу задач комбінаторної оптимізації. Одним з ефективних методів розв'язання таких задач є метод гілок і границь [1], загальна ідея якого полягає в послідовному конструюванні та переборі тих варіантів рішень задачі, які, згідно з відповідними критеріями, є «перспективними» для подальшого розвитку, і відсіву тих варіантів, які завідомо є «неперспективними».

Постановка задачі. Нехай розглядається складна система, яка характеризується m вхідними (незалежними) змінними (регресорами) $\{x_1, ..., x_i, ..., x_m\}$ та однією вихідною (залежною) змінною y, що мають стохастичний характер і задані вибіркою з n статистичних спостережень цих змінних $S = \{1, ..., n\}$.

Нехай I – довільна підмножина індексів незалежних змінних (регресорів) з множини змінних $MX = \{1,...,m\}$. Регресійна модель на цій підмножині вхідних (незалежних) змінних для вихідної змінної y будується в лінійному вигляді:

$$y = \sum_{i \in I} a_i x_i \ . \tag{1}$$

Задача: необхідно знайти таку підмножину I^*, $I^* \subseteq MX$, яка би мінімізувала значення мінімаксного критерія:

$$F(I*) = min \max_{l \in S} (y^l - \sum_{i \in I} a_i \ (I) \ x_i^l)^2 , \tag{2}$$

де мінімум беретеся за підмножинами I з множини *МХ*, $a_i(I)$ – коефіцієнти регресійної моделі, знайдені за МНК .

Опис алгоритму. В основі алгоритмічної схеми запропонованого алгоритму гілок та границь [2] рішення задачі (2) лежить ідея послідовного розбиття поточної множини допустимих розв'язків на підмножини розгалуження. На кожному кроці елементи розбиття (тобто підмножини розв'язків) піддаються перевірці для з'ясування, чи може дана підмножина містити оптимальний розв'язок.

Загальна задача розв'язується як послідовність m часткових задач пошуку методом гілок і границь субоптимального розв'язку на відповідній підмножині розв'язків. Підмножина номерів змінних k-ї $(k = 1,...,m)$ часткової задачі задається так: $I_k = \{k, k+1,...,m\}$, $I_k \subseteq MX = \{1,...,m\}$, тобто розглядаються всі $X_k = \{x_i, i \in I_k\} = .$ $= \{x_k, x_{k+1},...,x_m\}$ *Нижньою оцінкою* $R(I_k)$ цільової функції (1) для підмножини I_k розв'язків k-ої часткової задачі позначається таке дійсне число, яке обчислюється за формулою:

$$R(I_k) = \sum_{s=1}^{n} (y^s - \sum_{i \in I_k} a_i(I_k) x_i^s)^2 / n . \quad (3)$$

Розгалуження I_k на: $I_k^1 = \{ k, k+1, k+2, ..., k + [(m-k)/2] \}$, $I_k^2 = \{ k, k + [(m-k)/2] + 1, ..., m \}$. Значення нижніх оцінок R_k^1 та R_k^2 цільової функції $F(.)$ для I_k^1 та I_k^2 обчислюються аналогічно (3). Обчислюються значення ймовірностей того, що підмножина I_k^1 та I_k^2 може містить оптимальний розв'язок:

$$P_1^1 = R_k^1 / (R_k^1 + R_k^2), \qquad P_1^2 = R_k^2 / (R_k^1 + R_k^2).$$

Далі стохастичо вибирається «перспективна» підмножина для подальшого розгалуження, обчислюється відповідне значення цільової функції. Підмножини розв'язків, для яких значення оцінок знизу більше значення рекорду, є «неперспективними». Обчислювальний процес продовжується до тех. пір, коли для всіх підмножини, побудованих при розгалуженні, значення нижніх оцінок цільової функції стане більше значення рекорду. Далі переходимо до наступного k.

В [3] наведено чисельний приклад та представлені покрокові результати обчислень (таблиця 1) пропонованого алгоритму для окремного випадку (d_i – структурний вектор).

Висновки. Запропонований алгоритм гілок і границь для розв'язання задачі вибору оптимальної регресійної моделі з мінімаксним критерієм ефективний для не дуже великих розмінностей m. Але, для більшості практичних задач (економіки, медичних досліджень та інших) як раз необхідні не великі розмірності. Тому, що часто головним при цьому необхідно провести значну частину «сценарних» модельних прорахунків для вибору обґрунтованого рішення. Для цього годяться тільки точні алгоритми.

Інформаційні джерела

1. Land A. H., and Doig A. G. An automatic method of solving discrete programming problems // Econometrics. V. 28 (1960). – P. 497–520.
2. Мельник І. М. Метод гілок і границь для розв'язання задачі вибору оптимальної регресійної моделі як задачі дискретної оптимізації // Індуктивне моделювання складних систем. Зб. наук. праць. – К. : МННЦ ІТС НАН України, 2009. – С. 131–139

3. Мельник І. М. / Особливості застосування методу гілок і границь для розв’язання задачі вибору оптимальної регресійної моделі / І. М. Мельник, Г. А. Піднебесна // Індуктивне моделювання складних систем. Зб. наук. праць. – К. : МННЦ ІТС НАН України. – 2012. – № 4.– С. 128–135

УДК 512.54

РІСТ ДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ ІЗОМЕТРІЙ БІНАРНОГО КОРЕНЕВОГО ДЕРЕВА

Д. І. Морозов, *к. ф.-м. н., докторант*
Національний університет «Києво-Могилянська Академія»
denis.morozov178@gmail.com

Поняття росту є одним з основних у сучасній комбінаторній алгебрі, і розглядається для низки алгебраїчних об’єктів. У 1981 році М. Громов дав опис груп поліноміального росту [1]. Кожна така група є скінченним розширенням нільпотентної групи. У 1968 році Дж. Мілнор і Дж. Вольф встановили, що кожна скінченнопороджена розв’язна група має або поліноміальний, або експоненційний ріст. В тому ж році Дж. Мілнор сформулював проблему існування груп проміжного росту. Проблема Мілнора була позитивно розв’язана Р. І. Григорчуком в 1984 році [2]. Було наведено приклад підгрупи в групі скінченностанових групових автоматів, що має проміжний ріст. У 1988 році Р. І. Григорчук одержав результат, аналогічний теоремі Мілнора-Вульфа, для скінченнопороджених напівгруп зі скороченнями.

Для групових скінченно-станових автоматів функція росту є інваріантом спряженості в групі, визначеною операцією суперпозиції таких автоматів.

В доповіді розглядається обчислення функцій росту скінченностанових групових автоматів, що представляються диференційованими ізометріями кореневого дерева [3]. Дослідження змотивоване складністю проблеми скінченно-станової спряженості групових автоматів, яка є на сьогодні не розв’язаною.

Інформаційні джерела

1. Григорчук Р. И. Степени роста конечно-порожденных групп и теория инвариантных средних // Изв.АН СССР. Сер. мат. – 1984. – № 5. – С. 939–985.АН СССР. Сер. мат. – 1984. – № 5. – С. 939–985.

2. M. Gromov, Groups of Polynomial growth and Expanding Maps, Publications mathematiques I.H.É.S., 53, 1981.
3. Denis Morozov, Differentiable finite-state izometries and isometric polynomials of the ring of integer 2-adic numbers. 8th International Algebraic Conference July 5 12 (2011), Lugansk, Ukraine.

УДК 519.716

О ЯДРОВЫХ АКСИОМАХ ВЛОЖЕНИЯ В ТРЕХЗНАЧНОЙ ЛОГИКЕ

А. С. Нагорный, *к. ф.-м. н., м. н. с.*
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
anagorny@list.ru

Пусть $E_3 = \{0,1,2\}$. Функции на E_3 будем называть *функциями трехзначной логики*, множество всех таких функций обозначим через P_3. Замкнутый (относительно операции суперпозиции [1]) класс H функций трехзначной логики назовем *предполным*, если H не равно P_3, но для любой трехзначной функции $f \notin H$ замыкание класса $H \cup \{f\}$ равно P_3.

Известно [2], что в трехзначной логике существует ровно 18 предполных классов. Это

M_0, M_1, M_2 – классы функций, монотонных относительно порядка $2<0<1$, $0<1<2$ и $1<2<0$, соответственно;

U_0, U_1, U_2 – классы функций, сохраняющих разбиение $\{\{0\},\{1,2\}\}$, $\{\{1\},\{2,0\}\}$ и $\{\{2\},\{0,1\}\}$, соответственно;

C_0, C_1, C_2 – классы функций, сохраняющих 2-местный предикат $((x = y) \vee \sigma \in \{x, y\})$, для любого $\sigma \in E_3$, см. [3];

T_0, T_1, T_2 – классы функций, сохраняющих константу 0, 1 и 2, соответственно;

T_{12}, T_{02}, T_{01} – классы функций, сохраняющих соответствую-щие подмножества множества E_3;

B – класс Слупецкого (класс функций, которые имеют не более одной существенной переменной либо принимают не более двух различных значений);

S – класс функций, самодвойственных относительно перестановки (120);

L – класс линейных функций (над полем Галуа $GF(3)$).

Аксиомой вложения в трехзначной логике назовем верное соотношение вида $K_{i1} \cap K_{i1} \cap ... \cap K_{is} \subseteq K_{j1} \cup K_{j1} \cup ... \cup K_{jt}$, устанавливающее связь (включение) пересечений некоторых предполных классов и объединений некоторых (других) предполных классов (здесь $s,t \geq 1$ и $s+t \geq 3$).

Аксиому вложения назовем *тупиковой*, если после удаления любого K_{im} из левой части или K_{jn} из правой части она перестает быть аксиомой (т. е. соответствующее вложение становится ложным). Очевидно, множество всех тупиковых аксиом вложения в трехзначной логике является конечным.

Теорема 1. В трехзначной логике имеется ровно 3602 тупиковых аксиомы вложения.

Тупиковую аксиому вложения назовем *ядровой*, если она логически не следует из всех остальных аксиом вложения.

Теорема 2. В трехзначной логике имеется ровно 58 ядровых аксиом вложения. Все они (с учетом кратности n_i) перечислены в нижеследующей таблице.

i	Axiom(i)	n_i	i	Axiom(i)	n_i
1	$M_0 \cap M_1 \subseteq U_2$	3	2	$M_0 \cap M_1 \subseteq C_2$	3
3	$M_1 \cap U_1 \subseteq C_0$	6	4	$M_1 \cap T_1 \subseteq T_{12}$	6
5	$M_1 \subseteq T_{12} \cup T_{01}$	3	6	$U_0 \cap U_1 \subseteq C_2$	3
7	$C_1 \cap C_2 \subseteq U_0$	3	8	$U_0 \cap T_1 \subseteq T_{12}$	6
9	$C_0 \cap T_1 \subseteq T_{01}$	6	10	$T_{02} \cap T_{01} \subseteq T_0$	3
11	$M_1 \cap U_2 \cap C_2 \subseteq M_0$	6	12	$U_0 \cap U_2 \cap T_{02} \subseteq M_1$	3
13	$M_1 \cap C_1 \cap T_{02} \subseteq U_0$	6	14	$L \subseteq T_0 \cup T_1 \cup T_2 \cup S$	1

Все результаты, изложенные в докладе, являются новыми.

В заключение автор выражает благодарность А. А. Вороненко за постановку задачи и С. С. Марченкову за ценные замечания.

Информационные источники

1. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику / Яблонский С. В. – М. : Наука, 1986. – 384 с.
2. Яблонский С. В. Функциональные построения в k-значной логике / Тр. МИАН СССР им. В. А. Стеклова, 1958. – С. 5–142.
3. Боднарчук В. Г., Калужнин В. А., Котов В. Н., Ромов Б. А. Теория Галуа для алгебр Поста I-II / Кибернетика, 1969. № 3. С. 1–10, № 5. С. 1–9.

УДК 519.8

НЕЧІТКА БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНА ЗАДАЧА УПРАВЛІННЯ ЯКІСТЮ ПОВІТРЯ

В. І. Ночвай, *к. т. н., н. с.*
Інститут проблем моделювання в енергетиці НАН України,
Національний університет Державної податкової служби України
volivn@ukr.net

Управління якістю повітря (УЯП), відноситься до класу задач прийняття рішень, в якій керуючими змінними є величини, що впливають на якість повітряного середовища, що можуть піддаватися регулюванню шляхом задіяння технологічних та економічних механізмів. Найбільш часто використовується величина зниження викидів забруднюючих речовин (ЗР) від окремих підприємств або секторів економіки, а також параметри джерел викидів (потужність, висота труби, координати). Загальна вартість витрат на управляючі дії, як правило, і мінімізується у відповідній задачі умовної оптимізації з обмеженнями технологічного, економічного та екологічного характеру [1–4].

Розв’язання даної задачі вимагає опрацювання значних обсягів даних засобами інформаційних систем [5] із застосуванням сучасних моделей емісіїї та розсіювання ЗР. Особливістю даної задачі є необхідність враховувати неповноту даних, які надходять на вхід моделей і точність використовуваних моделей. При ухваленні рішень щодо управління якістю повітря регіону необхідно враховувати характер господарської діяльності, екологічні та економічні пріоритети, які здебільшого мають нечітке значення. Деякі показники потребують експертних оцінок (економічні, медико-епідемологічні, та ін.). Крім того здебільшого присутня нечіткість технологічних характеристик щодо методів зменшення викидів (сучасні методи регулювання викидів дають інтервальні результати).

На заданій множині допустимих управлінь $Q = \left\{Q_S^{\,j}\right\}$, $0 \le Q_S^{j\ min} \le$ $\le Q_S^{\,j} \le Q_S^{j\ max}$, $s = \left\{1, \ldots, n\right\}$ запишемо типову ситуацію прийняття рішень $\left\{Q, F\right\}$ при наявності цільових функцій $F(Q) = (w_i(Q))$, $i = 1..n_c$ економічного та екологічного характеру [4] з умовою дотримання стандартів якості атмосферного повітря в *k*-зоні $c\left(Q, q\right)_{kj} \le c_{kj_{доп}}$, $j = 1, 2, \cdots, m$, $k = 1, 2, \cdots, n$ та технологічних обмежень $P_{min} \le P_i \le P_{max}$.

В умовах невизначеності параметрів (q) та наявності вектора переваг ρ переваг одержимо векторний критерій $F(Q) = (\rho_1 w_1(Q, q_1),$ $\rho_2 w_2(Q, q_2), \ldots, \rho_{n_c} w_{n_c}(Q, q_{n_c}))$ Розглядається розв'язок задачі методом обмежень $\rho_i w_i(Q, q) \le k_{0\,min}, i = 1 \ldots n_c$

Для врахування в задачі нечітко описаних параметрів [6, 7] будемо вимагати нечіткого виконання нерівностей:

$$F_i = \rho_i w_i(Q, q) \underset{\sim}{\le} z_0; \quad c\left(Q, q\right)_{kj} \underset{\sim}{\le} c_{kj_{доп}};$$

з нечіткими множинамии цільової функції та обмежень:

$$\mu_F(x) = \begin{cases} 0, \text{якщо } F(x) \le z_0; \\ \mu(x, a), \text{якщо } z_0 < F(x) < z_0 + a; \\ 1, \text{якщо } F(x) \ge z + a; \end{cases}$$

$$\mu_c(x) = \begin{cases} 1, \text{якщо } c\left(Q, q\right)_{kj} \ge c_{kj_{доп}} + b; \\ \mu(x, b), \text{якщо } c_{kj_{доп}} < c\left(Q, q\right) < c_{kj_{доп}} + b; \\ 0, \text{якщо } c\left(Q, q\right)_{kj} \le c_{kj_{доп}}; \end{cases}$$

$\mu(x, a), \mu(x, a)$ – функції $X \to [0; 1]$, що описують ступінь виконання відповідних нерівностей з точки зору особи що ухвалює рішення (ОУР). z_0 – деяка прийнятна величина відхилення від ідеальної точки; b , a – пороги задані ОУР для можливих перевищень цієї величини.

Таким чином в доповіді сформульована нечітка багатокритеріальна задача управління якістю повітря, що дозволяє врахувати неповноту та недостовірність даних, нечітко виражені параметри управління, експертні оцінки та переваги ОУР.

Інформаційні джерела

1. Бейко І. В. Моделювання та оптимізація параметрів емісійних процесів у повітряному басейні міста / Бейко І. В., Ночвай В. І. // Математичне та комп'ютерне моделювання. – Камянець-Подільський : Камянець-Подільський національний університет, 2008. – В. 1. – С. 25–32.
2. Bernard E. A. Fisher. Fuzzy approaches to environmental decisions: application to air quality. Environmental Science & Policy 9 (2006). – 22– 31.
3. Pedro Jimenez-Guerrero, Oriol Jorba, Jose M. Baldasano, Santiago Gassy. The use of a modelling system as a tool for air quality management: Annual high-resolution simulations and evaluation. Science of the total environment 390 (2008), pp. 323–340.
4. Qian Zhou, Guo H. Huang, Christine W. Chan. Development of an intelligent decision support system for air pollution control at coal-fired power plants. Expert Systems with Applications 26 (2004). – pp. 335–356.
5. Ночвай В. І. Концептуальна модель інформаційної системи управління якістю повітря / В. І. Ночвай, Р. В. Криваковська // Моделювання та інформаційні технології № 60, 2011. – С. 47–55.
6. Zadeh L. A., Bellman R. E. Decision-making in a fuzzy environment // Management Science, 1970.17 – pp. 1–39.
7. Зайченко Ю. П. Дослідження операцій / Зайченко Ю. П. – К., 2006. – С. 59.

УДК 519.85

ОБЧИСЛЮВАЛЬНІ ЕКСПЕРИМЕНТИ ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ІМІТАЦІЇ ВІДПАЛУ ДЛЯ КОМБІНАТОРНОЇ ЗАДАЧІ ЗНАХОДЖЕННЯ МАКСИМАЛЬНОГО ПОТОКУ

Ю. Ф. Олексійчук
ВНЗ Укоопспілки «Полтавський університет економіки і торгівлі»
olexijchuk@gmail.com

Комбінаторна задача знаходження максимального потоку розглядається, зокрема, в [1–5]. Вона є узагальненням класичної задачі знаходження максимального потоку і є NP-повною [2].

Постановка задачі

Нехай дано граф $\Gamma=(V,U)$, де V – множина вершин, U – множина дуг. Дугу, що сполучає вершини v_i та v_j, позначимо u_{ij}. Нехай графом $\Gamma=(V,U)$ задана транспортна мережа, тобто для кожної із дуг u_{ij} задане деяке невід'ємне число $b_{ij} \geq 0$, яке називають пропускною спроможністю дуги. Вершина, що має лише вихідні дуги, називається джерелом і позначається v_s. Вершина, яка має лише дуги, що входять, називається стоком і позначається v_t.

Означення. Потоком називають функцію $w: U \to R$ з такими властивостями для будь-якої дуги u_{ij}:

1) значення функції w на дузі u_{ij} не може перевищити пропускну спроможність дуги, тобто $w\left(u_{ij}\right) \leq b_{ij}$;

2) збереження балансу у всіх вершинах, крім стоку і джерела, тобто $\sum_{u_{iz} \in U} w\left(u_{iz}\right) = \sum_{u_{zj} \in U} w\left(u_{zj}\right) \ \forall z,\ z \neq s,\ z \neq t$.

Нехай потік по дугах $u_{ij} \in U' \subseteq U$, $\left|U'\right| = k$ може приймати значення, які не перевищують число x_{ij}, що є елементом розміщення із множини $E_{\eta n}^{k}\left(G\right)$, тобто $w\left(u_{ij}\right) \leq x_{ij}$, де $G = \left\{g_1, g_2, ..., g_\eta\right\}$ – деяка мультимножина; причому вектор утворений із x_{ij} є розміщенням елементів із G:

$$x = \left(x_{i_1 j_1}, x_{i_2 j_2}, ..., x_{i_k j_k}\right) \in E_{\eta n}^{k}\left(G\right). \tag{1}$$

Задача полягає у знаходженні максимального потоку та відповідних значень x_{ij}, $w\left(u_{ij}\right)$.

Метод імітації відпалу

Метод імітації відпалу для комбінаторної задачі знаходження максимального потоку запропонований в [5].

Початковим розв'язком є деякий випадковий розв'язок – випадкова перестановка елементів мультимножини G. В якості оцінки F – розв'язок класичної задачі знаходження максимального потоку з пропускними спроможностями $b'_{ij} = min\left\{b_{ij}, x_{ij}\right\}$.

Випадковий пошук розв'язку здійснюється переходом до нової перестановки, яка отримується із попередньої обміном двох елементів місцями. Нехай оцінка нового розв'язку F'.

Перехід до нового розв'язку відбувається з ймовірністю

$$p(\Delta F, T) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } \Delta F > 0 \\ exp(\dfrac{\Delta F}{T}), \text{ якщо } \Delta F < 0 \end{cases} \quad (2)$$

де $\Delta F = F' - F$, T – температура, яка поступово знижується.

Для кожного рівня температури виконується q ітерацій.

Обчислювальні експерименти

Для проведення обчислювальних експериментів створена програмна реалізація на мові *C#*. Для експериментів випадковим чином генерувалися графи. Кожна пара вершин з'єднувалася дугою з ймовірністю 0,3. На кожну дугу накладені комбінаторні обмеження з ймовірністю 0,6. Пропускна спроможність дуги – випадкове рівномірно розподілене ціле числом з відрізку [1; 10]. Основа мультимножини $S(G) = (1,2,3,5,7)$, первинна специфікація $[G] = (t,t,t,t,t)$.

Зниження температури реалізовано наступним чином: $T_i = \alpha T_{i-1}$, $\alpha = 0,9$. Проведено обчислювальні експерименти для різних значень кількостей ітерацій q. Кожна задача розв'язувалася методом імітації відпалу (МІВ) 1 000 разів. Результат порівнювався із результатом жадібного методу [4].

Таблиця 1 – Результати обчислювальних експериментів, $q = 20$

n	t	Час розв'язання жадібним методом, с	Час розв'язання МІВ, с		Відсоток запусків МВІ, при яких отримувався максимальний розв'язок, %
			Найгірший	Середній	
10	3	<0,0001	0,0843	0,0390	100,0
20	14	<0,0001	0,2205	0,1415	100,0
30	32	<0,0001	0,3463	0,3378	97,9
40	57	0,0085	0,7236	0,5122	99,5
50	90	0,0873	1,3101	1,0404	87,1
60	129	0,0506	1,4019	1,1715	80,5
70	176	0,2135	2,2676	1,7067	66,3
80	230	0,2902	3,2233	2,8377	34,8
90	291	0,2685	4,6293	2,6893	9,1
100	360	0,3205	5,3440	4,3058	3,6

Для $q = 20$ оптимальне значення цільової функції для жадібного методу і методу імітації відпалу співпадало для задач вимірністю до 100 (табл. 1), для $q = 10$ – для задач вимірністю до 60, для $q = 1$ – для задач вимірністю до 40. Причому відсоток запусків методу імітації відпалу, при яких досягалося максимальне значення цільової функції, зменшувався із збільшенням n. Час розв'язку задачі прямо пропорційний кількості ітерацій q.

Актуальним є проведення обчислювальних експериментів для різних типів функцій зниження температури.

Інформаційні джерела

1. Ємець О. О. Знаходження максимального потоку в мережі з додатковими комбінаторними обмеженнями / О. О. Ємець, Є. М. Ємець, Ю. Ф. Олексійчук // Таврический вестник информатики и математики. – 2011. – № 1. – С. 43–50.
2. Емец Е. М. NP-трудность комбинаторной задачи нахождения максимального потока / Е. М. Емец, Ю. Ф. Олексийчук // Таврический вестник информатики и математики. – 2012. – № 2. – С. 36–44.
3. Ємець О. О. Комбінаторна задача знаходження максимального потоку та метод гілок та меж для її розв'язування / О. О. Ємець, Є. М. Ємець, Ю. Ф. Олексійчук // Вісник Запорізького національного університету : збірник наукових статей. Фізико-математичні науки. – 2012. – № 1. – С. 91–98.
4. Ємець О. О. Поліноміальний метод наближеного розв'язання комбінаторної задачі знаходження максимального потоку в мережі / О. О. Ємець, Є. М. Ємець, Ю. Ф. Олексійчук // Доповіді Національної академії наук України. – 2013. – № 4. – С. 33–37.
5. Ємець О. О. Метод імітації відпалу для комбінаторної задачі знаходження максимального потоку / О. О. Ємець, Є. М. Ємець, Ю. Ф. Олексійчук // Матеріали IV Всеукраїнської науково-практичної конференції «Інформатика та системні науки» (Полтава, 21–23 берез. 2013 р.) – Полтава : ПУЕТ, 2013. – С. 100–103.

УДК 519.14

ИССЛЕДОВАНИЕ И МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧ КЛАССА NP

А. Д. Плотников, *к. т. н., профессор*
Восточноукраинский национальный университет имени В. Даля
a.plotnikov@list.ru

Докладываются результаты, опубликованные в 26 работах и посвященные задачам исследования и моделирования задач класса NP.

Введено понятие конструктивной комбинаторной задачи (ККЗ). Определен последовательностный принцип построения решения задачи. Построена теоретико-множественная модель комбинаторных задач. Введено понятие задачи без передвидения *UF*. Рассматривается решение знаменитой проблемы «*P versus NP*», доказывается, что $P \neq NP$ и показывается, что необходимо рассматривать проблему «*P vs UF*». Предложена также методика решения задач класса NP. Уточняется понятие класса задач, решаемых недетерминированной машиной Тьюринга.

Построена теоретико-множественная модель экстремальной комбинаторной задачи (ЭКЗ). Исследованы теоретико-множественные свойства таких задач. Получены новые результаты для задачи о взвешенном независимом множестве вершин графа. Выполненное исследование теоретико-множественных свойств ЭКЗ позволяет рассматривать задачи, имеющие различную форму постановки, с единой точки зрения, установить их общность. Анализ показал, что вспомогательные множества для любого частичного решения задачи можно построить эффективно, если рассматриваемая задача принадлежит классу UF задач без предвидения.

Представляется также, что особый интерес имеет каноническая форма представления задач. Целесообразно выполнить дальнейшие исследования этой формы представления ЭКЗ. Интересно также проследить связь между возможностями построения эффективного решающего алгоритма и канонической формой задачи.

Рассмотрено решение задачи о не взвешенном наибольшем независимом множестве вершин в неориентированном графе. Определено понятие правильно построенного орграфа. Введено понятие вершинно-насыщенного орграфа и разработана процедура его построения. Предложена гипотеза о свойстве ВН-орграфа. Разработан эвристический *полиномиально-временной* алгоритм решения задачи поиска

НБНМ. Выполнен численный эксперимент и получены практические результаты решения задачи на сложных графах, которые подтвердили корректность работы алгоритма.

Предложен критерий существования гамильтонова цикла в графе. В результате исследования гамильтоновости графа были установлены необходимые и достаточные условия существования гамильтонова цикла в графе. Доказывается, что граф гамильтонов тогда и только тогда, когда число элементов в любом его независимом множестве вершин не превышает числа вершин в минимальном отделяющем множестве для цепей, связывающих между собой эти независимые вершины. Разработана логическая модель гамильтонова графа. Полученная модель есть логическая формулировка условий для существования гамильтонова цикла и она использует m булевых переменных, где m есть число ребер графа. Это булево выражение истинно тогда и только тогда, когда исходный граф является гамильтоновым. В общем случае полученное булево выражение может иметь экспоненциальную длину (число булевых литералов) и может быть использовано для построения решающего алгоритма. На основе построенной модели рассмотрены некоторые пути решения задачи поиска гамильтонова цикла.

Доказана возможность сведения задачи ВЫП к задаче о покрытии. Предложен эвристический полиномиально-временной алгоритм слепого поиска решения задачи ВЫП. Разработана графовая модель минимизации булевой функции. Для задачи нахождения кратчайшей ДНФ предлагается строить специальный граф, отличный от обычного единичного n−мерного куба. Доказывается, что решение исходной задачи эквивалентно разбиению построенного графа на минимальное число клик.

Найдены также необходимые и достаточные условия представления заданного орграфа соответствующим ч.у.м. размерности *dim 2*. Определена нижняя граница числа всё-или-ничего (*all-or-none*) орграфов.

Информационные источники

1. Plotnikov A. D. On the Relationship between Classes P and NP / A. D. Plotnikov // Journal of Computer Science. – 2012. – Vol. 8. – N 7. – pp. 1036–1040. (http://thescipub.com/pdf/10.3844/jcssp.2012.1036.1040).
2. Плотников А. Д. Эвристический алгоритм для поиска наибольшего независимого множества / А. Д. Плотников // Кибернетика и системный анализ. – 2012 . – № 5. – С. 41– 48.

3. Plotnikov A. D. Problems of the class NP: Research and simulating / A. D. Plotnikov. – Saarbrucken : LAP Lambert Academic Publishing, 2011. – 145 p.
4. Plotnikov A. D. The lower bound of the number of all-or-none dags / A. D. Plotnikov // Advanced Studies in Contemporary Mathematics. – 2006. – Vol. 12. – N 2. – pp. 323– 326.
5. Plotnikov A. D. About presentation of a digraph by dim 2 poset / A. D. Plotnikov // Advanced Studies in Contemporary Mathematics. – 2006. – Vol. 12. – N 1. – pp. 55– 60.
6. Plotnikov A. D. A logical model of HCP / A. D. Plotnikov // International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. Hindawi Publishing Corporation. – 2001. – Vol. 26. – N 11. – pp. 679–684.
7. Плотников А. Д. Логическая модель задачи поиска гамильтонова цикла / А. Д. Плотников // Материалы конф. «Дискретный анализ и исследование операций». – Новосибирск : Ин-т математики им. С. Л. Соболева СО РАН. – 2000. – С. 101.
8. Plotnikov A. D. One criterion of existence of a hamiltonian cycle / A. D. Plotnikov // Reliable Computing journal. – 1998. N 4. – pp. 199–202.
9. Плотников А. Д. Об уточнении класса задач, решаемых недетеминированной машиной Тьюринга / А. Д. Плотников // журнал «Кибернетика и системный анализ», 1997. – № 5. – С. 30–36.
10. Плотников А. Д. О задаче нахождения независимого множества вершин графа / А. Д. Плотников // Кибернетика. – 1989. – № 1. – С. 119–121.

УДК 519.8

О ПРИМЕНЕНИИ ОТНОСИТЕЛЬНЫХ МЕР СХОДСТВА ПО РАССТОЯНИЮ

И. И. Рясная;
riasnaia@gmail.com;
А. Е. Сенько; *;*
А. Н. Ходзинский, *к. ф. м.-н. наук, с. н. с.*
Институт кибернетики имени В. М. Глушкова НАН Украины

Относитльная мера сходства – важное понятие, применяемое при решении задач кластерного анализа в рамках интеллектуальных информационных технологий и технологии Data Mining [1]. Одно из основных требований в этих областях является интерпретируемость результатов исследований.

В данном докладе рассматриваются вопросы применения относительных мер сходства в задачах построения нечетких кластеров с точки зрения интерпретируемости получаемых результатов.

Пусть $X = \{x_i\}_{i=1}^{Q}$ – множество N-атрибутных образцов данных.

Мерой сходства по расстоянию с образцом x_q называется функция принадлежности

$$\mu_{x_q} : X \to [0,1], \ \mu_{x_q}(x_i) = 1 - d(x_q, x_i)/K, \ x_q, \ x_i \in X,$$

где K – коэффициент, выбираемый таким образом, чтобы обеспечить ограничения.

Нормальной мерой сходства называется такая мера, которая достигает своих граничных значений на множестве X.

Рекомендуется использовать следующий конструктивный способ определения значений функции принадлежности [1]

$$\mu_{x_q}(x_i) = 1 - d(x_q, x_i) \Big/ \max_{k\in[1,Q]} \left(d(x_q, x_k)\right), \quad i = 1, \ldots, Q.$$

Относительной мерой сходства двух образцов данных x_i, x_k относительно третьего x_q называется функция $\xi_{x_q} : X \times X \to [0,1]$,

$$\xi_{x_q}(x_i, x_k) = 1 - \left|\mu_{x_q}(x_i) - \mu_{x_q}(x_k)\right|, \quad x_q, \ x_i, \ x_k \in X.$$

Семейство функций принадлежности $\xi_{x_1}, \ldots, \xi_{x_Q}$ используется в дальнейшем для получения функции принадлежности результирующего нечеткого отношения сходства

$$\xi(x_i, x_k) = \min\left(\xi_{x_1}(x_i, x_k), \ \xi_{x_2}(x_i, x_k), \ \ldots, \ \xi_{x_Q}(x_i, x_k)\right).$$

Однако следующий пример показывает сложность интерпретации расчетов функции принадлежности, получаемой по данной формуле. Пусть $N = 2$, $Q = 4$, $x_1 = (1,4)$, $x_2 = (2,3)$, $x_3 = (4,1)$, $x_4 = (6,3)$. В табл. 1 – табл. 3 приведены результаты вычислений значений $d(x_q, x_i), \mu_{x_q}(x_i), \ \xi(x_i, x_k), \ i,k,q \in \{1, \ldots, 4\}$.

Таблица 1

Евклидово расстояние				
	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0	1,41	4,24	5,10
x_2	1,41	0	2,83	4
x_3	4,24	2,83	0	2,83
x_4	5,10	4	2,83	0

Таблица 2

Нормальные меры сходства				
	x_1	x_2	x_3	x_4
$\mu_{x_1}(x_i)$	1	0,724	0,169	0
$\mu_{x_2}(x_i)$	0,647	1	0,292	0
$\mu_{x_3}(x_i)$	0	0,333	1	0,333
$\mu_{x_4}(x_i)$	0	0,216	0,445	1

Сравнение данных из таблиц указывает на существенные погрешности методики оценки величины сходства. Например, согласно табл. 1, $d(x_1,x_3) < d(x_1,x_4)$, в то время как согласно табл. 3. $\xi(x_1,x_3) = \xi(x_1,x_4) =$ = 0. Кроме того, $d(x_2,x_3) = d(x_4,x_3)$, в то время как $\xi(x_2,x_3) < \xi(x_4,x_3)$. $\xi(x_1,x_3) = \xi(x_1,x_4) = 0$

Таблица 3

Результирующая матрица отношения сходства $\xi(x_i,x_k)$				
	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	0,647	0	0
x_2	0,647	1	0,292	0
x_3	0	0,292	1	0,333
x_4	0	0	0,333	1

В докладе проведен анализ причин возникающих погрешностей.

Выводы. Оценки сходства объектов, основанные на вычислении относительной меры сходства по расстоянию, содержат методическую погрешность, существенно изменяющую характер сходства объектов. Следовательно, при их использовании для решения прикладных задач на базе кластерного анализа могут возникать проблемы с интерпретацией полученных результатов.

Информационные источники

1. Методы и модели анализа данных: OLAP и Data Mining. / Барсегян А. А., Куприянов М. С., Степаненко В. В., Холод И. И. – С.Пб. : БХВ-Петербург, 2004. – 336 с.

УДК 519.7

О СХЕМНОЙ СЛОЖНОСТИ НАХОЖДЕНИЯ ПОЛИНОМОВ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

С. Н. Селезнева, *к. ф.-м. н., доцент*
факультет ВМК МГУ им. М. В. Ломоносова
selezn@cs.msu.su

Настоящая работа относится к изучению схемной сложности линейных булевых (n,m)-операторов в базисе $\{x \oplus y\}$ из одного элемента сложения по модулю 2. Каждая линейный булев (n,m)-оператор может быть задан в виде Ax, где A – матрица из нулей и единиц размера $m \times n$, а $(x_1, \dots, x_n)$ – вектор переменных. Поэтому иногда схемная сложность таких операторов называется *схемной сложностью матрицы* A. Несмотря на простоту определения, линейными булевыми операторами задается ряд важных содержательных преобразований. Одно из них - преобразование вектора значений булевой функции от n переменных в вектор коэффициента ее полинома Жегалкина. Это преобразование называется *преобразованием Мёбиуса* μ_n. Оно задается матрицей A_n размера $2^n \times 2^n$, определяемой рекурсивно: $A_0 = (1)$, $A_{n+1} = \begin{pmatrix} A_n & 0 \\ A_n & A_n \end{pmatrix}$. Иногда эта матрица A_n называется *матрицей Серпинского*, или матрицей *Паскаля по модулю два*.

Базис $\{x \oplus y\}$ не является полным, однако ситуация в нем принципиально иная, чем в неполном монотонном базисе из одного элемента дизъюнкции $\{x \vee y\}$, ввиду наличия тождества $x \oplus x = 0$.

Известно не так много оценок схемной сложности в базисе $\{x \oplus y\}$ явно определенных матриц. В [1, 2] было показано, что при $m \le \log_2 n$ сложность любой матрицы размера $m \times n$ в базисе $\{x \oplus y\}$ равна $2n - o(n)$. В частности, сложность проверочной матрицы кода Хэмминга H_k размера $k \times 2^k$ равна $2 \cdot 2^k - 2k - 2$. Некоторой техникой из этой матрицы можно сконструировать матрицу размера $n \times n$, сложность которой в базисе $\{x \oplus y\}$ равна $3n - o(n)$ [1, 2]. В [3] доказано, что сложность булевой матрицы Адамара-Сильвестра размера $2^k \times 2^k$ в базисе $\{x \oplus y\}$ равна $O(2^k)$. Матрица называется *матрицей без прямоугольников*, если в ней нет подматриц вида $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. В [4] построена матрица без прямоугольников размера $n \times n$, сложность которой в базисе $\{x \oplus y\}$ равна $3n - o(n)$.

Пусть $B = \{0,1\}$. Множество B^n, $n \ge 1$, назовем n-мерным булевым кубом. На кубе B^n введем частичный порядок: если $\alpha = (a_1, \dots, a_n) \in B^n$ и $\beta = (b_1, \dots, b_n) \in B^n$, то $\alpha \le \beta$ при $a_1 \le b_1, \dots, a_n \le b_n$. Отображение $f: B^n \to B$ называется *булевой функцией* от n переменных, $n = 0,1,2, \dots$. Множество всех булевых функций от n переменных обозначим как B_n. *Вектором значений* функции $f \in B_n$ назовем вектор $u_f = (u_0, u_1, \dots, u_{2^n-1})$, в котором $u_j = f(\alpha_j)$, где $\alpha_j = (a_{j1}, \dots, a_{jn})$ такой набор, что $j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} 2^{n-i}$, $j = 0, 1, \dots, 2^n - 1$. Каждая булева функция $f(x_1, \dots, x_n) \in B_n$ может быть задана формулой вида

$$\sum_{\sigma=(s_1,\dots,s_n)\in B^n} c_f(\sigma) x_1^{s_1} \dots x_n^{s_n},$$

где $c_f(\sigma) = \sum_{\tau \le \sigma} f(\tau) \in B$ – коэффициенты, $x_i^{s_i}$ – степени, т. е. $x_i^1 = x_i$, $x_i^0 = 1$, и сложение и умножение проводится по модулю 2. Это представление булевых функций называется *полиномом Жегалкина*, или *алгебраической нормальной формой* (АНФ). Вектор значений u_{c_f} булевой функции $c_f \in B_n$ называется *вектором коэффициентов полинома* функции $f \in B_n$. Преобразование вектора значений булевой функции от n переменных в вектор коэффициентов ее полинома является линейным булевым $(2^n \times 2^n)$-операторм с матрицей A_n, т. е. для произвольной булевой функции $f \in B_n$ верно $u_{c_f} = A_n u_f$. Это преобразование вектора значений булевой функции в вектор коэффициентов ее полинома называется *преобразованием Мёбиуса* μ_n. *Сложностью* $L_{\oplus}(y)$ линейного булева оператора $y = Ax$ в базисе $\{x \oplus y\}$ называется сложность минимальной схемы в этом базисе, реализующей этот оператор. Сложность $L_{\oplus}(y)$ обозначают также как $L_{\oplus}(A)$ и называют *сложностью матрицы* A в базисе $\{x \oplus y\}$. Пользуясь представленим

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1\big(f(0, x_2, \dots, x_n) + f(1, x_2, \dots, x_n)\big) + f(0, x_2, \dots, x_n),$$

верным для произвольной булевой функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in B^n$, можно заключить, что $L_{\oplus}(\mu_n) \le 2L_{\oplus}(\mu_{n-1}) + 2^{n-1}$. Откуда получаем [5], что $L_{\oplus}(\mu_n) \le n \cdot 2^{n-1}$ при $n \ge 1$. Заметим, что в модели схем с некоторым ограничением структуры в базисе $\{x \oplus y\}$ доказана такая же нижняя оценка сложности преобразования Мёбиуса [6-8].

В настоящей работе мы доказываем следующие оценки.

Теорема 1. *При* $n \ge 1$ *верно* $L_{\oplus}(\mu_n) \ge 2 \cdot 2^n - (n + 2)$.

Теорема 2. *Имеет место равенство* $L_{\oplus}(\mu_2) = 4$.

Теорема 3. *Имеет место равенство* $L_{\oplus}(\mu_3) = 12$.

Работа поддержана РФФИ, гранты 12-01-00706-а, 13-01-00684-а, 13-01-958-а.

Информационные источники

1. Чашкин А. В. О сложности булевых матриц, графов и соответствующих им булевых функций // Дискретная математика, 1994. – Т. 6. – № 2. – С. 43–73.
2. Interlando J. C., Byrne E., Rosenthal J. The Gate Complexity of Syndrome Decoding of Hamming Codes // Applications of Computer Algebra (ACA-2004), pp. 1–5.
3. Alon N., Karchmer M., Wigderson A. Linear circuits over GF(2) // SIAM J. Comput. 1990. Vol. 19. – No 6. – pp. 1064–1067.
4. Селезнева С. Н. О схемной сложности некоторых булевых матриц //

Тихоновские чтения: Научная конференция, МГУ имени М. В. Ломоносова, 29–31 октября 2012 г. Тезисы докладов. М. : МАКС -Пресс, 2012. – С. 44–45.
5. Гаврилов Г. П. Сборник задач по дискретной математике / Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А. – М. : Наука, 1977.
6. Kennes R. Computational Aspects of the Mobius Transformation of Graphs // IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics. 1992. Vol. 22. – N. 2. – pp. 201–223.
7. Boyar J., Find M. C. Cancellation-free circuits: An approach for proving superlinear lower bounds for linear Boolean operators. //2012. ArXiv.org > cs > arXiv. 1207.5321.
8. Selezneva S. N. Lower bound on the complexity of finding polynomials of Boolean functions in the class of circuits with separated variables // Computational Mathematics and Modeling, 2013. Vol. 24. – N 1. – pp. 146–152.

УДК 519.816

ВХІДНІ ДАНІ ТА АРГУМЕНТ ЦІЛЬОВОЇ ФУНКЦІЇ В ЗАДАЧАХ КОМБІНАТОРНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ

Н. К. Тимофієва, *д. т. н., с. н. с.*
МННЦІТіС НАН та МОН України (Київ)
tymnad@gmail.com

Вступ. Показано, що аргументом цільової функції в задачах комбінаторної оптимізації є комбінаторні конфігурації різних типів, а не вхідні дані. Цільова функція може залежати як від однієї так і багатьох змінних.

Основна частина. Задачі комбінаторної оптимізації, як правило, задаються на одній або кількох множинах, елементи яких мають будь-яку природу. Має місце два типи задач [1]. У першому типі між елементами цих множин існують зв'язки, числове значення яких називають вагами і задаються матрицями. У другому типі між елементами заданої множини зв'язків не існує, а вагами виступають числа, яким у відповідність поставлено деяку властивість оговорених елементів. В подальшому ці величини назвемо вхідними даними. В обох типах задач з елементів однієї із заданих множин утворюється комбінаторна множина – сукупність об'єктів комбінаторної природи певного типу (перестановки, вибірки різних типів, робиття, тощо). На елементах комбінаторної множини уводиться цільова функція $F(w)$. Необхідно знайти елемент комбінаторної множини, для якого $F(w)$ набуває оптимального значення при виконанні заданих обмежень.

Отже, в задачах комбінаторної оптимізації оптимальне значення цільової функції знаходиться на множині комбінаторного характеру, а аргументом цільової функції є комбінаторні конфігурації певних типів.

При розробленні математичних моделей задач цього класу досить часто як аргумент цільової функції визначають не комбінаторні конфігурації, а вхідні дані. Цільову функцію ототожнюють з критеріями.

Уточнимо такі поняття як критерій і цільова функція.

Критерій – ознаки або властивості, які характеризують певний об'єкт або зв'язки між ними, числове значення яких – вхідні дані.

Цільова функція – вираз, який моделюється на основі заданих критеріїв з урахуванням специфіки задачі, за яким обчислюється і оцінюється результат її розв'язку. Для одних і тих же критеріїв цільову функцію можна змоделювати по-різному, тобто оцінку проводити за різними виразами і отримати різний результат.

Для розроблення математичних моделей задач комбінаторної оптимізації досить часто використовують цілочислове лінійне програмування. Ця задача полягає у знаходженні оптимального значення цільової функції на множині, яка задається системою лінійних рівнянь і нерівностей, причому на змінні накладаються умови цілочисельності. Цільова функція в ній – сумарний добуток значень послідовності змінних $x_1,...,x_n$ та послідовності заданих коефіцієнтів $c_1,...,c_n$, тобто $\sum_{i=1}^{n} c_i\, x_i$.

Цей вираз називають лінійною функцією.

Задача цілочислового лінійного програмування полягає в знаходженні множини змінних, для якої досягається оптимальний розв'язок, і яка не є комбінаторною конфігурацією.

Цілочислове лінійне програмування розроблялося для економічних задач, які відносяться до другого типу. Аргументом цільової функції в них, як правило, є вибірки (сполучення, розміщення), а вхідні дані – послідовність значень, кожне з яких визначає властивість певного елементу. Їхня кількість збігається з кількістю елементів у певній комбінаторній конфігурації. Звідси твердження, що послідовність вхідних даних $x_1,...,x_n$ є аргументом цільової функції. Ця послідовність ототожнюється з комбінаторною конфігурацією і вважають, що цільова функція залежить від багатьох змінних. Але послідовність $x_1,...,x_n$ є вхідними даними певної задачі, а значення x_i неявно залежить від комбінаторної конфігурації, тобто задану лінійну функцію $\sum_{i=1}^{n} c_i\, x_i$ варто записати у такому вигляді: $F(w) = \sum_{i=1}^{n} c_i\, x_i(w)$ Тоді постає проблема визначення цієї залежності в задачах комбінаторної оптимізації. Для цього необхідно розробляти формальні постановки прикладних задач з використанням теорії комбінаторної оптимізації та враховувати їхню комбінаторну природу.

Прикладні задачі комбінаторної оптимізації, як правило, складні за своєю природою і розділяються на підзадачі, для розв’язання яких розробляють незалежні алгоритми, за допомогою яких основна задача розв'язується послідовною роботою цих алгоритмів або вони працюють як вбудовані процедури в ітераційному режимі. Алгоритм, який об’єднує у собі незалежні алгоритми, орієнтовані на розв'язання певних задач, називається гібридним.

Можна довести, що в задачах комбінаторної оптимізації, які розділяються на незалежні підзадачі різних класів, цільова функція залежить від кількох змінних (комбінаторних конфігурацій різних типів).

Висновок. Моделювання прикладних задач з використанням теорії комбінаторної оптимізації показує, що цільова функція для різних задач цього класу залежить як від однієї змінної так і від кількох, якими є різні типи комбінаторних конфігурацій а не елементи послідовності, якою задаються вхідні дані.

Інформаційні джерела

1. Тимофієва Н. К. Теоретико-числові методи розв’язання задач комбінаторної оптимізації : автореф. дис... докт. техн. наук / Ін-т кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України. – К., 2007. – 32 с.

УДК 519.21

О НЕКОТОРЫХ ВАРИАЦИЯХ ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ НЕЧЕТКИХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН*

Р. Н. Гордеев, *к. ф.-м. н., доцент кафедры ИТ*
Тверской государственный университет
roman.gordeev@mail.ru

**Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 12-01-31339.*

Нечеткие случайные переменные были введены как полезная и хорошо формализованная модель случайных величин, принимающих свои значения на нечетком множестве. За последние два десятилетия эта формализация получила широкое распространение, было раз работано несколько подходов, описывающих возможностную (нечеткую) составляющую этих случайных величин. Среди них можно выделить работы, направленные в первую очередь на изучение измеримости нечетких случайных величин (Пури и Ралеску [7], Клемент [3], Язенин [8], Колуби [2]), и работы, посвященные изучению применимости заокона больших чисел для нечетких случайных величин (Колуби [1], Молочанов [5], Пури [6]).

Тем не менее, статистические аспекты и варианты возможного приоменения нечетких случайных величин в литературе до сих пор освещены недостаточно. И хотя некоторые из центральных предельоных теорем были рассмотрены для нечетких случайных величин в работах Ли [4], они не позволяют сформулировать следствия, аналогичные тем, которые имеют место быть для вещественных случайных величин. Изучению этих проблем и посвящена настоящая работа.

Кроме того, в работе рассматриваются формы представления нечетких случайных величин, описывающие процесс преобразования вещественных случайных величин в нечеткие случайные величины, которые позволяют сделать выводы о численных характеристиках исходной вещественной случайной величины на основе визуального анализа функции распределения возможностей ожидаемого значения нечеткой случайной величины. Наличие подобных форм представления позволяет использовать графические методы анализа для оценки численных характеристик случайных величин без необходимости производить аналитические вычисления.

Інформаційні джерела

1. Colubi, A., Domínguez-Menchero, J. S., López-Díaz, M., Gil, M. A., 1999. A generalized strong law of large numbers. Probab. Theory Related Fields 114, 401–417.
2. Colubi, A., Domínguez-Menchero, J. S., López-Díaz, M., Ralescu, D. A., 2002. ADE [0, 1]-representation of random upper semicontinuous functions. Proc. Amer. Math. Soc. 130, 3237–3242.
3. Klement, E. P., Puri, M. L., Ralescu, D. A., 1986. Law of large numbers and central limit theorems for fuzzy random variables. In: Trappl, (Ed.), Cybernetics and Systems Research, vol. 2. Elsevier, North-Holland, Amsterdam, pp. 525–529.
4. Li, S., Ogura, Y., Proske, F. N., Puri, M. L., 2003. Central limit theorems for generalized set-valued random variables. J. Math. Anal. Appl. 285, pp. 250–263.
5. Molchanov, I., 1999. On strong laws of large numbers for random upper semicontinuous functions. J. Math. Anal. Appl. 235, 349–355.
6. Proske, F. N., Puri, M. L., 2002. Strong law of large numbers for Banach space valued fuzzy random variables. J. Theoret. Probab. 15, 543–551.
7. Puri, M. L., Ralescu, D. A., 1986. Fuzzy random variables. J. Math. Anal. Appl. 114, 409–422.
8. Yazenin A. V., Wagenknecht M. Possibilistic optimization. Cottbus, Germany, 1996.

УДК 519.8

ПРИМЕНЕНИЕ МЯГКИХ ВЫЧИСЛЕНИЙ ДЛЯ АНАЛИЗА ГЕТЕРОГЕННЫХ ДАННЫХ*

Р. Н. Гордеев, *к. ф.-м. н., доцент;*
Н. В. Звягинцев*, аспирант*
Тверской государственный университет
roman.gordeev@mail.ru

**Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 12-01-31339.*

В условиях расширения спектра задач, решаемых на различных уровнях управления, актуальной стала проблема визуализации и управления большими массивами показателей. Важность решения возникшей проблемы и необходимость разработки соответствующих научно-методических положений была обусловлена:

а) во-первых, резким увеличением количества обрабатываемых показателей в социально-экономической и научно-технической сферах;

б) во-вторых, недостаточным уровнем развития традиционной методологии обработки структурированной информации;

в) в-третьих, отсутствием инструментальных средств визуализации показателей и связей между ними.

В результате возникло противоречие между практической потребностью управления большими массивами показателей в среде единого информационного пространства и отсутствием соответствующего научно-технического задела, позволяющего обеспечить удовлетворение этой потребности.

В работе предлагается решение данных задач, основанное на использовании мягких вычислений, в частности нейронных сетей и эволюционных алгоритмов. Принцип работы алгоритма, реализованного для предварительного анализа исходных данных и решения задачи отбора входных переменных для конкретного случая прогнозирующей искусственной нейронной сети (ИНС) [1], базируется на сочетании ИНС и генетического алгоритма (ГА) [2, 3].

Информационные источники

1. Хайкин С. Нейронные сети. Полный курс / Хайкин С. – М. : Вильямс, – 2006.
2. Кричевский М. Л. Интеллектуальные методы в менеджменте / Кричевский М. Л. – С.Пб. : Питер, 2005. – 304 с.
3. Дубровин В. И. Субботин С. А. Оценка значимости признаков с фиксацией значений // Нейронные сети и модели в прикладных задачах науки и техники : труды международной конференции КЛИН-2002 – Ульяновск : УлГТУ, 2002. – Т. 3. – С. 101–102.
4. Ежов А. А. Нейрокомпьютеринг и его применение в экономике и бизнесе / Ежов А. А., Шумский С. А. – М. : Диалог-МИФИ, 1998.
5. Thomas Back, David B. Fogel, Zbignew Michalewicz. Evolutionary Computation 1. Basic Algorithms and Operators. Institute of Physics Publicshing, Bristol, 2000.
6. Benoît Frénay, Gauthier Doquire, Michel Verleysen. Is mutual information adequate for feature selection in regression? // Neural Networks (48). – 2013. – p. 1–7
7. Chunhua Shena, Hanxi Lib, Anton van den Hengela. Fully corrective boosting with arbitrary loss and regularization // Neural Networks (48). - 2013. – p. 44–58
8. Hirotsugu Okuno, Tetsuya Yagi. A visually guided collision warning system with a neuromorphic architecture // Neural Networks (10). – V. 21. – 2008. – p. 1431–1438

ІНФОРМАЦІЯ ПРО СЕМІНАР

Семінар проводиться під егідою:

– Міністерства освіти і науки України;

– Національної академії наук України;

– Центральної спілки споживчих товариств України;

– Української Федерації Інформатики.

Співорганізатори конференції:

– Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова Національної академії наук України;

– Інститут проблем машинобудування імені А. М. Підгорного Національної академії наук України;

– Київський національний університет імені Тараса Шевченка;

– Вищий навчальний заклад Укоопспілки «Полтавський університет економіки і торгівлі».

На семінар представлено 28 доповідей.

В семінарі прийняло участь: 2 члени-кореспонденти Національної академії наук України, 12 докторів наук, 17 кандидатів наук. Усього 44 учасника з 11 міст України, Росії та Білорусії з таких організацій:

– Білоруський державний економічний університет (м. Мінськ),

– Вищий навчальний заклад Укоопспілки «Полтавський університет економіки і торгівлі»;

– Запорізький національний університет;

– Запорізький національний технічний університет;

– Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова Національної академії наук України (м. Київ);

– Інститут проблем машинобудування імені А. М. Підгорного Національної академії наук України (м. Харків);

– Інститут проблем моделювання в енергетиці Національної академії наук України (м. Київ);

– Київський національний університет імені Тараса Шевченка;

– Київський університет імені Бориса Грінченка;

– Міжнародний науково-навчальний центр інформаційних технологій та систем Національної академії наук та Міністерства освіти і науки України (м. Київ);

– Московський державний університет імені М. В. Ломоносова (Росія);

– Національний університет Державної податкової служби України (м. Ірпінь);

– Національний університет «Києво-Могилянська Академія» (м. Київ);
– Національний університет «Львівська політехніка»;
– Полтавський національний педагогічний університет імені В. Г. Короленка;
– Східноукраїнський національний університет імені В. Даля (м. Луганськ);
– Тверський державний університет (м. Твер);
– Український державний хіміко-технологічний університет (м. Дніпропетровськ).

Семінар працював за напрямами:

1. Комбінаторна оптимізація та суміжні питання.
2. Нечіткі множини: теорія, застосування.
3. Сучасні проблеми оптимізації та невизначеності в прийнятті рішень.
4. Сучасні проблеми комбінаторики.

Наші контакти

Тел.: (0532) 509-204.
E-mail: contacts@informatics.org.ua, yemetsli@mail.ru, yemets2008@ukr.net.
Сайти: www.informatics.org.ua, www.pusku.edu.ua,
www.matmodel.uccu.org.ua.
Поштова адреса: 36014, м. Полтава, вул. Коваля, 3, Полтавський університет економіки і торгівлі; кафедра математичного моделювання та соціальної інформатики (ММСІ).

Наукове видання

КОМБІНАТОРНА ОПТИМІЗАЦІЯ ТА НЕЧІТКІ МНОЖИНИ (КОНеМ – 2013)

Матеріали III Всеукраїнського наукового семінару (м. Полтава, 30–31 серпня 2013 року)

Головний редактор *М. П. Гречук*
Комп'ютерна верстка *Е. П. Чєпєлєва*

Формат 60×84/16. Ум. друк. арк. 5,1.
Тираж 44 прим. Зам. № 211/175.

Видавець і виготовлювач
Вищий навчальний заклад Укоопспілки
«Полтавський університет економіки і торгівлі»,
кімн. 115, вул. Коваля, 3, м. Полтава, 36014; ☎ (0532) 50-24-81

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 3827 від 08.07.2010 р.