Українська Федерація Інформатики
Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України
Вищий навчальний заклад Укоопспілки
«ПОЛТАВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ ЕКОНОМІКИ І ТОРГІВЛІ»
(ПУЕТ)

ІНФОРМАТИКА ТА СИСТЕМНІ НАУКИ (ІСН-2015)

МАТЕРІАЛИ
VI ВСЕУКРАЇНСЬКОЇ НАУКОВО-ПРАКТИЧНОЇ КОНФЕРЕНЦІЇ ЗА МІЖНАРОДНОЮ УЧАСТЮ

(м. Полтава, 19–21 березня 2015 року)

За редакцією професора О. О. Ємця

Полтава
ПУЕТ
2015

УДК 519.6

ВИКОРИСТАННЯ ПОЛІНОМІВ БЕРНШТЕЙНА В МЕТОДІ О. М. ЛИТВИНА РОЗВ'ЯЗАННЯ ПЛОСКОЇ ЗАДАЧІ КОМП'ЮТЕРНОЇ ТОМОГРАФІЇ

***А. С. Горбачова**, магістр*
ДВНЗ «Приазовський державний технічний університет»
stasya-1293@mail.ru
*Науковий керівник: **О. М. Литвин**, д. ф.-м. н., проф.,*
Українська інженерно-педагогічна академія

Вступ. В статті [1] був запропонований, а в [2-3] досліджений метод розв'язання плоскої задачі комп'ютерної томографії, який на відміну від методу [5] дозволяє написати явні формули для наближеного обчислення коефіцієнтів Фур'є функції двох змінних через значення проекцій, що надходять з комп'ютерного томографа на процесор. В [2, 3] для проведення обчислювального експерименту пропонується використовувати вейвлети Хаара. В даній роботі пропонується замість вейвлетів Хаара використовувати поліноми Бернштейна.

1. Загальні твердження методу О.М.Литвина.

Нехай нам треба дослідити щільність $f(x,y)$ всередині деякого тіла на площині Oxy методами рентгенівської комп'ютерної томографії [4]. Вважаємо, що для цього нам задані проекції – інтеграли $\gamma_k = \int\limits_{\Gamma_k} f(x,y)ds, k=1,...,M$ вздовж заданої системи прямих $\Gamma_k, k=1,...,M$, що перетинають тіло. Як відомо [4], ці проекції можна отримати шляхом вимірювання інтенсивностей рентгенівського променя вздовж відповідних прямих на виході з рентгенівської трубки і після проходження через тіло.

Згідно з [1], наближення для функції $f(x,y)$ шукається у вигляді скінченної суми Фур'є $S(x,y)=\sum_{k=-n}^{n}\sum_{l=-n}^{n}c_{k,l}e^{i2\pi(kx+ly)}$; $c_{k,l}=\int_0^1\int_0^1 f(x,y)e^{-i2\pi(kx+ly)}dxdy$.

Використаємо наступні твердження.

Лема 1. [1]. При обчисленні коефіцієнтів Фур'є $CF_{k,l}=\int_0^1\int_0^1 f\left(x,y\right)e^{-i2\pi\left(kx+ly\right)}dxdy$ для $k=0,\ l=0,\ k=0,l>0$; $k>0,l=0$ за допомогою проекцій справедливі рівності:

$$CF_{00}=\int_0^1\int_0^1 f\left(x,y\right)dxdy=\int_0^1\gamma_2\left(y\right)dy,\ \gamma_2\left(y\right)=\int_0^1 f\left(x,y\right)dx \qquad (1)$$

$$CF_{k,0}=\int_0^1\int_0^1 f\left(x,y\right)e^{-i2\pi kx}dxdy=\int_0^1\gamma_1\left(x\right)e^{-i2\pi kx}dx,$$

$$\gamma_1\left(x\right)=\int_0^1 f\left(x,y\right)dy \qquad (2)$$

$$CF_{0,l}=\int_0^1\int_0^1 f\left(x,y\right)e^{-i2\pi ly}dxdy=\int_0^1\gamma_2\left(y\right)e^{-i2\pi ly}dy \quad (3)$$

При $k<0,l<0$ маємо $CF_{-|k|,0}=\overline{CF_{|k|,0}}$; $CF_{0,-|l|}=\overline{CF_{0,|l|}}$.

Для $k\geq 1,l\geq 1$:

1. При $k\geq l$:

$$CF_{kl}=I_1+I_2+I_{3,} \qquad (4)$$

$$I_1=l\int_0^1\frac{F_1\left(zl\right)e^{-i2\pi zl}dz}{k^2+l^2},\ \ I_2=\frac{k-l}{k^2+l^2}\int_0^1 F_2\left(l+z\left(k-l\right)\right)e^{-i2\pi\left[l+z\left(k-l\right)\right]}dz,$$

$$I_3=l\int_0^1\frac{F_3\left(k+zl\right)e^{-i2\pi\left(k+zl\right)}dz}{k^2+l^2},\ \text{де}\ F_1\left(t\right)=\int_{-\frac{l}{k}t}^{\frac{k}{l}t} f\left(\frac{kt-lv}{k^2+l^2},\frac{lt+kv}{k^2+l^2}\right)dv,$$

$$F_2(t)=\int_{-\frac{l}{k}t}^{\frac{k^2+l^2-lt}{k}} f\left(\frac{kt-lv}{k^2+l^2},\frac{lt+kv}{k^2+l^2}\right)dv,\ F_3(t)=\int_{\frac{1}{l}\left[-k^2-l^2+kt\right]}^{\frac{1}{k}\left[k^2+l^2-lt\right]} f\left(\frac{kt-lv}{k^2+l^2},\frac{lt+kv}{k^2+l^2}\right)dv$$

2. При $k < l$:

$$CF_{k,l}= I_1+I_2+I_3, \qquad (5)$$

$$I_1=\frac{k}{k^2+l^2}\int_0^1 e^{-i2\pi kz}G_1(kz)dz,\ I_2=\frac{l-k}{k^2+l^2}\int_0^1 e^{-i2\pi(k+z(l-k))}G_2(k+z(l-k))dz,$$

$$I_3=\frac{k}{k^2+l^2}\int_0^1 e^{-i2\pi(l+kz)}G_3(l+kz)dz \text{ ,де } G_1(t)=\int_{-\frac{lt}{k}}^{\frac{kt}{l}} f\left(\frac{kt-lv}{k^2+l^2},\frac{lt+kv}{k^2+l^2}\right)dv$$

$$G_2(t)=\int_{\frac{-k^2-l^2+kt}{l}}^{\frac{kt}{l}} f\left(\frac{kt-lv}{k^2+l^2},\frac{lt+kv}{k^2+l^2}\right)dv,\ G_3(t)=\int_{\frac{-k^2-l^2+kt}{l}}^{\frac{k^2+l^2-lt}{k}} f\left(\frac{kt-lv}{k^2+l^2},\frac{lt+kv}{k^2+l^2}\right)dv.$$

3. При $k \ge l \ge 1$:

$$CF_{k,-l}=I_1+I_2+I_3, \qquad (6)$$

$$I_1=\frac{l}{k^2+l^2}\int_0^1 \phi_1(z(-l))e^{-i2\pi z(l)}dz,\ I_2=\frac{k-l}{k^2+l^2}\int_0^1 \phi_2(z(k-l))e^{-i2\pi z(k-l)}dz,$$

$$I_3=\frac{l}{k^2+l^2}\int_0^1 \phi_3(k-l+zl)e^{-i2\pi(k-l+zl)}dz,$$

де $\phi_1(v)=\int_{-\frac{kv}{l}}^{\frac{k^2+l^2+lv}{k}} f\left(\frac{kv+lt}{k^2+l^2},\frac{kt-lv}{k^2+l^2}\right)dt$, $\phi_2(v)=\int_{\frac{lv}{k}}^{\frac{k^2+l^2+lv}{k}} f\left(\frac{kv+lt}{k^2+l^2},\frac{kt-lv}{k^2+l^2}\right)dt$,

$$\phi_3(v)=\int_{\frac{lv}{k}}^{\frac{k^2+l^2+kv}{l}} f\left(\frac{kv+lt}{k^2+l^2},\frac{kt-lv}{k^2+l^2}\right)dt.$$

4. При $1 \le k < l$:

$$CF_{k,-l} = I_1 + I_2 + I_3, \qquad (7)$$

$$I_1 = \frac{k}{k^2+l^2}\int_0^1 e^{-i2\pi(kz-l)}\omega_1(kz-l)\,dz,\ I_2 = \frac{l-k}{k^2+l^2}\int_0^1 e^{-i2\pi z(k-l)}\omega_2\left[z(k-l)\right]dz,$$

$$I_3 = \frac{k}{k^2+l^2}\int_0^1 e^{-i2\pi kz}\omega_3(kz)\,dz \text{ , де } \omega_1(v) = \int_{-\frac{kv}{l}}^{\frac{k^2+l^2+lv}{k}} f\left(\frac{kv+lt}{k^2+l^2}, \frac{kt-lv}{k^2+l^2}\right)dt \text{ ,}$$

$$\omega_2(v) = \int_{-\frac{kv}{l}}^{\frac{k^2+l^2-kv}{l}} f\left(\frac{kv+lt}{k^2+l^2}, \frac{kt-lv}{k^2+l^2}\right)dt \text{ , } \omega_3(v) = \int_{\frac{lv}{k}}^{\frac{k^2+l^2-kv}{l}} f\left(\frac{kv+lt}{k^2+l^2}, \frac{kt-lv}{k^2+l^2}\right)dt \cdot$$

Для значень k, l, що задовольняють умови $k, l \le -1$ виконується рівність: $CF_{-k,-l} = \overline{CF_{k,l}}$; $CF_{-k,l} = \overline{CF_{k,-l}}$, $\overline{\alpha + i\beta} := \alpha - i\beta$.

Для обчислення коефіцієнтів Фур'є $CF_{k,l}$ за допомогою проекцій робимо заміну змінних $kx+ly = t$, $-lx+ky = v$, $x = \frac{kt-lv}{k^2+l^2}$, $y = \frac{lt+kv}{k^2+l^2}$,. В результаті область інтегрування D розіб'ється на три підобласті D_1, D_2, D_3, коли $k > l$ або $k < l$, та на дві підобласті D_1, та D_3, якщо $k = l$ (див. рис. 1, 2, 3 відповідно).

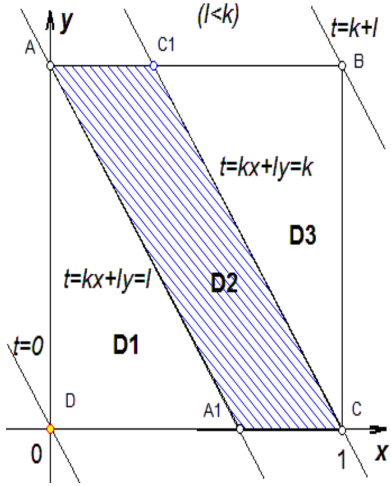

Рис.1. – Розбиття області D на підобласті D_1, D_2, D_3 при $k > l > 0$

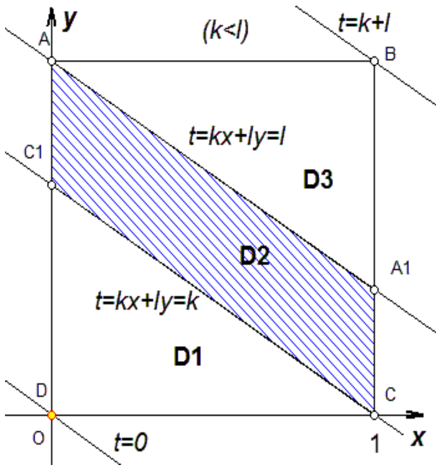

Рис.2. – Розбиття області D на підобласті D_1, D_2, D_3 при $l > k > 0$

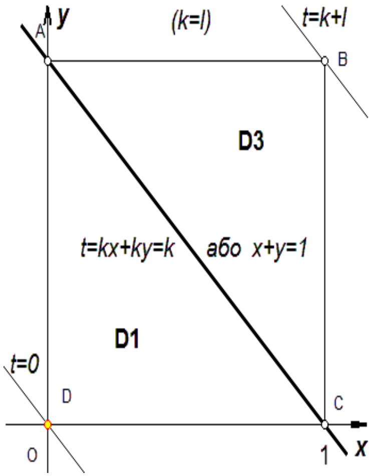

Рис.3. – Розбиття області D на підобласті D_1, D_3 при $k=l$

Ці області для випадку $k > l > 0$, можна визначити так.

$$D_1=\left\{(x,y):0\le x\le\frac{l}{k};\,0\le y\le\frac{l-kx}{l}\right\},\tilde{D}_1=\left\{(t,v):0\le t\le l;\,-\frac{l}{k}t\le v\le\frac{k}{l}t\right\},$$

$$D_2=\left\{(x,y):0\le y\le 1;\;\frac{l-ly}{k}\le x\le\frac{k-ly}{k}\right\},\;\tilde{D}_2=\left\{(t,v):l\le t\le k;\,-\frac{l}{k}t\le v\le\frac{k^2+l^2-lt}{k}\right\},$$

$$D_3=\left\{(x,y):0\le y\le 1;\,\frac{k-ly}{k}\le x\le 1\right\},\tilde{D}_3=\left\{(t,v):k\le t\le k+l,\,\frac{-k^2-l^2+kt}{l}\le v\le\frac{k^2+l^2-lt}{k}\right\}.$$

Тобто, для коефіцієнтів Фур’є $CF_{k,l}$ можна написати

$$CF_{k,l}=\int_0^1\int_0^1 f(x,y)e^{-i2\pi(kx+ly)}dxdy=\left|\begin{array}{l}\begin{cases}t=kx+ly\\ v=-lx+ky\end{cases};\ x=\dfrac{kt-lv}{k^2+l^2};\ y=\dfrac{lt+kv}{k^2+l^2}\\ \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(t,v)}=\dfrac{1}{\dfrac{\partial(t,v)}{\partial(x,y)}}=\dfrac{1}{\begin{vmatrix}k & l\\ -l & k\end{vmatrix}}=\dfrac{1}{k^2+l^2};\end{array}\right|=I_1+I_2+I_3,$$

де $I_1=\iint\limits_{D_1} f(x,y)e^{-i2\pi(kx+ly)}dxdy=I_{1,k,l}$ $I_2=\iint\limits_{D_2} f(x,y)e^{-i2\pi(kx+ly)}dxdy=I_{2,k,l}$,

$$I_3=\iint\limits_{D_3} f(x,y)e^{-i2\pi(kx+ly)}dxdy=I_{3,k,l}.$$

Нижче напишемо формули для обчислення інтегралів I_1, I_2, I_3 по кожній з областей D_1, D_2, D_3 з використанням проекцій – даних Радона.

$$I_1==\left|\begin{array}{l}\displaystyle\int_{-\frac{lt}{k}}^{\frac{kt}{l}} f\left(\frac{kt-lv}{k^2+l^2},\frac{lt+kv}{k^2+l^2}\right)dv=\\ =F_1(k,l,t)=F_1(t)\\ t=zl;\ dt=ldz;\\ t=0\Rightarrow z=0;\ t=1\Rightarrow z=1\end{array}\right|=\frac{l}{k^2+l^2}\int_0^1 e^{-i2\pi zl}F_1(zl)dz.$$

$$I_2=\left|\begin{array}{l}\displaystyle\int_{-\frac{lt}{k}}^{\frac{k^2+l^2-lt}{k}} f\left(\frac{kt-lv}{k^2+l^2},\frac{lt+kv}{k^2+l^2}\right)dv=\\ =F_2(k,l,t)=F_2(t)\\ z=\dfrac{t-l}{k-l};\ dz=\dfrac{dt}{k-l};\ t=l+z(k-l);\\ t=l\Rightarrow z=0;\ t=k\Rightarrow z=1\end{array}\right|=$$

$$\frac{k-l}{k^2+l^2}\int_0^1 e^{-i2\pi[l+z(k-l)]}F_2(l+z(k-l))dz.$$

$$I_3 = = \left| \begin{array}{l} \displaystyle\int\limits_{\frac{1}{l}\left[-k^2-l^2+kt\right]}^{\frac{1}{k}\left[k^2+l^2-lt\right]} f\left(\frac{kt-lv}{k^2+l^2}, \frac{lt+kv}{k^2+l^2}\right) dv = \\ = F\left(k,l,t\right) = F_3\left(t\right) \\ t = k + zl;\ dt = ldz; \\ t = k \Rightarrow z = 0;\ t = k + l \Rightarrow z = 1 \end{array} \right| =$$

$$= l\int_0^1 \frac{F_3\left(k+zl\right)e^{-i2\pi\left(k+zl\right)}dz}{k^2+l^2}.$$

Аналогічно можна написати формули для інтегралів I_1, I_2, I_3 при інших співвідношеннях між k,l (див. [2,3]).

Зауваження. Написані вище формули дають точні значення коефіцієнтів Фур'є за умови, що функції $F_1(\bullet), F_2(\bullet), F_3(\bullet)$ відомі для кожного значення аргументів. Оскільки для кожного значення цих аргументів ці функції чисельно дорівнюють відповідним проекціям, які поступають з комп'ютерного томографа, то вони нам відомі лише для скінченної кількості значень відповідного аргументу. Тому в [2-3] вказані функції замінювались кусково-сталими функціями-вейвлетами Хаара і таким чином відповідні інтеграли від них обчислювались наближено.

Пропонуємо ці функції наближувати відповідними поліномами Бернштейна

$$B_m(F_q,t) = \sum_{p=0}^{m} F_q(\frac{p}{m})C_m^p t^p (1-t)^{m-p}, q = 1,2,3; C_m^p = \frac{m!}{p!(m-p)!}, 0! = 1$$

Ще раз наголосимо, що написані вище функції F_μ, а також [1, 2] G_μ, ϕ_μ, ω_μ, μ=1,2,3 є проекціями, отриманими інтегруванням функції $f(x,y)$ вздовж прямих, що перетинають квадрат $[0,1]^2$ і проходять паралельно прямим $kx+ly = t$. На практиці вказані експериментальні дані можуть бути отримані за допомогою комп'ютерного томографа для дискретного набору значень змінної t.

Приклад.

$$f(x,y)=h(x)+h(y).0\le x,y\le 1; h(t)=(t-a)(b-t).a<t<b;$$
$$h(t)=0, t\le a\vee b\le t; n=2, m=4;$$

Матриця коефіцієнтів Фур´є (точні значення)

$$CF = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6.333\times 10^{-3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.016 & 0 & 0 \\ 6.333\times 10^{-3} & -0.016 & 0.042 & -0.016 & 6.333\times 10^{-3} \\ 0 & 0 & -0.016 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6.333\times 10^{-3} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Матриця коефіцієнтів Фур´є (наближені значення, знайдені за допомогою проекцій)

$$CG = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 7.881\times 10^{-4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.011 & 0 & 0 \\ 7.881\times 10^{-4} & -0.011 & 0.04 & -0.011 & 7.881\times 10^{-4} \\ 0 & 0 & -0.011 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7.881\times 10^{-4} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Таким чином, при малих значеннях $m=4$ степеня поліномів Бернштейна, коефіцієнти Фур´є обчислені з високою точністю.

Література

1.Литвин О. М. Періодичні сплайни і новий метод розв'язання плоскої задачі рентгенівської комп'ютерної томографії // Системний аналіз, управління і інформаційні технологіїї: Вісник Харківського держ. політех. ун-ту. Збірка наукових праць. Випуск 125. – Харків: ХДПУ, 2000. с. 27–35.

2. Литвин О. М., Кулик С. І. Математичне моделювання в комп’ютерній томографії з використанням вейвлетів / Литвин О. М., Кулик С. І. // Проблеми машинобудування. – 2008. – т.11, №2. – С. 56-65.

3. Кулик С. І. Математичне моделювання в комп’ютерній томографії з використанням вейвлетів. Автореф. дисертації. канд. фіз.-мат. наук, Харків: ХНУРЕ. – 2009. – 20 с.

4.Терещенко С. А. Методы вычислительной томографии. – М.: Физматлит, 2004. – 320 с.

5. David Gottlieb, Bertil Gustafsson. Direct Fourier Method for computer tomography//www.Tdb.uu.se/archive/reports/index.html report No207 (get reports).