Українська Федерація Інформатики
Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України
Вищий навчальний заклад Укоопспілки
«ПОЛТАВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ ЕКОНОМІКИ І ТОРГІВЛІ»
(ПУЕТ)

ІНФОРМАТИКА ТА СИСТЕМНІ НАУКИ (ІСН-2015)

МАТЕРІАЛИ
VI ВСЕУКРАЇНСЬКОЇ НАУКОВО-ПРАКТИЧНОЇ КОНФЕРЕНЦІЇ ЗА МІЖНАРОДНОЮ УЧАСТЮ

(м. Полтава, 19–21 березня 2015 року)

За редакцією професора О. О. Ємця

Полтава
ПУЕТ
2015

ПОСТРОЕНИЕ ДИСКРЕТНЫХ ОБРАЗОВ

***Г. А. Донец**, д. ф.-м. н.*
Институт кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины

В основе анализа сложных изображений лежат формальные правила, по которым сложные различные изображения могут быть составлены из определенных элементарных частей. Эти правила являются разновидностью формальных грамматик и налагают определенные ограничения как на получаемые с их помощью изображения, так и на те описания изображений, которые должны быть получены в результате решения задачи. Таким образом, формальный язык для описания изображений связан со структурой изображений рассматриваемого класса.

Для того чтобы представить двумерное изображение в виде последовательности, необходимо рассмотреть процесс составления сложного изображения из элементарных изображений или элементов. Элементы, которые нужно дорисовывать в определенном порядке один за другим для получения некоторого сложного изображения, образуют соответствующую этому изображению последовательность. Можно представить, что заранее заготовлен некоторый набор тонких прозрачных пластинок стандартного размера, и на каждой из них нарисовано некоторое элементарное изображение. Каждому терминальному символу b данного алфавита соответствует определенное элементарное изображение, причем b является параметром, характеризующим это изображение. Правила грамматики указывают, какую пластинку разрешается взять и наложить на стопку взятых раньше пластинок. В результате наложения всех выбранных пластинок получится сложное изображение E, построенное в соответствии с данным набором правил.

Эти представления о теории распознавания образов взяты из работ Р. Нарасимхана и В. А. Ковалевского. Данная монография и посвящена развитию этих представлений. В ней впервые формализованы принципы построения сложных изображений на прямоугольном поле при заданной операции объединения (сложения) элементарных изображений, которые называются *эталонами* или *шаблонами*. Предлагается новое направление в этой области, проведен структурный анализ построения дискретных изображений на плоскости, в результате чего задача сводится к решению системы линейных сравнений по конечному модулю, значение которого совпадает с числом цветов. При этом решается вопрос о возможности или невозможности решения задачи для некоторого множества шаблонов.

1. Задача построения цветной мозаики

Эта задача в том или ином виде может возникнуть в тех областях науки, где используется прямоугольная метрика. Всякое изображение на плоскости можно ограничить прямоугольником, затем разбить горизонтальными и вертикальными прямыми на маленькие клеточки, которые можно считать раскрашенными одним цветом.

Определение 1.1. Полем зрения $\Pi = (\pi_{ij})_{m,n}$ называется прямоугольник, разбитый на $N = mn$ клеток, где m – число клеток по горизонтали (строк), а n – число клеток по вертикали (столбцов).

Пусть задано некоторое множество шаблонов $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_p\}$ из p связных фигур (без повторений), каждая из которых состоит из k_i ($i = 1, 2, ..., p$) клеток, и число горизонтальных клеток каждой фигуры не превышает n, а вертикальных – m.

Пусть задано множество целых чисел $Q = \{0, 1, ..., K-1\}$, которое назовем *множеством красок*. Каждой клетке шаблона s_i ($i = 1, 2, ..., p$) поставлена в соответствие определенная краска $q \neq 0$ или $q \in Q \setminus \{0\}$. Это задается с помощью отражения $f = (f_1, f_2, ..., f_p)$, где $f_i : s_i \to Q \setminus \{0\}$.

Первоначально полагаем, что поле Π раскрашено в цвет 0. Задано множество раскрасок B поля зрения Π (в дальнейшем – поля), которое называется *множеством образов* (*мозаик*). На поле можно в допустимых пределах последовательно накладывать шаблоны без ограничения на место, порядок и повторение некоторых из них. Окончательный цвет каждой клетки поля будет равен сумме цветов тех клеток всех шаблонов, которые накладывались на данную клетку.

На множестве Q введена бинарная коммутативная операция $\oplus$ сложения цветов, которая произвольным $a \in Q$ и $b \in Q$ ставит в соответствие некоторое $c \in Q$. Эта операция действует для каждой клетки поля при наложении шаблонов на него и удовлетворяет некоторым условиям. Наиболее часто такой операцией является сложение чисел по конечному модулю. Задача о построении дискретного образа состоит в следующем: при заданных S, Q и f найти такое семейство шаблонов и разместить их на поле так, чтобы в результате получить заданную раскраску $B = F: \ \Pi \to Q$, которая называется *образом* или *мозаикой*. В зависимости от исходных данных задача может быть неразрешимой.

Теперь в каждом шаблоне можно выделить одну постоянную клетку, относительно которой все остальные клетки шаблона определяются однозначно. Назовем такую клетку меткой соответствующего шаблона. Занумеруем все клетки поля по строкам от 1 до N. Тогда любая клетка поля π_{ij} будет иметь номер $l = n(i-1) + j$ ($i = 1, 2, ..., m$; $j = 1, 2,..., n-1$). Если какой-то шаблон расположить на поле таким образом, чтобы его метка совпала с клеткой l, то координаты остальных клеток шаблона определяются однозначно, через l.

Рассмотрим пример шаблона из 9 клеток на поле 3×4, где метка шаблона заштрихована.

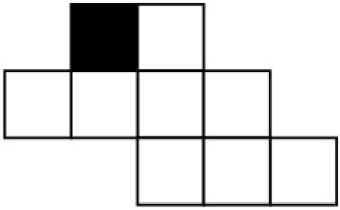


Рис. 1.1 – Шаблон с меткой

Записываем уравнение шаблона, которое состоит из координат всех его клеток, выраженных через координаты его метки l.

$$s = (l, l+1, l+n-1, l+n, l+n+1, l+n+2, l+2n+1, l+2n+2, l+2n+3) \qquad (1.1)$$

Множество положений шаблона s_t на поле определяется множеством координат его меток $X(t) = \{x_1^{(t)}, x_2^{(t)}, ..., x_M^{(t)}\}$ ($t = 1, 2, ..., L$). Каждая координата $x_i^{(t)} = \lambda$ $(1 \le \lambda \le r-1)$ определяет число экземпляров шаблона s_t, наложенных друг на друга, метки которых имеют эту координату. Заданный образ, который необходимо построить, можно определить как $B = (b_1, b_2, ..., b_N)$, где $b_i \in Q$ ($i = 1, 2, ..., N$).

Постановка задачи. Пусть заданы множества шаблонов S и цветов Q и операция сложения цветов $\oplus$. Необходимо найти такое подмножество $S' \subseteq S$ и так наложить эти шаблоны на поле, чтобы в результате сложения цветов получить мозаику $b \in B$, где $b = \{b_1, b_2, ..., b_N\}$.

Учитывая все обозначения, основную задачу можно свести к решению уравнений такого типа:

$$\sum_{:\Theta^t(l)\neq 0} \sum_{i\in\Theta(l)} x_i^{(t)} q_l^{(t)} \equiv b_l (\mathrm{mod}\, K) \quad (l = 1, 2, ..., N). \qquad (1.2)$$

где все решения $x_i^{(t)} \neq 0$ определяют положение и количество тех шаблонов, которые в сумме дают заданный образ B.

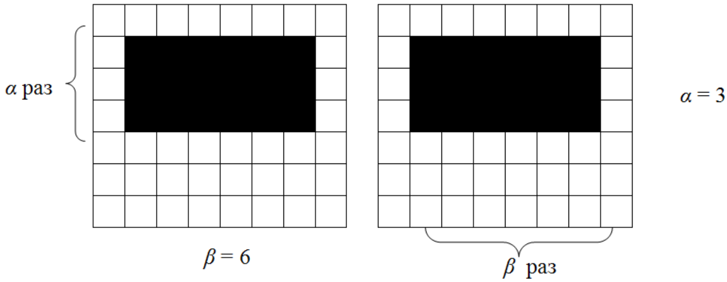


Рис. 1.2

В общем виде эта задача довольно сложная, так как число переменных в ней существенно превышает число уравнений. При этом возникают проблемы с определением ранга системы, что во многом зависит от типов шаблонов и множества красок.

Определение 1.2. Будем считать выделенной клеткой (меткой) в каждом шаблоне самую крайнюю левую клетку. Номер клетки, на котором расположена метка шаблона, назовем его координатой.

Координаты клеток поля определяются как числа натурального ряда $i = 1, 2, \ldots, n$. Координаты меток шаблонов зависят от их размеров. Они представляют также натуральные числа $i = 1, 2, \ldots, n - k_t + 1$, где k_t – размер (длина) шаблона s_t ($t = 1, 2, \ldots, L$). Множество шаблонов можно представлять как множество векторов, например:

$$s_t = \{q_1^{(t)}, q_2^{(t)}, \ldots, q_{k_t}^{(t)}\},$$

где $q_i^{(t)} \in Q \setminus \{0\}$.

В качестве операции сложения выберем сложение по mod 2.

Если сложить шаблон длиною $d+1$ ($d \geq 2$) с координатою j с шаблоном длиною d и координатою $j+1$, то получим единицу в j-ой клетке.

Определение 1.3. Наименьший набор шаблонов, который позволяет представить единицу в любой клетке строки, называется базисом линейной мозаики.

Самым тривиальным базисом является один шаблон $S=\{1\}$. Для двух шаблонов длиною s_1 и s_2, как было указано, базис может составлять набор $S=\{d, d+1\}$ ($d>1$). При наложении двух таких шаблонов можно получить единицу либо справа, либо слева от меньшего шаблона. Если один из шаблонов по длине больше чем $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$, то появляются ограничения на передвижение этого шаблона вдоль строки, и базис может не существовать для некоторых единиц.

Поэтому для такого базиса необходимо, чтобы

$$2 < s_1 < s_2 < \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 .$$

Пример 1.1. На рис. 1.3 показан базис шаблонов для $S=\{3, 4\}$, $n=7$.

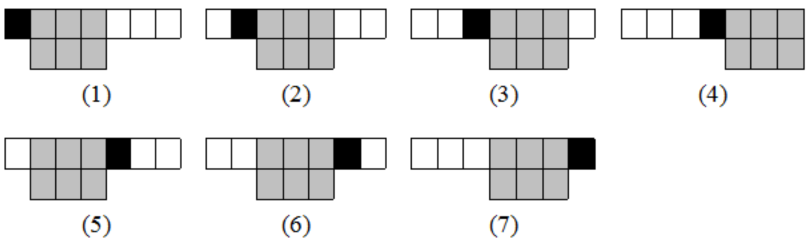


Рис. 1.3

На этом примере продемонстрировано построение единицы, когда каждый шаблон берется ровно по одному экземпляру. В общем виде это не всегда возможно, поэтому в дальнейшем будем предполагать, что, если не оговорено противное, каждый шаблон представлен в необходимом количестве.

Для $s_1=2$ можно в качестве второго шаблона взять $s_2=2k+1$ ($k\geq 1$). В этом случае сделать единицу для любого l можно с помощью нескольких шаблонов первого типа с координатами $x_1^{(j)}$ и одного шаблона второго типа с координатою x_2. Для $l=2i+1$ ($i\geq 0$) это $x_1^{(j)}=2j+1$ ($i\leq j\leq k$)

и $x_2 = 2l + 2$; для $l = 2i$ это $x_1^{(j)} = 2j$ ($i \le j \le k$) и $x_2 = 2l + 1$. Если получены все единицы для $l < \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$, то остальные единицы можно получить зеркальным построением относительно центральной оси симметрии. Если $2k + 1 < n$, то используя сдвиг, можно построить единицы и для остальных клеток. Для произвольных двух типов шаблонов при $s_1 \ge 3$ такие зависимости имеют более сложный вид. Можно сказать, что для любого n существует пороговое значение длин двух шаблонов, когда существует ровно один базис, а для других значений базис либо не существует, либо их несколько.

Пример 1.2. Рассмотрим два шаблона $s_1 = 5$, $s_2 = 13$ и $n = 16$. Здесь $s_2 > \left\lfloor \frac{16}{2} \right\rfloor + 1 = 9$.

Составим систему уравнений типа (1.1).

$$
\begin{array}{rr}
x_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + x_{14} & = b_1 \\
x_1 + x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + x_{14} + x_{15} & = b_2 \\
x_1 + x_2 + x_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + x_{14} + x_{15} + x_{16} & = b_3 \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + x_{14} + x_{15} + x_{16} + x_{17} & = b_4 \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + x_{14} + x_{15} + x_{16} + x_{17} & = b_5 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + \ldots + x_{14} + x_{15} + x_{16} + x_{17} & = b_9 \\
x_6 + x_7 + x_8 + .. + x_{10} + x_{14} + x_{15} + x_{16} + x_{17} & = b_{10} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
x_8 + \ldots + x_{12} + x_{14} + x_{15} + x_{16} + x_{17} & = b_{12} \\
x_9 + .. + x_{12} + x_{14} + x_{15} + x_{16} + x_{17} & = b_{13} \\
x_{10} + .. + x_{12} + \ldots + x_{15} + x_{16} + x_{17} & = b_{14} \\
x_{11} + x_{12} + \ldots \qquad + x_{16} + x_{17} & = b_{15} \\
x_{12} + \ldots\ldots\ldots \qquad + x_{17} & = b_{16}
\end{array}
\tag{1.3}
$$

При заданных параметрах координата первого шаблона может принимать значение $x_i^{(1)} = 1$ для $i = 1, 2, \ldots, 12$, а для второго – $x_i^{(2)} = 1$ для $i = 1, 2, 3, 4$. Чтобы не указывать верхние индексы, обозначим переменные первого шаблона как x_1, x_2, …, x_{12}, а переменные второго шаблона – x_{14}, x_{15}, x_{16}, x_{17}. Здесь x_{13} пропущено из соображений, которые раскроются позднее.

Можно решать систему данных уравнений, исходя из общих позиций, используя известные методы решения, например, из работы [1]. Однако, можно воспользоваться тем, что мы имеем дело со специфической системой уравнений. Здесь правые части могут быть произвольными. Но нас интересует вопрос о существовании базиса для этих шаблонов. Поэтому мы будем решать систему, полагая, что в правых частях находятся все нули, кроме одного значения $b_j \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 2) \quad 1 \le j \le n$. Очевидно, что в таком случае правые части уравнений линейно независимы. Мы имеем систему уравнений с n уравнениями и n неизвестными. Важной особенностью этой системы есть условие $s_1 + s_2 = n + 2$. Так как число переменных для первого шаблона равно $n + 1 - s_1 = s_2 - 1$, то по аналогии число неизвестных для второго шаблона равно $s_1 - 1$. Поэтому в ($s_1 - 1$)-ой и s_1-й строках система имеет одинаковые количество переменных второго шаблона, а для первого шаблона – разное, отличающееся на одно. Складывая эти уравнения, получаем решение $x_{s_1} \equiv \left(b_{s_1 - 1} + b_{s_1}\right)(\mathrm{mod}\, 2)$. В нашей системе, складывая четвертое и пятое уравнения, получим $x_5 \equiv \left(b_4 + b_5\right)(\mathrm{mod}\, 2)$. Если подставить значение x_5 в самое нижнее уравнение (9-е), где присутствует x_5, то складывая его с десятым уравнением, получим $x_{10} = x_5 + b_{10} + b_9 = (b_4 + b_5 + b_9 + b_{10})(\mathrm{mod}\, 2)$. Продолжая этот процесс дальше, получим решение для x_{15}. Теперь возвращаясь в самое верхнее уравнение, где присутствует x_{15}, (это будет второе) и, складывая его с первым, получим решения для x_2. В общем случае, делая k шагов, находим значение

$$x_{ks_1} = \sum_{i=1}^{k} \left(b_{is_1} + b_{is_1 - 1}\right)(\mathrm{mod}\, 2), \tag{1.4}$$

где ks_1 – положительный вычет по $\mathrm{mod}(s_1 + s_2)$, $k \ge 1$. Выражение ks_1 должно пробегать все значения индексов переменных от 1 до $n+1$, если k пробегает значения от 1 до

s_1+s_2-1. Для последнего значения получим $s_1(s_1+s_2-1)=-s_1\equiv s_2 (\mathrm{mod}\ s_1+s_2)$.

Для этого необходимо, чтобы НОД(s_1 , s_1+s_2)=НОД(s_1 , s_2)= =1. Если это не так, то найдется такое $d>1$, что $s_1=\alpha d$ и $s_2=\beta d$. Тогда для $k=\beta+\alpha+1$ получим $x_{s_1}=x_{s_1(\alpha+\beta+1)}$, что приводит к зависимости между значениями правых частей, а это недопустимо, то есть система не имеет решения. Тем самым доказана

Теорема 1.1. Два разных числа s_1 и s_2 с условием $s_1+s_2=n+2$ ($n>3$) образуют базис, если НОД(s_1 , s_2)=1.

Пусть в правой части $b_j=1$ ($b_i=0$, $i\neq j$). Обозначим t_1 (соответственно t_2) наименьшее (соответственно наибольшее) решение из двух уравнений в положительных вычетах $xs_1=j[\mathrm{mod}(s_1+s_2)]$, или $xs_1=(j+1)[\mathrm{mod}(s_1+s_2)]$. Тогда получаем решение

$$x_k=\begin{cases}1, \text{ если } t_1\le t<t_2;\\ 0, \text{ в остальных случаях,}\end{cases} \tag{1.5}$$

где $ts_1=k[\mathrm{mod}(s_1+s_2)]$.

В нашем примере пусть $b_3=1$. Тогда результаты запишем в виде таблицы.

Табл. 1.1

ts_1	=	5,	10,	15,	2,	7,	12,	17,	4,	9,	14,	1,	6,	11,	16,	3,	8,	13.
t	=	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,	11,	12,	13,	14,	15,	16,	17.
x	=	0,	0,	0,	0,	0,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	0,	0,	0.

Здесь $t_1=8$, $t_2=15$. Отсюда, в соответствии с таблицей (1.1), для $8\le t<15$ получим $x_4=x_9=x_{14}=x_1=x_6=x_{11}=x_{16}=1$. Остальные $x_i=0$.

Решение системы для $b_3=1$ показано на рис. 1.4. При этом предполагалось, что для всех переменных, начиная с x_{14}, место положения левой клетки на 13 значений переменных меньше индекса.

Если $s_1 + s_2 > n + 2$, то число уравнений будет больше числа переменных и система не всегда имеет решения. Если $s_1 + s_2 < n + 2$, то число переменных будет больше числа уравнений и система может иметь много решений. В этом случае можно уменьшить n до необходимого, чтобы применить условие теоремы 1.1, а решения для новых правых клеток поля можно получить путем сдвига решений, полученных для левой части поля.

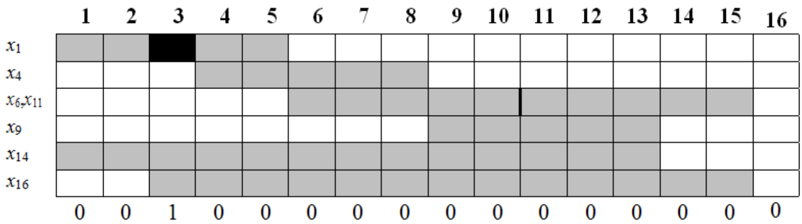


Рис. 1.4

Если в правой части системы (1.2) стоят произвольные значения b_j , то решение можно получать, складывая решения для каждого $b_j = 1$. После этого удалить из решения лишние значения, чтобы $x_i = 0 \vee 1$. Можно то же самое сделать, используя общую таблицу (1.1) для всех значений $b_j = 1$.

Табл. 1.2

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
ts_1	5	10	15	2	7	12	17	4	9	14	1	6	11	16	3	8	13
b_2	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0
b_5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
b_{11}	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
b_{13}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0
$\sum$	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0	0	1	1	0

Пусть при тех же условиях для нашего примера необходимо построить образ $b_2 = b_5 = b_{11} = b_{13} = 1$, а все остальные $b_j = 0$. Составим таблицу типа (1.1), т. е. имеем табл. 1.2.

В результате получаем: $x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = x_7 = x_9 = x_{10} = x_{12} = = x_{15} = x_{17} = 1$, остальные переменные равны 0. Это решение показано на рис. 1.5, при этом x_{15} и x_{17} – переменные, означающие второй шаблон с координатами 2 и 4.

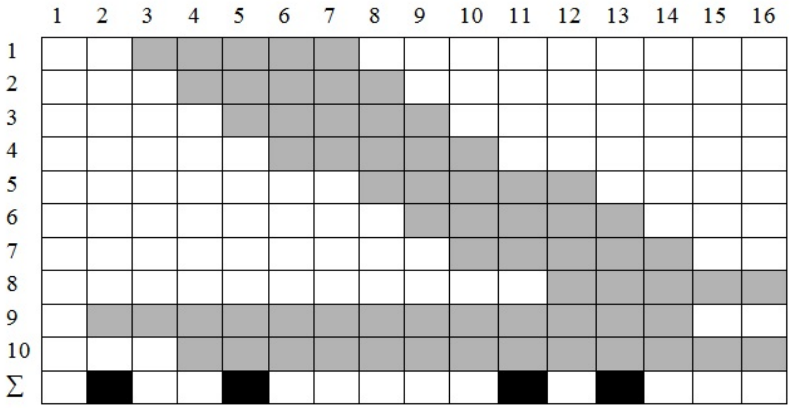


Рис. 1.5

Многоцветные двойственные шаблоны

Если цветов более двух, или $K > 2$, то шаблоны могут быть окрашены не единственным цветом. Будем обозначать каждый шаблон последовательностью цветов $s = (q_1, q_2, ..., q_r)$, где r – длина шаблона.

Определение 1.5. Назовем шаблон двойственным к s, если он имеет обратную последовательность цветов $\bar{s} = (q_r, q_{r-1}, ..., q_1)$.

Двойственный шаблон можно получить, если его перевернуть в пространстве. Двойственные положения шаблонов могут играть существенную роль в построении образов. Среди них встречаются самодвойственные, когда $s = \bar{s}$.

Поскольку наложение шаблонов предполагает операцию сложения цветов, то можно в такой записи шаблоны умножать на скалярную величину $\lambda \neq 0$, при этом $\lambda s = (\lambda q_1, \lambda q_2, ..., \lambda q_r)(\mathrm{mod}\ K)$.

Прежде всего, возникает вопрос, может ли один шаблон (вместе с двойственным) образовывать базис только накладыванием самого на себя. Очевидно, что такой шаблон не может быть самодвойственным.

Рассмотрим сначала шаблон из двух клеток $s_1 = \{q_1, q_2\}$, где $q_1, q_2 \in Q \setminus \{0\}$. Двойственный шаблон $s_2 = \{q_2, q_1\}$. Для построения образа $b_1 \equiv 1(\mathrm{mod}\, K)$, $b_i \equiv 0(\mathrm{mod}\, K)(i > 1)$ необходимо решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} x_1^{(1)} q_1 + x_1^{(2)} q_2 = 1 \\ x_1^{(1)} q_2 + x_1^{(2)} q_1 = 0 \end{aligned}\right\} \mathrm{mod}\, K \tag{1.28}$$

Здесь $x_1^{(1)}$ и $x_1^{(2)}$ означают количество первых (вторых) шаблонов, метка которых находится в первой клетке строки. Система имеет решение, если детерминант системы

$$\det = q_1^2 - q_2^2 \neq 0(\mathrm{mod}\, K). \tag{1.29}$$

Таким образом, если $q_1^2 - q_2^2 \neq 0(\mathrm{mod}\, K)$, то существуют такие шаблоны длиною 2 с соответствующей раскраской, которые позволяют накладыванием на самого себя получить любую клетку строки с окраской 1. Путем сдвига можно получить решение для базиса системы типа (1.2). Легко убедиться, что для $K = 2, 3$ таких шаблонов не существует. Для произвольных простых K множество шаблонов имеет вид (i, j), где $i = 1, 2, ..., K-1$, а $j \neq K - i$. Тогда решение системы (1.28) имеет вид

$$\left.\begin{aligned} x_1^{(1)} = q_1\left(q_1^2 - q_2^2\right)^{-1} \\ x_1^{(2)} = -q_2\left(q_1^2 - q_2^2\right)^{-1} \end{aligned}\right\} \mathrm{mod}\, K \tag{1.30}$$

Выражение d^{-1} равно решению сравнения $td \equiv 1(\mathrm{mod}\, K)$, если оно существует. Для составных K этого недостаточно, так как возможны случаи, когда условия (1.29) не выполняются.

Пример 1.6. Пусть $K = 5$. Тогда число всех пар шаблонов, которые существуют, равно 6 (белая краска или 0 для шаблона отсутствует): $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(1, 4)$, $(2, 3)$, $(2, 4)$, $(3, 4)$. Из них две пары, не удовлетворяют условию (1.29), так как $1^2 - 4^2 = -15 \equiv 0(\mathrm{mod}\ 5)$ и $2^2 - 3^2 = -5 \equiv 0(\mathrm{mod}\ 5)$. Остальные представляют базис с помощью накладывания на себя, их число равно четыре: $S_1 = (1, 2)$, $S_2 = (1, 3)$, $S_3 = (2, 4)$, и $S_4 = (3, 4)$. В частности:

а) $S_1 = (1, 2)$.

Детерминант системы (1.28) равен $1^2 - 2^2 = -3 \equiv 2(\mathrm{mod}\, 5)$.

$x_1^{(1)} = 1 \cdot (2)^{-1} = 3(\mathrm{mod}\, 5)$; $x_1^{(2)} = -2 \cdot (2)^{-1} = -1 \equiv 4(\mathrm{mod}\, 5)$.

Проверка: $3(1, 2) + 4(2, 1) = (11, 10) \equiv (1, 0)(\mathrm{mod}\ 5)$.

б) $S_2 = (1, 3)$.

Детерминант системы (1.28) равен $1^2 - 3^2 = -8 \equiv 2(\mathrm{mod}\, 5)$.

$x_1^{(1)} = 1 \cdot (2)^{-1} = 3(\mathrm{mod}\, 5)$; $x_1^{(2)} = -3 \cdot (2)^{-1} \equiv 1(\mathrm{mod}\, 5)$

Проверка: $3(1, 3) + (3, 1) = (6, 10) \equiv (1, 0)(\mathrm{mod}\ 5)$.

в) $S_3 = (2, 4)$.

Детерминант системы (1.28) равен $2^2 - 4^2 = -12 \equiv -2(\mathrm{mod}\, 5)$.

$x_1^{(1)} = 2 \cdot (-2)^{-1} = -1 \equiv 4(\mathrm{mod}\, 5)$; $x_1^{(2)} = -4 \cdot (-2)^{-1} \equiv 2(\mathrm{mod}\, 5)$.

Проверка: $4(2, 4) + 2(4, 2) = (16, 20) \equiv (1, 0)(\mathrm{mod}\ 5)$.

г) $S_4 = (3, 4)$.

Детерминант системы (1.28) равен $3^2 - 4^2 = -7 \equiv +3(\mathrm{mod}\, 5)$.

$x_1^{(1)} = 3 \cdot 3^{-1} \equiv 1(\mathrm{mod}\, 5)$; $x_1^{(2)} = -4 \cdot (-2)^{-1} \equiv 2(\mathrm{mod}\, 5)$.

Проверка: $(3, 4) + 2(4, 3) = (11, 10) \equiv (1, 0)(\mathrm{mod}\ 5)$.

На рис. 1.8 показаны накладывания шаблонов S_3 и S_4 самих на себя, подтверждающие эти результаты.

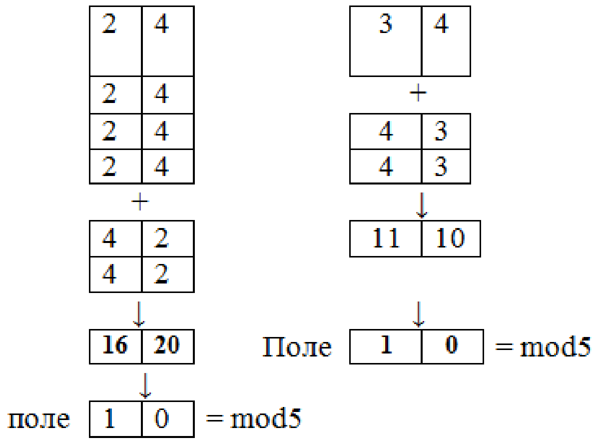


Рис.1.8

Однако для шаблонов большей длины аналогичный результат не возможен.

Лемма 1.3. Шаблон $s_1 = (q_1, q_2, \ldots, q_s)$ для $s > 2$ не может представлять базис наложением на себя.

Теорема 1.3. Система уравнений (1.34) для $s = 3$ имеет решение при условиях:

а) $(q_1 - q_3)^2 \neq 0 (\mathrm{mod}\, K)$,

б) $(q_1 + q_3)^2 - q_2^2 \neq 0 (\mathrm{mod}\, K)$.

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{q_1(q_1 + q_3) - q_2^2}{(q_1 - q_3)\left[(q_1 + q_3)^2 - q_2^2\right]} (\mathrm{mod}\, K) \quad ; \\
x_2 &= -\frac{q_1 q_2}{(q_1 - q_3)\left[(q_1 + q_3)^2 - q_2^2\right]} ; (\mathrm{mod}\, K) \quad . \\
y_1 &= \frac{q_2^2 - q_3(q_1 + q_3)}{(q_1 - q_3)\left[(q_1 + q_3)^2 - q_2^2\right]} (\mathrm{mod}\, K); \\
y_2 &= \frac{q_2 q_3}{(q_1 - q_3)\left[(q_1 + q_3)^2 - q_2^2\right]} (\mathrm{mod}\, K)
\end{aligned}
\tag{1.38}
$$

Условия теоремы 1.3 могут не выполняться для составного K. Если для $K = 5$ существует 16 допустимых раскрасок шаблонов, которые образуют базис, то для $K = 4$ таких шаблонов только 2, это s_1=(1, 2, 2) и s_2=(2, 2, 3).

Пример 1.7. (рис.1.9):

а). Рассмотрим шаблон $s_1 = (1,2,2)$ для $K = 4$. Вычислим знаменатель для (1.38)

$$(q_1 - q_3)[(q_1 + q_3)^2 - q_2^2](\bmod 4) = -1 \cdot [3^2 - 2^2] \equiv -1(\bmod 4) \equiv 3(\bmod 4).$$

Тогда

$$x_1 = [1 \cdot (1+2) - 2^2] \cdot 3^{-1} \equiv 1(\bmod 4); \quad x_2 \equiv -2/3 (\bmod 4) \equiv 2(\bmod 4);$$

$$y_1 = [2^2 - 2 \cdot (1+2)]3^{-1} \equiv 2(\bmod 4); \qquad y_2 = -2 \cdot 2/3 \equiv 0(\bmod 4).$$

б) Пусть $s_1 = (1,4,2)$ и $K = 5$. Знаменатель формул (1.38) равен

$$-1 \cdot [(1+2)^2 - 4^2] \equiv 2(\bmod 5).$$

$$x_1 = \frac{1 \cdot (1+2) - 4^2}{2} \equiv \frac{-3}{2}(\bmod 5) \equiv 1(\bmod 5); \quad x_2 \equiv \frac{-4}{2} \equiv 3(\bmod 5);$$

$$y_1 = \frac{4^2 - 2 \cdot (1+2)}{2} = \frac{10}{2} \equiv 0(\bmod 5); \qquad y_2 = \frac{4 \cdot 2}{2} \equiv 4(\bmod 5).$$

Тогда

$$x_1 = \frac{1 \cdot (1+2) - 4^2}{2} \equiv \frac{-3}{2}(\bmod 5) \equiv 1(\bmod 5); \quad x_2 \equiv \frac{-4}{2} \equiv 3(\bmod 5);$$

$$y_1 = \frac{4^2 - 2 \cdot (1+2)}{2} = \frac{10}{2} \equiv 0(\bmod 5); \qquad y_2 = \frac{4 \cdot 2}{2} \equiv 4(\bmod 5).$$

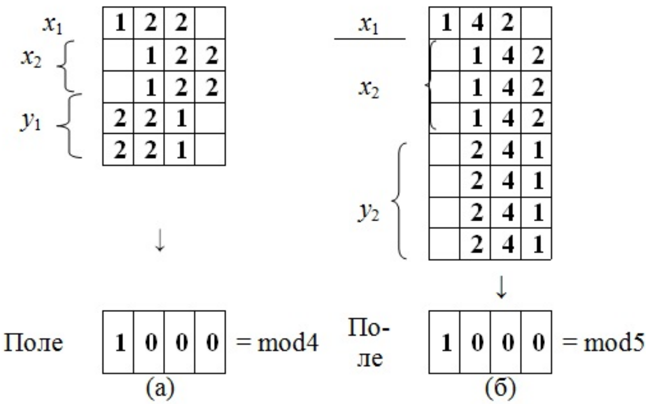


Рис. 1.9

Линейная система для произвольных цветных шаблонов

Использование количества шаблонов, больше одного, приводит к новым осложнениям при решении поставленной задачи. Если раньше использовался один шаблон, то его двойственное положение расценивалось как второй шаблон, если только он не был самодвойственным. Если взять больше шаблонов, то теперь каждый самодвойственный шаблон выступает как один шаблон, а остальные – как два. Это обстоятельство приводит к образованию принципиально разных систем уравнений, а, следовательно, и к различным способам их решения.

Определение 1.6. Два шаблона s_1 и s_2 называются кратными, если существует некоторое целое число λ такое, что $s_1 = \lambda s_2$.

Очевидно, что кратные шаблоны могут заменять друг друга при наложении на поле, то есть оба равносильны одному.

Рассмотрим для начала два не кратных шаблона $s_1 = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_k)$ и $s_2 = (\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_l)$, где $\beta_i, \gamma_j \in Q \setminus \{0\}$, ($1 \le i \le k$; $1 \le j \le l$; $k \le l$). Возможны четыре случая.

Случай 1. Оба шаблона самодвойственные. Тогда система уравнений составляется как для двух разных шаблонов. Чтобы решение системы уравнений было единственным, для них должно выполняться условие:

$$n + 2 = k + 1. \tag{1.39}$$

Рассмотрим всевозможные значения k и l, для которых существует единственное решение системы уравнений. Если $k = l = 2$, то $n + 2$ и определитель системы $\begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_1 & \gamma_1 \end{vmatrix} = 0$, так как обе строки совпадают.

Теорема 1.4. Определитель системы уравнений типа (1.2) для двух самодвойственных шаблонов, удовлетворяющих условию (1.39), с параметрами $k + 2$ и с произвольным $l \ge 3$ равен

$$\beta^{l-1}\sum_{i=1}^{l}(-1)^{i+1}\gamma_{l+1-i}\text{, если } l\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2) \text{ и}$$

$$0\text{, если } l\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2)\,. \qquad (1.40)$$

Пример 1.8. Рассмотрим шаблоны $s_1=(2,2)$, $s_2=(1,3,2,3,1)$ для $K=n=5$ (рис.1.10).

x_1

2	2			
2	2			
		2	2	
		2	2	
		2	2	
			2	2
			2	2
			2	2
			2	2
1	3	2	3	1
1	3	2	3	1

$\downarrow$

1	0	0	0	0	mod 5

Рис. 1.10

Пример 1.10. Пусть $s_1=(1,3,4,4,2)$, $s_2=(2,3,4.4,1,3)$ для $K=5$, $k=5$ и $n=l=6$. Строим соответствующую систему уравнений для базиса решений, т. е. с правыми частями $b_1=1$, а $b_i=0$ ($i=2,3,4,5,6$). При этом первые четыре переменных отводятся первому шаблону, остальные два – второму.

$$\left.\begin{array}{rrrrrrl} x_1 + & & + 2x_3 & & + 2x_5 & + 3x_6 & = 1 \\ 3x_1 + & x_2 & + 4x_3 & + 2x_4 & + 3x_5 & + x_6 & = 0 \\ 4x_1 + & 3x_2 & + 4x_3 & + 4x_4 & + 4x_5 & + 4x_6 & = 0 \\ 4x_1 + & 4x_2 & + 3x_3 & + 4x_4 & + 4x_5 & + 4x_6 & = 0 \\ 2x_1 + & 4x_2 & + x_3 & + 3x_4 & + x_5 & + 3x_6 & = 0 \\ & 2x_2 & & + x_4 & + 3x_5 & + 2x_6 & = 0 \end{array}\right\} \mod 5 \qquad (1.47)$$

Матрица A системы (1.47) и матрицы A_i для переменных имеют вид:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 3 & 4 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 4 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & 3 & 4 & 4 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 0 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 0 & 4 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 0 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 4 & 0 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 3 & 0 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 4 & 4 & 0 & 4 \\ 4 & 4 & 3 & 4 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 4 & 4 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 3 & 4 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

В результате получим значения:

$$\det A = -87 = 3(\bmod 5)\,,\ \det A_1 = -11 = 4(\bmod 5)\,,$$
$$\det A_2 = -12 = 3(\bmod 5)\,,\ \det A_3 = -12 = 3(\bmod 5)\,,$$
$$\det A_4 = 47 = 2(\bmod 5)\,,\ \det A_5 = 7 = 2(\bmod 5)\,,$$
$$\det A_6 = -22 = 3(\bmod 5)\,,$$

или $x_1 = 3$, $x_2 = x_3 = 1$, $x_4 = x_5 = 4$, $x_6 = 1$.

Проверим это на шаблонах (рис. 1.13).

1	3	4	4	2	
1	3	4	4	2	
1	3	4	4	2	
	1	3	4	4	2
2	4	4	3	1	
	2	4	4	3	1
	2	4	4	3	1
	2	4	4	3	1
	2	4	4	3	1
2	3	4	4	1	3
2	3	4	4	1	3
2	3	4	4	1	3
2	3	4	4	1	3
3	1	4	4	3	2

↓

16	35	55	55	30	20	
1	0	0	0	0	0	mod 5

Рис.1.13

Задача построения двумерной одноцветной мозаики

Если перенумеровать цвета с условием, что белый цвет = **0**, голубой = **1**, желтый = **2**, красный = **3** и синий = **4,** то сложение цветов можно записать в виде бинарной таблицы.

Табл. 2.1

⊕	Белый	Голубой	Желтый	Красный	Синий

Белый	Белый	Голубой	Желтый	Красный	Синий
Голубой	Голубой	Синий	Красный	Синий	Красный
Желтый	Желтый	Красный	Голубой	Белый	Голубой
Красный	Красный	Синий	Белый	Желтый	Белый
Синий	Синий	Красный	Голубой	Белый	Красный

Главный недостаток этой таблицы состоит в том, что сложение не удовлетворяет аксиоме ассоциативности.

Табл. 2.2. Числовое представление табл. 2.1

$\oplus$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	4	3	4	3
2	2	3	1	0	1
3	3	4	0	2	0
4	4	3	1	0	3

Определение 2.1. Назовем меткой шаблона самую левую среди самых верхних клеток шаблона.

Заполним все поле всеми возможными способами множеством различных шаблонов. Каждому шаблону (точнее, его месту на плоскости Π) поставим в соответствие переменную x_i ($i=1,\ 2,\ \ldots,\ r$), равную 0 или 1. Тогда задача о возможности построения необходимой мозаики на поле Π при заданном множестве шаблонов $S=\{s_1,s_2,\ldots,s_p\}$ сводится к решению системы линейных уравнений

$$\sum_{i=1}^{r} x_i = b_j\ ; \quad j=1,2,\ldots,N. \qquad (2.1)$$

Допустимое поле двумерных шаблонов и их уравнения

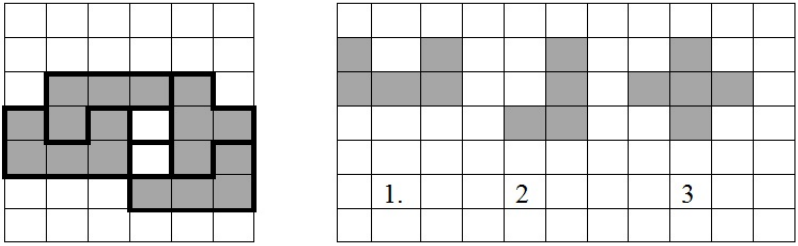


Рис. 2.1. – Образ, составленный из 3-х типов шаблонов

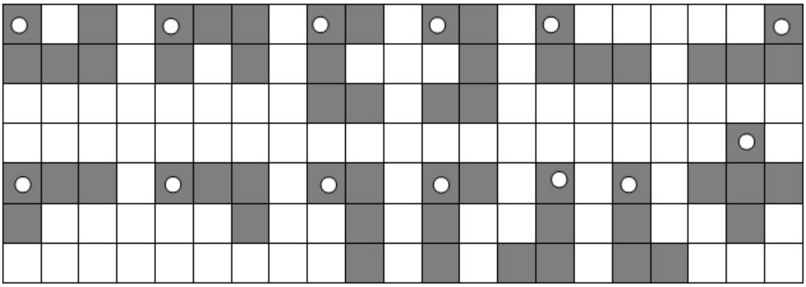


Рис. 2.2. – Типы положений для каждого шаблона

Рассмотрим подробнее шаблон 1 на рис. 2.1, который на рис. 2.3 изображен в четырех возможных позициях.

Для этого каждую клетку шаблона в порядке их следования на поле выразим через координату метки и параметры поля m и n.

$$\begin{aligned}
s_1(\alpha) &= (\alpha,\ \alpha+1,\ \alpha+n+1,\ \alpha+2n,\ \alpha+2n+1);\\
s_2(\alpha) &= (\alpha,\ \alpha+1,\ \alpha+n,\ \alpha+2n,\ \alpha+2n+1);\\
s_3(\alpha) &= (\alpha,\ \alpha+2,\ \alpha+n,\ \alpha+n+1,\ \alpha+n+2);\\
s_4(\alpha) &= (\alpha,\ \alpha+1,\ \alpha+2,\ \alpha+n,\ \alpha+n+2).
\end{aligned} \tag{2.2}$$

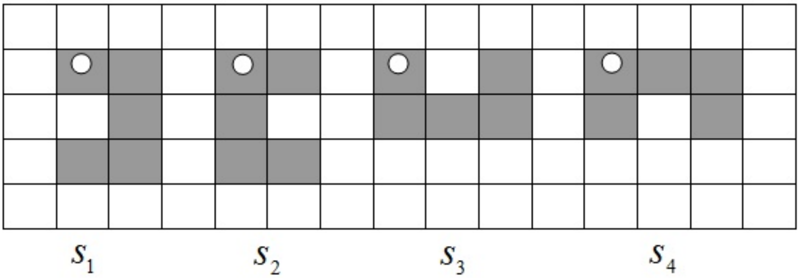


Рис. 2.3. – Шаблон и его возможные положения

На рис. 2.4 приведены допустимые значения координаты α для каждого шаблона из рис. 2.3 на поле α размерности $N = 4 \times 3 = 12$.

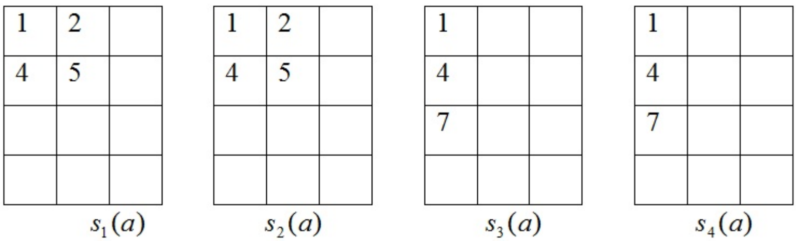


Рис. 2.4

Если вместо координаты α для каждого шаблона подставить значения из рис. 2.4, то каждой переменной будет сопоставлен кортеж, определяющий номера клеток, на которые накладывается соответствующий шаблон.

$c_1 = (1,2,5,7,8), c_2 = (2,3,6,8,9), c_3 = (4,5,8,10,11), c_4 = (5,6,9,11,12)$,
$c_5 = (1,2,4,7,8), c_6 = (2,3,5,8,9), c_7 = (4,5,7,10,11), c_8 = (5,6,8,11,12)$,
$c_9 = (1,3,4,5,6), c_{10} = (4,6,7,8,9), c_{11} = (7,9,10,11,12), c_{12} = (1,2,3,4,6)$,
$c_{13} = (4,5,6,7,9), c_{14} = (7,8,9,10,12)$.

Суммируя для каждой клетки поля переменные, в кортежи которых входит номер этой клетки, получим систему уравнений.

$$\sum_{C_i \cap j \neq \varnothing} x_i \equiv b_j \,(\mathrm{mod}\, 2), \;\; j = 1, 2, \ldots, N.$$

На рис. 2.5 показаны допустимые положения всех четырех шаблонов и указаны обозначающие их переменные.

Следует заметить, что система (2.3) для произвольного множества шаблонов содержит N уравнений, а число переменных может быть произвольным в зависимости от количества допустимых положений меток шаблонов. Для единственности решения системы уравнений это обстоятельство иногда играет существенную роль.

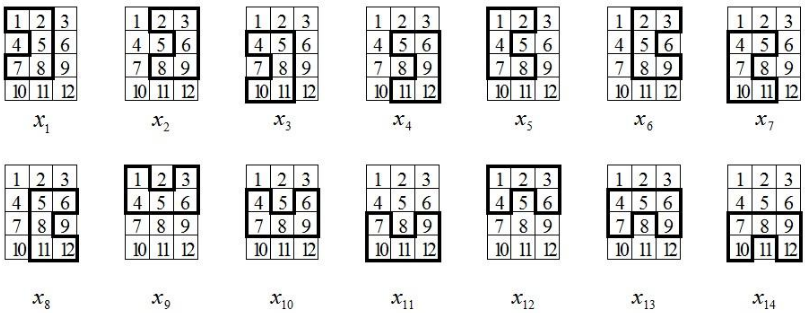


Рис. 2.5. – Переменные для всех положений шаблона

Теперь, учитывая рис. 2.5, можно легко составить систему уравнений для наших шаблонов. В i-й строке суммируются переменные, кортежи которых содержат i-ю клетку, а в правой части должно быть b_i ($1 \leq i \leq N$).

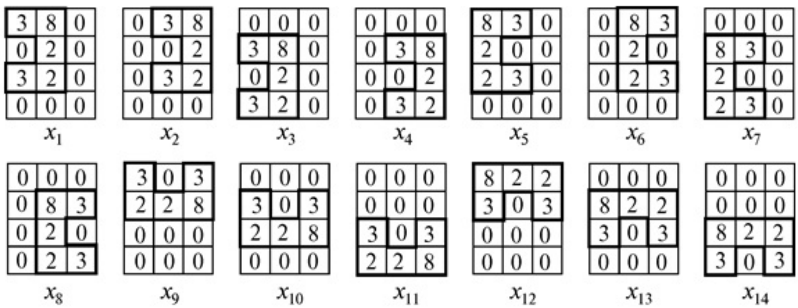
$$
\begin{array}{cccccccccccccccl}
x_1 & \cdot & \cdot & \cdot & +x_5 & \cdot & \cdot & \cdot & +x_9 & \cdot & \cdot & +x_{12} & \cdot & \cdot & \equiv & b_1 \\
x_1 & +x_2 & \cdot & \cdot & +x_5 & +x_6 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & +x_{12} & \cdot & \cdot & \equiv & b_2 \\
 & x_2 & \cdot & \cdot & \cdot & +x_6 & \cdot & \cdot & +x_9 & \cdot & \cdot & +x_{12} & \cdot & \cdot & \equiv & b_3 \\
 & & x_3 & \cdot & +x_5 & \cdot & +x_7 & \cdot & +x_9 & +x_{10} & \cdot & +x_{12} & +x_{13} & \cdot & \equiv & b_4 \\
x_1 & \cdot & +x_3 & +x_4 & \cdot & +x_6 & +x_7 & +x_8 & +x_9 & \cdot & \cdot & \cdot & +x_{13} & \cdot & \equiv & b_5 \\
 & x_2 & \cdot & +x_4 & \cdot & \cdot & \cdot & +x_8 & +x_9 & +x_{10} & \cdot & +x_{12} & +x_{13} & \cdot & \equiv & b_6 \\
x_1 & \cdot & \cdot & \cdot & +x_5 & \cdot & +x_7 & \cdot & \cdot & +x_{10} & +x_{11} & \cdot & +x_{13} & +x_{14} & \equiv & b_7 \qquad \text{mod } 2 \\
x_1 & +x_2 & +x_3 & \cdot & +x_5 & +x_6 & \cdot & +x_8 & \cdot & +x_{10} & \cdot & \cdot & \cdot & +x_{14} & \equiv & b_8 \\
 & x_2 & \cdot & +x_4 & \cdot & +x_6 & \cdot & \cdot & \cdot & +x_{10} & +x_{11} & \cdot & +x_{13} & +x_{14} & \equiv & b_9 \\
 & & x_3 & \cdot & \cdot & \cdot & +x_7 & \cdot & \cdot & \cdot & +x_{11} & \cdot & \cdot & +x_{14} & \equiv & b_{10} \\
 & & x_3 & +x_4 & \cdot & \cdot & +x_7 & +x_8 & \cdot & \cdot & +x_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & \equiv & b_{11} \\
 & & & x_4 & \cdot & \cdot & \cdot & +x_8 & \cdot & \cdot & +x_{11} & \cdot & \cdot & +x_{14} & \equiv & b_{12}
\end{array}
\tag{2.4}
$$

Построение базиса решения для одного шаблона

Лемма 2.1. Если число клеток шаблона чётно, то он не гомоморфен ни одной единице.

Это утверждение вытекает из того, что наложение любого количества таких шаблонов и их допустимых преобразований даёт в пересечении чётное число. Иными словами, в правой части (2.4) будет число клеток цвета 1, равное $0 \pmod 2$, и в левой части не должна появиться единица.

Теорема 2.1. Линейный шаблон $s = 2l + 1$ $(l \geq 1)$ не гомоморфен ни одной единице.



Построение базиса решения для нескольких шаблонов

На рис. 2.7 показано построение единицы для первой клетки.

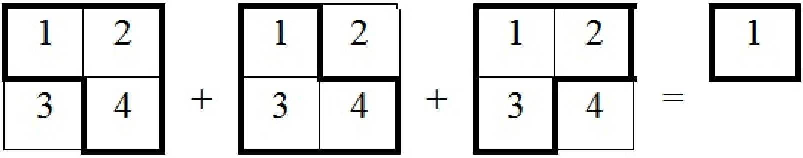


Рис. 2.7

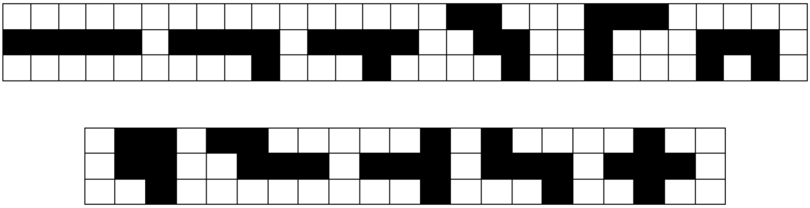


Рис. 2.8. – Образцы шаблонов из пяти клеток

ПОСТРОЕНИЕ ДВУМЕРНОЙ МНОГОЦВЕТНОЙ МОЗАИКИ

Построение плоских изображений для *K* > 2

Построение базиса решений для одного шаблона

Построение базиса решений для многих шаблонов

Пример. ($s_1 =$

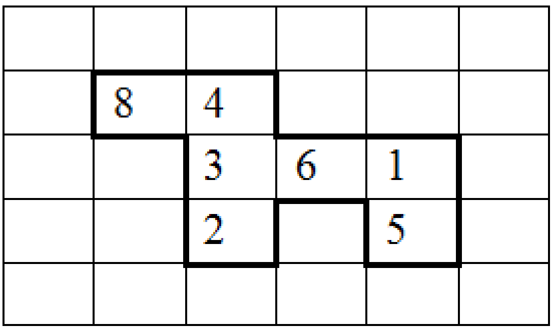


Рис. 3.6. Второй цветной шаблон для $K = 11$

Весь ход преобразований отражен на рисунке ниже.

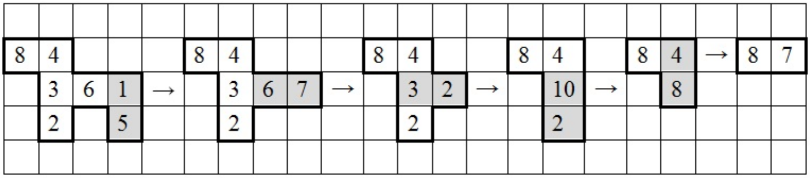


Рис. 3.7. – Преобразование второго шаблона

Пример. На рис. 3.8 показано соответствующее преобразование наложением трехклеточного шаблона, где в качестве большого шаблона взят шаблон на рис. 3.7.

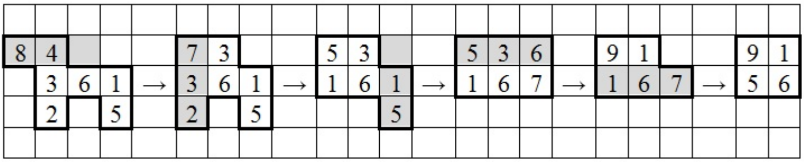


Рис. 3.8. – Преобразование наложением трехклетчатого шаблона