Українська Федерація Інформатики

Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України

Вищий навчальний заклад Укоопспілки
«ПОЛТАВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ ЕКОНОМІКИ І ТОРГІВЛІ»
(ПУЕТ)

ІНФОРМАТИКА ТА СИСТЕМНІ НАУКИ (ІСН-2015)

МАТЕРІАЛИ
VI ВСЕУКРАЇНСЬКОЇ НАУКОВО-ПРАКТИЧНОЇ КОНФЕРЕНЦІЇ ЗА МІЖНАРОДНОЮ УЧАСТЮ

(м. Полтава, 19–21 березня 2015 року)

За редакцією професора О. О. Ємця

Полтава
ПУЕТ
2015

УДК 519.8

РОЗРОБКА І ДОСЛІДЖЕННЯ ШВИДКОЇ СХЕМИ ПОБУДОВИ МНОЖИНИ ОРТОГОНАЛЬНИХ СПЛАЙНІВ НА ВІДРІЗКУ [-1,1]

О. М. Литвин*, д. ф.-м. н., професор*
Українська інженерно-педагогічна академія
academ_mail@ukr.net
Л. С. Лобанова*, к. ф.-м. н., доцент*
Українська інженерно-педагогічна академія
ludmila_lobanova@mail.ru

Визначальна роль сплайнів, які поряд з ортогональними системами функцій широко використовуються в обчислювальній математиці і інженерній практиці, привела до появи великої кількості публікацій, присвячених сплайнам. Серед ортогональних кусково-лінійних сплайнів найбільш відомою є система лінійних сплайнів Франкліна, яка отримується застосуванням процесу ортогоналізації Шмідта на відрізку [0,1] до системи Фабера–Шаудера. Зауважимо, що ортонормована система неперервних функцій Франкліна не має явного виразу для елементів системи, як це є в ортогональних системах Хаара, Уолша і Радемахера для кусково-сталих сплайнів.

Автори присвятили ряд робіт [1-3] питанню побудови та використанню сплайнів, ортогональних на заданому відрізку.

Метою даної роботи стала розробка нового методу побудови системи ортогональних на відрізку [-1,1] сплайнів перщого порядку, який дозволив отримати явні формули для вказаних сплайнів і на їх основі, таким чином, одержати швидку схему побудови множини ортогональних сплайнів першого степеня на [-1,1].

Згідно з пропонуємим методом введемо вузли $x_0 = -1, x_1, x_2, ..., x_n = 1$, які ділять відрізок [-1,1] на n рівних частин і похначимо

$$\varphi_{n,0}(x)=\begin{cases}\dfrac{x-x_1}{-1-x_1}, & -1\le x<x_1\\ 0, & x\ge x_1\end{cases},\quad \varphi_{n,n}(x)=\begin{cases}0, & x\le x_{n-1}\\ \dfrac{x-x_{n-1}}{1-x_{n-1}}, & x_{n-1}<x\le 1\end{cases}$$

$$\varphi_{n,k}\left(x\right)=\begin{cases}0, & x\le x_{k-1}\\ \dfrac{x-x_{k-1}}{x_k-x_{k-1}}, & x_{k-1}<x\le x_k\\ \dfrac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}, & x_k<x<x_{k+1}\\ 0, & x\ge x_{k+1}\end{cases},\qquad 1\le k\le n-1$$

З наведеної системи функцій $\varphi_{n,i}\left(x\right), i=\overline{0,n}$ виберемо ті, які апріорі є ортогональними на відрізку [-1,1]:
$S_0^{(n)}\left(x\right)=\varphi_{n,0}\left(x\right), S_1^{(n)}\left(x\right)=\varphi_{n,2}\left(x\right), S_2^{(n)}\left(x\right)=\varphi_{n,4}\left(x\right),\ldots,S_{m-1}^{(n)}\left(x\right)=\varphi_{n,2\left(m-1\right)}\left(x\right), S_m^{(n)}\left(x\right)=\varphi_{n,2m}\left(x\right)$,
де $m=\left[\dfrac{n}{2}\right]$. Таким чином, отримано частину системи ортогональних на [-1,1] сплайнів в кількості $\left[\dfrac{n}{2}\right]+1.$ На її основі, застосовуючи метод ортогоналізації Грама-Шмідта, будуємо останні $n-\left[\dfrac{n}{2}\right]$ ортогональних сплайнів, враховуючи при обчисленні коефіцієнтів рівності

$$\int_{-1}^{1}\varphi_{n,0}^2(x)dx=\frac{2}{3n},\ \int_{-1}^{1}\varphi_{n,k}^2(x)dx=\frac{4}{3n}, 1\le k\le n-1,\ \int_{-1}^{1}\varphi_{n,n}^2(x)dx=\frac{2}{3n},$$

$$\int_{-1}^{1}\varphi_{n,k-1}(x)\varphi_{n,k}(x)dx=\frac{1}{3n},\ 1\le k\le n.$$

Наприклад, при $n=4$ згідно з викладеним маємо:

1) графіки функцій $\varphi_{4,i}\left(x\right), i=\overline{0,4}$, наведені на рис.1, дозволяють стверджувати, що ортогональними є сплайни

$$S_0^{(4)}\left(x\right)=\varphi_{4,0}\left(x\right), S_1^{(4)}\left(x\right)=\varphi_{4,2}\left(x\right), S_2^{(4)}\left(x\right)=\varphi_{4,4}\left(x\right);$$

2) згідно з методом ортогоналізації покладаємо

$$S_3^{(4)}(x)=C_{3,1}S_0^{(4)}+C_{3,2}S_1^{(4)}+\varphi_{4,1}(x)\,;$$

з умови ортогональності $S_3^{(4)}(x)$ до попередніх сплайнів знаходимо, що $C_{3,1}=-0,5;\ C_{3,2}=-0,25$, так що

$$S_3^{(4)}(x)=-0,5S_0^{(4)}-0,25S_1^{(4)}+\varphi_{4,1}(x)\,;$$

3) покладаючи $S_4^{(4)}(x)=C_{4,1}S_1^{(4)}+C_{4,2}S_2^{(4)}+C_{4,3}S_3^{(4)}+\varphi_{4,3}(x)$ з урахуванням умов ортогональності, отримуємо

$$S_4^{(4)}(x)=-0,25S_1^{(4)}-0,5S_2^{(4)}+\frac{1}{13}S_3^{(4)}+\varphi_{4,3}(x)\,.$$

Аналогічно можна отримати формули для всіх $n+1$ сплайнів при будь-якому n.

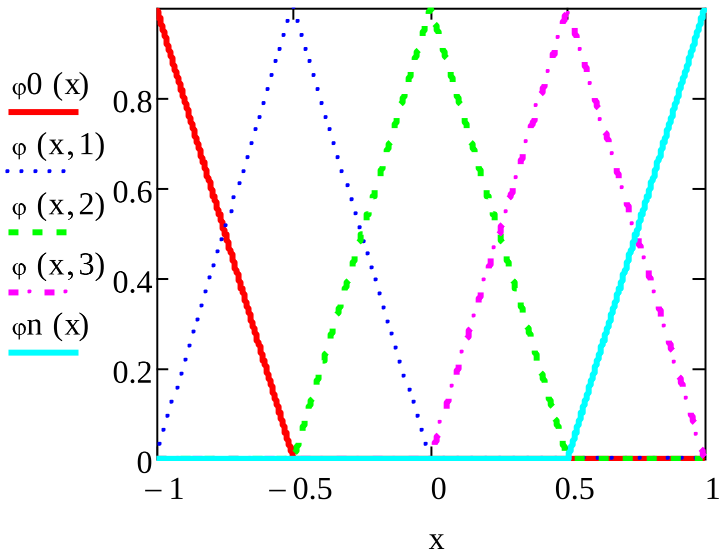

Рис. 1

Аналіз результатів, отриманих за пропонуємим алгоритмом, дозволив отримати загальну формулу для побудованих сплайнів. Припустимо, що $n=2m,\ m=1,2,3,\ldots$. Апріорі ортогональними є $m+1$ сплайн $S_0(x)=\varphi_0(x),\ S_1(x)=\varphi_2(x),\ S_3(x)=\varphi_4(x),\ldots,S_m(x)=\varphi_{2m}(x)\,;$

будуємо сплайни з номерами $m+1,\ m+2,\ m+3,\ ...,\ m+m=2m$. Загальна формула має вигляд $S_{m+k}(x)=a_{1,k}S_{k-1}(x)+a_{2,k}S_k(x)+a_{3,k}S_{m+k-1}(x)+\varphi_{2k-1}(x)$.

Тут $a_{1,k}=\begin{cases}-0,5,\ k=1\\ -0,25,\ k=\overline{2,m}\end{cases}$, $a_{2,k}=\begin{cases}-0,5,\ k=m\\ -0,25,\ k=\overline{1,m-1}\wedge m>1\end{cases}$,

$$a_{3,k}=\begin{cases}0, & k=1\\ 1/13, & k=2\\ 1/(14-a_{3,k-1}), & k=\overline{3,m}\end{cases}.$$

При непарному $n=2m-1$ апріорі ортогональними є сплайни $S_0(x)=\varphi_0(x),\ S_1(x)=\varphi_2(x),\ S_3(x)=\varphi_4(x),...,S_{m-1}(x)=\varphi_{2m-2}(x)$, а загальна формула для сплайнів з номерами $m,\ m+1,\ m+2,\ ...,\ m+m-1=2m-1$ має вигляд

$$S_{m-1+k}(x)=b_{1,k}S_{k-1}(x)+b_{2,k}S_k(x)+b_{3,k}S_{m+k-2}(x)+\varphi_{2k-1}(x),$$ де

$$b_{1,k}=\begin{cases}-0,5,\ k=1\\ -0,25,\ k=\overline{2,m}\end{cases},\quad b_{2,k}=\begin{cases}-0,25,\ k=\overline{1,m-1}\\ 0, \quad k=m\end{cases},$$

$$b_{3,k}=\begin{cases}0, & k=1\\ 1/13, & k=2\\ 1/(14-b_{3,k-1}), & k=\overline{3,m}\end{cases}$$

Література

1. Литвин О. М., Лобанова Л. С. Ортогональні сплайни класу $C[-1,1]$ // Доп. АН України. – 1997.- №1. – С. 26-30.

2. Литвин О. М., Лобанова Л. С. Математичне моделювання процесів за допомогою інтерполяційних сплайнів, ортогональних на відрізку $[-1,1]$ // Штучний інтелект. – 2011. – №3. – С. 26-30.

3. Литвин О. М., Лобанова Л. С. Ортогональні сплайни при розв'язанні крайових задач для ЗДР з розривними правими частинами. Матеріали тринадцятої міжнародної наукової конференції імені академіка М. Кравчука. 2010. – С. 172.