Українська Федерація Інформатики

Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України

Вищий навчальний заклад Укоопспілки
«ПОЛТАВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ ЕКОНОМІКИ І ТОРГІВЛІ»
(ПУЕТ)

ІНФОРМАТИКА ТА СИСТЕМНІ НАУКИ (ІСН-2015)

МАТЕРІАЛИ
VI ВСЕУКРАЇНСЬКОЇ НАУКОВО-ПРАКТИЧНОЇ КОНФЕРЕНЦІЇ ЗА МІЖНАРОДНОЮ УЧАСТЮ

(м. Полтава, 19–21 березня 2015 року)

За редакцією професора О. О. Ємця

Полтава
ПУЕТ
2015

УДК 519.6

МЕТОД ЗНАХОДЖЕННЯ ТОЧОК РОЗРИВУ ПЕРШОГО РОДУ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

***О. М. Литвин**, д. ф.-м. н., професор*
Українська інженерно-педагогічна академія
academ_mail@ukr.net
***Ю. І. Першина**, к. ф.-м. н., доцент*
Українська інженерно-педагогічна академія
yulia_pershina@mail.ru

Нехай розривна лінійна функція задана на інтервалі [0;1]. Інформацією про функцію $f(x)$, $x \in [0;1]$ є її значення, які можна отримати на довільній скінченній множині точок з інтервалу $[0,1]$. Потрібно знайти точки ε-розриву першого роду.

Визначення 1. Будемо називати розривним інтерполяційним лінійним сплайном на відрізку $[x_k, x_{k+1}],\ k=\overline{1,n-1}$ функцію $S(x) \in C^{-1}[a,b]$, яка визначається наступним чином

$$S(x) = C_k^{+} \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} + C_{k+1}^{-} \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k},\ k=\overline{1,n-1}, \tag{1}$$

де $C_k^{+}, C_{k+1}^{-}, k=\overline{1,n-1}$ – параметри сплайну $S(x)$, що визначаються у вигляді односторонніх границь

$$C_k^{+} = \lim_{x \to x_k + 0} f(x), \quad C_{k+1}^{-} = \lim_{x \to x_{k+1} - 0} f(x).$$

Визначення 2 Розривним апроксимаційним лінійним сплайном на відрізку $[x_k, x_{k-1}],\ k=\overline{1,n-1}$ будемо називати розривну функцію, визначену формулою (1), де коефіцієнти C_k^{+}, C_{k+1}^{-} сплайна знаходяться методом найменших квадратів в одній із форм

– дискретній формі

$$\sum_{k=1}^{n-1} (f(x_k+0) - S_k(x_k+0))^2 + \sum_{k=1}^{n-1} (f(x_k-0) - S_k(x_k-0))^2 \to \min_C ;$$

– інтегральній формі

$$\sum_{k=1}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}(f(t)-S(t))^2\,dt\to\min_C \qquad (2)$$

Теорема 3. Якщо $f(x)\in C^{-1}[0;1]$ є кусково-лінійною функцією і має одну точку розриву першого роду $x^*=\frac{m}{2^k}$, $m,k\in N$, $m<2^k$, то можна її виявити не більше, ніж за k ітерацій.

Теорема 4. Якщо $f(x)\in C^{-1}[0;1]$ – кусково-лінійна функція і має одну точку розриву першого роду x^*, то виявити її можна за $k=\lceil -\log_2 2\varepsilon\rceil$ ітерацій з похибкою ε.

Приклад. Нехай розривна лінійна функція $f(x)$ має розрив першого роду в точці $x^*=\pi-3\approx 0.14159265$. Складемо таблицю результатів виявлення точки ε-розриву, тобто ε -інтервал, та номер ітерації в залежності від заданої похибки ε.

Похибка ε	Номер ітерації, k	ε -інтервал
0,01	6	(0.140625; 0.15625)
0,001	9	(0.140625; 0.1425781)
0,0001	13	(0.14147949; 0.1416016)

Визначення 4. Базисним розривним лінійним сплайном на інтервалі $[0;1]$ будемо називати сплайн

$$B(x)=\begin{cases}h(x), & x\in[0;1],\\ 0, & x\notin[0;1]\end{cases},$$

де $h(x)$ – лінійний неперервний поліном.

Теорема 3. Довільну розривну лінійну функцію $f(x)$ зі скінченною кількістю розривів першого роду можна представити у вигляді суми базисних розривних сплайнів.

Дійсно завжди, знайдуться такі $M\in N$ і параметри $C_k^{\pm}$, що лінійну розривну функцію можна записати у вигляді

$$f(x)=\sum_{k=1}^{M} B(Mx-k;C_k^{\pm}),\quad C_k^{\pm}=f\left(\frac{k}{M}\pm 0\right).$$

Викладемо алгоритм наближення розривної лінійної функції покроково.

Крок 1. Будуємо розривний апроксимаційний лінійний сплайн $S(x)$ на заданих вузлах $x_k,\ k=\overline{1,n}$ (наприклад, рівномірно розташованих) за формулою (1) з невідомими коефіцієнтами $C_k^+, C_{k+1}^-,\ k=\overline{0,n-1}$. Причому на першій ітерації вважаємо, що односторонні значення функції в заданих вузлах збігаються. Знаходимо вектор $C=(C_1^+,C_2^-,C_2^+,C_3^-,...,C_{n-1}^+,C_n^-)$ з умови (2), обчислюючи функціонал $J(C)$.

Крок 2. Знаходимо інтервали, на яких $\int_{x_k}^{x_{k+1}}(f(t)-Sp_k(t))^2\,dt\neq 0,\ k=\overline{0,n-1}$. Обчислюємо їх довжину $d_k=x_{k+1}-x_k$. Якщо $d_k<2\varepsilon$, то інтервали (x_k,x_{k+1}) є ε-околом точок розриву (ε-розривами) і ітераційний процес закінчено. Якщо ця умова не виконується, то знайдені інтервали ділимо навпіл. Інші інтеграли дорівнюють нулю, оскільки $f(x)$ є кусково-лінійною функцією. Отримаємо новий набір вузлів. І повторюємо крок 1.

Крок 3. В якості вузлів розривного сплайну обираємо кінці інтервалу (0;1) та точки ε-розриву $x_m^*,\ m=\overline{1,M}$, враховуючи $C_0^+=f(0),\ C_m^{\pm}=f(x_m\pm\varepsilon),\ .\ m=\overline{1,M},\ C_{M+1}^-=f(1)$.

Цей алгоритм можна модифікувати на випадок нелінійної функції. Оскільки наближувати будемо лінійним розривним сплайном, то крім значення ε, потрібно ще значення точності наближення δ.

Висновок. В роботі введено поняття розривного лінійного апроксимаційного сплайну, та пропонується метод знаходження точок розриву лінійної функції однієї змінної, інформацією про яку є її значення, які можна отримати на довільній скінченній множині точок з інтервалу $[0;1]$. Цей метод може бути розповсюджений на випадок нелінійної розривної функції.