



**Українська Федерація Інформатики
Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України
Вищий навчальний заклад Укоопспілки
«ПОЛТАВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ ЕКОНОМІКИ І ТОРГІВЛІ»
(ПУЕТ)**

ІНФОРМАТИКА ТА СИСТЕМНІ НАУКИ (ІСН–2015)

**МАТЕРІАЛИ
VI ВСЕУКРАЇНСЬКОЇ НАУКОВО-ПРАКТИЧНОЇ
КОНФЕРЕНЦІЇ ЗА МІЖНАРОДНОЮ УЧАСТЮ**

(м. Полтава, 19–21 березня 2015 року)

За редакцією професора О. О. Ємця

**Полтава
ПУЕТ
2015**

**НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ
ОПТИМАЛЬНОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ
ОПТИМАЛЬНОГО РАЗБИЕНИЯ МНОЖЕСТВ С
ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ СВЯЗЯМИ**

С. А. Ус, к. ф.-м. н., профессор; О. Д. Станина

*Государственное ВУЗ «Национальный горный университет»
us-svetlana@yandex.ru, stanina@i.ua*

Пусть Ω – замкнутое, ограниченное, измеримое по Лебегу множество евклидова пространства E^n . Необходимо разбить его на N измеримых по Лебегу подмножеств $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N$ центры, которых заданы $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N$ в области Ω так, чтобы минимизировать функционал

$$F(\Omega_1, \dots, \Omega_N; v_{11}, \dots, v_{NM}) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} c_i(x, \tau_i^1) \rho(x) dx + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M c_{ij}(\tau_i^1, \tau_j^{11}) v_{ij} \longrightarrow \min \quad (1)$$

при ограничениях

$$mes(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, \quad i \neq j$$

$$\bigcup \Omega_i = \Omega$$

$$\int_{\Omega_i} \rho(x) dx = b_i^1, \quad i = \overline{1, N}$$

$$\sum_{i=1}^N v_{ij} = b_j^{\prime\prime}, \quad j = \overline{1, M}$$

Здесь $c_i(\bullet)$, $i = \overline{1, N}$ – действительные, ограниченные, определенные на Ω функции; $\rho(x)$ – действительные, интегрируемые, определенные на Ω функции; v_{ij}^I – неотрицательные числа; b_i^I , $i = \overline{1, N}$, $b_j^{\prime\prime}$, $j = \overline{1, M}$ –

заданные действительные числа, удовлетворяющие условию разрешимости задачи:

$$\sum_{i=1}^N b_i^I = \int_{\Omega} \rho(x) dx$$

$$\sum_{j=1}^M b_j^{II} = \int_{\Omega} \rho(x) dx$$

В соответствии с [1] от поставленной задаче переходим к задаче такого вида:

Найти вектор-функцию $\lambda * (\cdot) = (\lambda * _1 (\cdot), \dots, \lambda * _N (\cdot))$, такую, что

$$I(\lambda(\cdot)) = \min_{\lambda \in \Gamma_2} I(\lambda(\cdot))$$

$$\Gamma_2 = \{ \lambda(x) : \lambda(x) \in \Gamma \text{ п.в. для } x \in \Omega;$$

$$\int_{\Omega_i} \rho(x) \lambda_i(x) dx = b_i^I, i = 1, \dots, N,$$

Здесь

$$\Gamma = \left\{ \lambda(x) : \sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1 \text{ п.в. для } x \in \Omega, \right.$$

$$\left. 0 \leq \lambda_i(x) \leq 1, x \in \Omega, i = 1, \dots, N \right\}$$

Функционал Лагранжа этой задачи имеет вид:

$$L(\lambda, v, \psi, \eta) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} c_i(x, \tau_i^1) \rho(x) \lambda(x) dx + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M c_{ij}(\tau_i^1, \tau_j^{11}) v_{ij}$$

$$+ \sum_{i=1}^N \psi_i \left(\int_{\Omega} \rho(x) \lambda(x) dx - b_i^I \right) + \sum_{j=1}^M \eta_j \left(\sum_{i=1}^M v_{ij} - b_j^{11} \right)$$

где $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_N)$ – N-мерный вектор вещественных чисел;

$\eta = (\eta_1, \dots, \eta_M)$ – M-мерный вектор вещественных чисел;

$\lambda(x) \in \Gamma$ для всех $x \in \Omega$, $v \in R_{n+m}^+$

Пару элементов $(\lambda^*, v, \psi^*, \eta^*)$ назовем седловой точкой на множестве $\Gamma \times R^+ \times R^2$ если

$$L(\lambda^*, v, \psi, \eta) \leq L(\lambda^*, v^*, \psi^*, \eta^*) \leq L(\lambda, v, \psi^*, \eta^*)$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема. Для того чтобы возможное разбиение $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N$ являлось оптимальным для задачи (1) необходимо и достаточно, чтобы функционал Лагранжа $L(\lambda^*, v, \psi, \eta)$ имел седловую точку $(\lambda^*, v^*, \psi^*, \eta^*)$.

Седловая точка $(\lambda^*, v^*, \psi^*, \eta^*)$ определяется в следующем виде:

$$\lambda_i^*(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } c_i(x, \tau_i^1)\rho(x) + \psi_i^*\rho(x) \leq 0 \\ 0, & \text{если } c_i(x, \tau_i^1)\rho(x) + \psi_i^*\rho(x) > 0 \end{cases}$$

v^*, ψ^*, η^* - решение задачи вида:

$$G = \max_{\eta, \psi} \min_v \int_{\Omega_i} (\min_k c_k(x, \tau_k^1)\rho(x) + \psi_k\rho(x)) dx + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M c_{ij}(\tau_i^1, \tau_j^1)v_{ij} + \\ + \sum_{i=1}^N \psi_i (\min_k c_k(x, \tau_k^1)\rho(x) + \psi_k\rho(x)) + \sum_{j=1}^M \eta_j (\sum_{i=1}^N v_{ij} - b_j^1) - \sum_{i=1}^N \psi_i b_i^1$$

В данной работе были получены необходимые и достаточные условия оптимальности решения задачи оптимального разбиения множеств с дополнительными связями.

Литература

1. Киселева Е. М., Шор Н. З. Непрерывные задачи оптимального разбиения множеств: теория, алгоритмы, приложения: Монография. – К.: Наукова Думка 2005. – 564 с.