Українська Федерація Інформатики

Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України

Вищий навчальний заклад Укоопспілки
«ПОЛТАВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ ЕКОНОМІКИ І ТОРГІВЛІ»
(ПУЕТ)

ІНФОРМАТИКА ТА СИСТЕМНІ НАУКИ (ІСН-2015)

МАТЕРІАЛИ VI ВСЕУКРАЇНСЬКОЇ НАУКОВО-ПРАКТИЧНОЇ КОНФЕРЕНЦІЇ ЗА МІЖНАРОДНОЮ УЧАСТЮ

(м. Полтава, 19–21 березня 2015 року)

За редакцією професора О. О. Ємця

Полтава
ПУЕТ
2015

УДК 519.6

АВТОМАТИЧНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ТА РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ З ВИКОРИСТАННЯМ ПІДВИЩЕНОЇ ТОЧНОСТІ ОБЧИСЛЕНЬ

О. М. Хіміч, *д. ф.-м. н., професор,*
Т. В. Чистякова, *к. ф.-м. н.,с. н. с.*
Інститут кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України
khimich_ic@mail.ru, tamara.chistjakova@gmail.com

Розглядається технологія дослідження математичних властивостей систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) та їх розв'язування на основі багаторозрядної арифметики для одержання гарантованої точності комп'ютерних результатів.

Аналіз особливостей комп'ютерної арифметики показав, що:

- континуум всіх дійсних чисел в комп'ютері апроксимується кінцевою множиною кінцевих дробів, тому при введенні чисельних даних виникають помилки заокруглення;
- будь-який сучасний комп'ютер має найменше додатнє число, яке може бути в ньому представлено, і всі числа, менші за абсолютною величиною цього числа, замінюються нулем;
- закони виконання арифметичних операцій на комп'ютері відрізняються від теоретичних математичних законів [1].

Отже, аксиоматика математики відрізняється від аксиоматики комп'ютерної математики. Тому, наприклад, визначена математична відмінність між матрицями повного та неповного рангу існує лише теоретично. В комп'ютері така відмінність виявляється невизначеною. Деяка невироджена матриця може стати в комп'ютері виродженою. З іншої сторони, вироджена матриця за рахунок похибок заокруглень може стати близькою до виродженості, але невиродженою. Проблема полягає в тому, щоб в комп'ютері дослідити математичні властивості задачі, а також створити комп'ютерний алгоритм одержання наближеного розв'язку задач як коректних, так і некоректних, як погано обумовлених так і добре обумовлених.

З метою вибору необхідного алгоритму розв'язування СЛАР та одержання достовірного розв'язку в комп'ютері доцільно:

- дослідити коректність постановки математичної задачі;
- визначити або оцінити число обумовленості сформованої системи лінійних алгебраїчних рівнянь;
- оцінити похибку машинного розв'язку.

У випадку, коли вихідні дані системи

$$Ax = b \tag{1}$$

задано точно, виникає принципова можливість ідентифікувати її властивості та одержати розв'язок з гарантованою точністю.

Є різні підходи до вирішенням цього питання на апаратному [2] та програмному рівні [3]. В даному випадку розглядаються питання автоматизації процесів дослідження математичних властивостей задачі та розв'язування при використанні багаторозрядної арифметики за допомогою функцій бібліотеки GMP (GNU Multiple-Precision Library) [3].

Основним параметром ідентифікації властивостей комп'ютерної моделі задачі є число обумовленості матриці $h(A) = \|A\| \times \|A^{-1}\|$ або його оцінка, одержана в ході реалізації LU або LL^T – розвинення [1]. Критерієм для визначення виродженості системи в межах машинної похибки є умова

$$1.0 + 1.0 / h(A) = 1.0 . \tag{2}$$

При виконанні цієї умови матриця вважається виродженою з робочою розрядністю. Це означає, що в околі машинної похибки знайдеться вироджена матриця. Але такий же ефект може давати і погано обумовлена матриця відносно відповідної розрядності. Тому дослідження необхідно продовжити з використанням підвищеної розрядності обчислень: 128, 256, ….

Виконання умови (2) на послідовності розрядних сіток свідчить про виродженість вихідної матриці. В цьому випадку, використовуючи методи регуляризації, наприклад *SVD*-розвинення, знаходимо наближення до псевдорозв'язків задачі (1). Невиконання умови (2) на відповідній розрядності вказує на те, що вихідна задача є погано обумовлена відносно попередньої розрядності і можна отримати наближення до єдиного розв'язку задачі (1), використовуючи алгоритми LU або LL^T – розвинення.

Наведемо фрагмент протоколу автоматичного дослідження та розв'язування системи з матрицею:

$$A = \begin{bmatrix} 10^m + 2 + 10^n & -10^m + 10^n & -10^m + 2 - 10^n & -10^m + 10^n \\ -10^m + 10^n & 10^m + 2 + 10^n & 10^m - 10^n & 10^m - 2 + 10^n \\ -10^m + 2 - 10^n & 10^m - 10^n & 10^m + 2 + 10^n & 10^m - 10^n \\ -10^m + 10^n & 10^m - 2 + 10^n & 10^m - 10^n & 10^m + 2 + 10^n \end{bmatrix},$$

та правою частиною

$b_i = \sum_{j=1}^{4} a_{ij}$, i=1, …, N, де N=4, n=8, m=-8.

Точний розв'язок: $x = 1,\quad 1,\quad 1,\quad 1$.

Фрагмент лістингу протоколу дослідження та розв'язування

```
M e t h o d: LU decomposition
    Double precision
!!!  WARNING:the solution's reliability isn't guaranteed
since the matrix may turn out to be singular within the
accuracy of its elements' specification.
Estimate of condition number: 7.15828e+15.
    SOLUTION
9.3333333757188497e-01 1.0666666644149363e+00
1.0666666664017577e+00 1.0666666644149363e+00
    Precision: 128
    SOLUTION
1      1       1        1
Estimate of the solution: 1.051814538074305e-23
```

В роботі запропоновано програмно-алгоритмічний інструментарій для реалізації автоматичного дослідження та розв'язування СЛАР з використанням підвищеної розрядності.

Література

1. Химич А.Н., Молчанов И.Н., Попов О.В. и др. Параллельные алгоритмы решения задач вычислительной математики. / К.: Наук. думка, 2008. – 247 с.
2. Опанасенко В.М., Хіміч О.М. Лісовий О.М., Чистякова Т.В. Розв'язання задач с підвищеною точністю обчислень. // Управляющие системы и машины, № 1, 2011. – С. 9 – 18.
3. Khimich A., Nikolaevskaya E., Chistyakova T. Programming with Multiple Precision. / Springer-Verlag. Berlin, 2012. – 206 p.