Українська Федерація Інформатики
Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України
Вищий навчальний заклад Укоопспілки
«ПОЛТАВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ ЕКОНОМІКИ І ТОРГІВЛІ»
(ПУЕТ)

ІНФОРМАТИКА ТА СИСТЕМНІ НАУКИ (ІСН-2015)

МАТЕРІАЛИ
VI ВСЕУКРАЇНСЬКОЇ НАУКОВО-ПРАКТИЧНОЇ КОНФЕРЕНЦІЇ ЗА МІЖНАРОДНОЮ УЧАСТЮ

(м. Полтава, 19–21 березня 2015 року)

За редакцією професора О. О. Ємця

Полтава
ПУЕТ
2015

УДК 519.85

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ МАКСИМИЗАЦИИ НОРМЫ ВЕКТОРА НА ВЫПУКЛОМ МНОЖЕСТВЕ

***А. И. Косолап**, д.ф.-м.н., профессор,*
***Ю. Черноусова**, аспирантка*
Украинский государственный химико-технологический университет
anivkos@ua.fm, yuliya_chernousova@mail.ru

Математические оптимизационные модели сложных систем, как правило, являются многоэкстремальными. Подобные задачи возникают в самых различных областях человеческой деятельности (экономике, управлении, химии, биологии, физике, проектировании, информационных системах и т. д.). Нахождение глобального экстремума в этих задачах является сложной проблемой. Существующие методы позволяют эффективно находить точку глобального экстремума с помощью ЭВМ только для задач малой размерности. Распространение получили методы случайного поиска, которые находят точку глобального минимума только с некоторой вероятностью [1]. Численные эксперименты показывают, что достаточно эффективным новым методом глобальной оптимизации является метод точной квадратичной регуляризации [2]. Этот метод позволяет разбить многоэкстремальные задачи на два класса. Первый класс образуют задачи, которые можно преобразовать к выпуклой одноэкстремальной задаче. Второй класс сводится к задаче нахождения максимума евклидовой нормы вектора на выпуклом множестве. Эта задача, в общем случае, является многоэкстремальной, но при определенных условиях она также становится одноэкстремальной. В этой работе предложены условия одноэкстремальности для задачи максимизации нормы вектора на выпуклом множестве.

Рассмотрим задачу глобальной оптимизации

$$\min\{\, f_0(x) \mid f_i(x) \le 0, i = 1,\ldots,m, x \in E^n \},\qquad (1)$$

где все $f_i(x)$ – дважды дифференцированные функции, E^n – евклидово пространство.

Метод точной квадратичной регуляризации преобразует задачу (1) к задаче нахождения максимума нормы вектора на выпуклом множестве:

$$\max\{\, \|x\|^2 \mid x \in S \,\}\ .\qquad (2)$$

В задаче (2) количество локальных максимумов зависит от структуры выпуклого множества S. Показано, что, если S многогранник, вписанный в шар с центром в точке a , то задача (2) сводится к одноэкстремальной [2]

$$\boldsymbol{max\{\, a^T x \,|\, x \in S \,\}} \tag{3}$$

В более общем случае, решение выпуклой задачи (3) совпадает с решением задачи (2), если $S \subseteq \left\{ x \middle| \|x-a\|^2 \le \|x^* - a\|^2 \right\} \subseteq \left\{ x \middle| \|x\|^2 \le \|x^*\|^2 \right\}$,

где S – выпуклое множество допустимых значений задачи (1), a – центр шара, тогда решение задачи (3) x^* - есть также точка глобального максимума задачи (2). Если $\left\{ x \middle| \|x-a\|^2 \le \|x^* - a\|^2 \right\} \not\subset \left\{ x \middle| \|x\|^2 \le \|x^*\|^2 \right\}$

либо если точка x^* не лежит на границе шара с центром в точке a, т. е. $\left\{ x \middle| \|x-a\|^2 < \|x^* - a\|^2 \right\}$, то x^* может быть локальным максимумом.

***Определение* 1.** *Точка* x^0, *в которой выполняются следующие условия*:

1) *Существуют такие множители Лагранжа* $\lambda_i \le 0, i = 1,...,m$, *для которых выполняются условия*

$$\nabla L(x^0, \lambda) = \nabla f(x^0) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla f_i(x^0) = 0, \lambda_i\, f_i(x^0) = 0, i = 1,...,m$$

и гессиан $\nabla^2 L(x^0, \lambda)$ *положительно полуопределен*;

2) $S \subseteq \left\{ x \middle| \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla f_i(x^0)^T (x - x^0) \le 0 \right\}$

называется ***внутренней стационарной точкой*** задачи (2).

***Теорема* 1.** *Задача* (2) *одноэкстремальна, если она не имеет внутренних стационарных точек*.

В общем случае, нахождение внутренних стационарных точек является сложной проблемой. Рассмотрим случай, когда множество S является выпуклым многогранником. Покажем, что метод точной квадратичной регуляризации преобразует многоэкстремальную задачу

$$\boldsymbol{max\{\, \|x\|^2 \,|\, Ax \le b, x \ge 0 \,\}}\ . \tag{4}$$

к задаче максимизации нормы вектора на пересечении шаров. Задача (4) преобразуется к виду

$$\max\{\|x\|^2 \left| a_i^T x + \| x \|^2 \le b_i + d, i = 1,...,m, -x + \| x \|^2 \le d \right.\}, \qquad (5)$$

где a_i - строки матрицы A. Необходимо найти минимальное значение $d >$ 0 для которого выполняется условие $\| z \|^2 = d$. Значение d находим методом дихотомии. Допустимое множество задачи (5) является пересечением шаров. В работе [2] предложен алгоритм для решения задачи (5). Алгоритм использует двойственную к (5) задачу, которая является выпуклой.

В докладе приведена теорема, характеризующая условия единственности решения задачи максимизации нормы вектора на выпуклом множестве, в частности введено понятие внутренней стационарной точки. Также показано, как решить многоэкстремальную задачу максимума нормы на выпуклом многограннике. Полученные результаты позволяют значительно упростить решение класса многоэкстремальных задач.

Литература

1. Kenneth, V.P. Differential Evolution. A Practical Approach to Global Optimization/ V.P. Kenneth, R.M. Storn, J.A. Lampinen. – Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2005. – 542 p.
2. Косолап А.И. Методы глобальной оптимизации / А.И. Косолап – Дн-ск.: Наука и образование, 2013. – 316 с.