

2 af

О.О. Емчук

В І С Н И К ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

**Серія прикладна математика
та інформатика**

ВИПУСК 4

Видається з 1999 р.



Львівський національний університет ім. Івана Франка

Львів – 2002

В І С Н И К ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

**Серія прикладна математика
та інформатика**

ВИПУСК 4

Видається з 1999 р.

Львівський національний університет ім. Івана Франка

Львів – 2002

Міністерство освіти України
Львівський національний університет імені Івана Франка

Вісник Львівського університету. Серія прикладна математика та інформатика.
2002. Випуск № 4. 190 с.

Visnyk of the Lviv University. Series Applied Mathematics and Computer Science.
2002. No 4. 190 p.

У Віснику вміщені статті з математичного моделювання, чисельних методів розв'язування задач математичного аналізу, диференціальних рівнянь, рівнянь математичної фізики й оптимізації та з прикладних проблем інформатики. Статті друкуються українською або англійською мовами.

Редакційна колегія: д-р фіз.-мат. наук, проф. *Г. Шинкаренко* (відп. редактор); д-р фіз.-мат. наук, проф. *Г. Цегелик* (заст. відп. редактора); канд. фіз.-мат. наук, доц. *Ю. Щербина* (відп. секретар); канд. фіз.-мат. наук, доц. *М. Бартіш*; д-р фіз.-мат. наук, проф. *М. Войтович*; чл. кор. НАН України, д-р тех. наук, проф. *В. Грицик*; д-р фіз.-мат. наук, проф. *С. Лавренюк*; д-р фіз.-мат. наук, проф. *М. Недашківський*; д-р фіз.-мат. наук, проф. *Б. Попов*; д-р фіз.-мат. наук, проф. *М. Притула*; д-р фіз.-мат. наук, проф. *Я. Савула*; д-р фіз.-мат. наук, проф. *Г. Сулим*; канд. фіз.-мат. наук, доц. *Р. Хапко*; д-р фіз.-мат. наук, проф. *Є. Чапля*.

Адреса редакційної колегії:
Львівський національний університет імені Івана Франка,
кафедра теорії оптимальних процесів.
вул. Університетська, 1, 79000, м. Львів
Тел. 79-47-91
E-mail: kis@franko.lviv.ua

Відповідальний за випуск *Г. Шинкаренко*

Редактор *М. Мартиняк*

Друкується за ухвалою Вченої Ради
Львівського національного університету імені Івана Франка

ISBN 966-613-044-6

© Львівський національний університет
імені Івана Франка, 2002

УДК 519.85

ДО ПИТАННЯ ПРО НЕЛІНІЙНУ ТА ПАРАМЕТРИЧНУ ОПТИМІЗАЦІЮ НА КОМБІНАТОРНИХ МНОЖИНАХ

О. Валуйська, О. Ємець, О. Пічугіна

Полтавський державний технічний університет ім. Ю. Кондратюка

Запропоновано поліноміальний алгоритм розв'язування лінійної параметричної задачі на множинах переставлень та розміщень. Наведено метод відшукування кількості різних розв'язків задачі, дано верхню оцінку цього числа. Розглянуто клас нелінійних задач, до яких належить нелінійна умовна задача оптимізації на переставленнях. Для заданого класу задач запропоновано метод зведення їх до задач опуклої оптимізації.

Ключові слова: нелінійна оптимізація, параметрична оптимізація, комбінаторна оптимізація, переставлення

Розглянемо проблеми оптимізації на комбінаторних множинах переставлень та розміщень. Підхід, який є в основі запропонованих методів, ґрунтується на зануренні цих множин в арифметичний евклідов простір, що дає змогу застосовувати до задач оптимізації геометричні властивості структур [1].

1. ПАРАМЕТРИЧНА ЛІНІЙНА ОПТИМІЗАЦІЯ НА МНОЖИНАХ ПЕРЕСТАВЛЕНЬ ТА РОЗМІЩЕНЬ

Пропонуємо ітераційний алгоритм пошуку всіх розв'язків двох класів лінійних параметричних задач оптимізації на переставленнях та розміщеннях – задач з параметром у цільовій функції та в елементах комбінаторних множин.

Нехай Q – евклідова множина (e -множина) [1] всіх упорядкованих k -вибірок вигляду $(g_{i_1}, \dots, g_{i_k})$ з мультимножини $G = \{g_1, \dots, g_\eta\}$, яка містить η елементів, n з яких різні. Наприклад, якщо $\eta = k$, то Q – загальна множина переставлень, інакше (тобто $\eta > k$) Q – загальна множина розміщень. Розглянемо також Q' – e -множину k -вибірок вигляду $(g'_{i_1}, \dots, g'_{i_k})$ з мультимножини $G' = \{g'_1, \dots, g'_\eta\}$ з η' елементів, n' з яких різні.

Проаналізуємо лінійну параметричну задачу комбінаторної оптимізації такого вигляду:

знайти:

$$c^*(t, g^*) = \sum_{i=1}^k c''_i(t) g''_{i_k}(t) = \min_{g \in Q, g' \in Q'} \sum_{i=1}^k c''_i(t) g''_{i_k}(t) = \min_{g \in Q, g' \in Q'} \sum_{i=1}^k (c_i + t c'_i)(g_{i_k} + t g'_{i_k}), \quad (1)$$

де $t, c_i, c'_i \in \mathbb{R}$, $c''_i = c_i + t c'_i$, $\forall i \in J_k$, де $J_n = \{1 \dots n\}$, $J_n^0 = \emptyset \cup J_n$.

Виконаємо занурення Q, Q' в $\mathbb{R}^k$, внаслідок чого одержимо e -множини E, E' [1] і перетворимо (1) в лінійну параметричну e -задачу на множині E'' точок $\mathbb{R}^k$:

знайти

$$c^*(t, x^*) = c''(t) x''^*(t) = (c + t c')(x^* + t x'^*) = \min_{x + t x' \in E''} \sum_{i=1}^k (c_i + t c'_i)(x_i + t x'_i), \quad (2)$$

де $E'' = \{x'' \in R^k : x'' = x + tx', x \in E, x' \in E'\}$, xu – скалярний добуток векторів $x \in R^k$, $u \in R^k$.

Якщо $c' = 0$, $Q' = \emptyset$ (отже, $c'' = c$, $x'' = x$, $E'' = E$), то задача (2) є лінійною безумовною задачею на комбінаторних множинах переставлень та розміщень, розв'язок якої відомий [1], а саме: якщо елементи мультимножини та коефіцієнти цільової функції впорядковано:

$$c_i \leq c_{i+1}, \forall i \in J_{k-1}; \quad (3)$$

$$g_i \leq g_{i+1}, \forall i \in J_{\eta-1},$$

у випадку, коли E – загальна множина переставлень $E_{\pi}(G)$, то

$$x^*_i = g_{\eta-i+1}, \forall i \in J_k; \quad (4)$$

коли E – загальна множина розміщень $E_{\pi}^k(G)$, то:

$$x^*_i = g_{\eta-i+1}, \forall i \in J_r; \quad x^*_{k-i+1} = g_i, \forall i \in J_s, \quad (5)$$

де $s+r=k$; $c_r < 0$; $c_{r+1} = c_{k-s+1} \geq 0$.

Якщо $c' \neq 0$ або $Q' \neq \emptyset$, то задача (2) – загальне формулювання лінійної безумовної параметричної задачі на комбінаторних множинах, серед яких аналізуємо множини переставлень та розміщень.

Розглянемо два окремі випадки задачі (2):

задачу з параметром у цільовій функції (далі задача А), яку одержуємо з (2) при $c' \neq 0$, $Q' = \emptyset$;

задачу з параметром в елементах мультимножини Q' (задача Б), яку одержуємо, прийнявши в (2) $c' = 0$, $Q' \neq \emptyset$.

Метод викладений у вигляді ітераційного алгоритму, що запропонований тут, дає змогу знайти всі розв'язки задач типу А, Б та задачі (2) на загальних множинах переставлень та розміщень без використання методів лінійного програмування. Алгоритм є поліноміальним, кількість різних розв'язків задачі (2) оцінюємо числом порядку $\frac{k^2}{2} + \frac{\eta^2}{2}$.

Розглянемо задачу А. Введемо поняття мультимножини точок площини (далі 2-мультимножини), її основи та первинної специфікації.

Означення. Нехай M , M' – мультимножини: $|M| = |M'| = m$. 2-мультимножиною M'' називають сукупність упорядкованих 2-вибірок вигляду

$$M'' = \{m''_i = (m_i, m'_i) \in R^2, m_i \in M, m'_i \in M', \forall i \in J_m\}.$$

Упорядковуємо лексикографічним порядком елементи M'' :

$$m''_i \leq m''_{i+1}, \forall i \in J_{m-1}. \quad (6)$$

Впорядкування (6) означає, що:

$$a) \quad m'_i \leq m'_{i+1}, \forall i \in J_{m-1};$$

$$b) \quad \text{якщо } m'_i = m'_{i+1}, \text{ то } m_i \leq m_{i+1}, \forall i \in J_{m-1}.$$

У разі, якщо $m''_i \leq m''_{i+1}$, $m''_i \neq m''_{i+1}$, вважатимемо, що m''_i, m''_{i+1} упорядковані лексикографічним порядком, що позначаємо так: $m''_i < m''_{i+1}$, $\forall i \in J_{m-1}$.

Поняття основи і первинної специфікації 2-мультимножини вводимо за аналогією з мультимножиною [1].

Означення. Основою 2-мультимножини M'' називають кортеж $S(M'')$ різних елементів M'' , упорядкованих за лексикографічним порядком:

$$S(M'') = (e''_1, \dots, e''_{k''}): e''_i \in M'', \forall i \in J_{k''}, e''_i < e''_{i+1}, \forall i \in J_{k''-1}.$$

Мультимножину M'' , утворену з M, M' , позначатимемо $M'' = (M, M')$;

Означення. Первинною специфікацією 2-мультимножини M'' називають кортеж $[M'']$ кратностей $k(e_i)$ ($i \in J_{k''}$) елементів $S(M'')$: $[M''] = (k(e_1), \dots, k(e_{k''}))$.

Розглянемо 2-мультимножину $C'' = (C, C')$ коефіцієнтів цільової функції задачі (2): $M = \{c_1, \dots, c_k\}$, $M' = \{c'_1, \dots, c'_k\}$, $M'' = \{c''_1, \dots, c''_{k''}\}$, $m = k$.

Виконаємо впорядкування (6) над елементами M'' : $c''_i \leq c''_{i+1}$, $\forall i \in J_{k''-1}$. Нехай $|S(M'')| = k''$, $[M''] = (k(e_1), \dots, k(e_{k''})) = (m_1, \dots, m_{k''})$.

Пропонуємо ітераційний алгоритм пошуку всіх розв'язків задачі А.

1. Розглянемо спочатку множину k -переставлень $E_m(G)$.

Визначимо, а потім впорядкуємо за неспаданням величини

$$t_{ij} = -\frac{c_j - c_i}{c_j - c'_i}, \forall i, j \in J_k : i < j, c'_i \neq c'_j. \quad (7)$$

Умова типу (3) для параметричної задачі має вигляд:

$$c''_i(t) \leq c''_{i+1}(t), \forall i \in J_{k''-1}. \quad (8)$$

У сукупності з умовою $x^* \in E$ вона означає, що $x^*_i \geq x^*_{i+1}$, $\forall i \in J_{k''-1}$. (це виконано, наприклад, при $t = \infty$).

У разі збільшення t умова (8) може бути порушена, а вибір t_{ij} забезпечує виконання умови:

$$\begin{cases} c''_i < c''_j, \forall t > t_{ij} \\ c''_i = c''_j, t = t_{ij} \\ c''_i > c''_j, \forall t < t_{ij} \end{cases}$$

звідки випливає, що

$$\begin{cases} x^*_i \geq x^*_j, \forall t > t_{ij} \\ x^*_i \leq x^*_j, \forall t < t_{ij} \end{cases}$$

і у випадку переходу параметра через t_{ij} i -та та j -та координати поточного оптимального розв'язку переставляються, внаслідок чого відбувається перехід до суміжної вершини багатогранника переставлень, яка є новим поточним оптимальним розв'язком задачі А.

2. Розглянемо множину k -розмішень $E_m^k(G)$.

Уведемо $c_0 = c'_0 = 0$, $c''_0 = 0$. Умова типу (7) набуває вигляду

$$t_{ij} = -\frac{c_j - c_i}{c_j - c'_i}, \forall i, j \in J_k^0 : i < j, c'_i \neq c'_j. \quad (9)$$

Унаслідок чого в разі переходу параметра через t_{ij} відбувається перехід до суміжної вершини багатогранника розмішень, причому якщо:

а) $i, j \neq 0$, то i -та та j -та координати поточного оптимального розв'язку переставляються;

б) $i=0$, тоді: якщо в поточному оптимальному розв'язку $x^*_i = g_{a_i}$, то в новому оптимальному розв'язку $x^*_i = g_{\eta-a_i+1}$; якщо в поточному оптимальному розв'язку $x^*_i = g_{\eta-a_i+1}$, то в новому оптимальному розв'язку $x^*_i = g_{a_i}$.

Алгоритм пошуку всіх розв'язків задачі А. Приймаємо $t = \infty$. Оскільки коефіцієнти цільової функції можна вважати впорядкованими за неспаданням (6), то перший поточний розв'язок задачі А за заданого t визначають за формулами (4), (5).

Нехай $i', j': t_{i'j'} = \max_{ij} t_{ij}$, $i'', j'': t_{i''j''} = \max_{(i,j) \neq (i',j')} \{t_{ij}\}$, тоді на $(t_{i'j'}, \infty)$ задача А має єдиний розв'язок $x^{*(1)}$, на $(t_{i''j''), \infty)$ – єдиний розв'язок $x^{*(2)}$, який є новим поточним оптимальним розв'язком, і його одержують з $x^{*(1)}$ заміною однієї координати або переставленням двох координат за названим вище правилом, при $t = t_{i'j'} \cdot x^{*(1)}$, $x^{*(2)}$, а також довільна їхня опукла лінійна комбінація є оптимальним розв'язком задачі А.

Твердження. Кількість N різних розв'язків задачі А визначають за формулою

$$N = N_0 + 1,$$

де N_0 – кількість різних t_{ij} , визначених за формулою (7) або (9).

Оскільки $i < j$, то кількість N_0 для множини переставлень не перевищує C_k^2 , для множини розміщень – числа C_{k+1}^2 , тобто алгоритм, який пропонуємо, є поліноміальним порядку $k^2/2$.

Числові експерименти засвідчили, що ці оцінки будуть досить грубими, якщо коефіцієнти цільової функції – цілі числа, а k – велике.

По-перше, оцінку можна уточнити за допомогою однакових коефіцієнтів цільової функції, звідки маємо: для переставлень $N_0 \leq C_k^2$, для розміщень $N_0 \leq C_{k+1}^2$.

По-друге, оцінку можна уточнити завдяки однаковим t_{ij} (7), (9), що неважко бачити на рисунку, на якому зображено точки основи 2-мультимножини C'' , прямі, що проходять через пари точок, окрім паралельних до осі Ос (це забезпечує умова $c'_i \neq c'_j, \forall i, j \in J_k$). Кількість прямих з різним нахилом визначає число N_0 .

Наприклад, на рисунку показано 2-мультимножину C'' , що збігається зі своєю основою з $\eta=5$ елементів: $C'' = (A, B, C, D, E) = ((1, 1), (4, 1), (5, 2), (3, 3), (4, 4))$.

Таблиця

t'_{ij}	t''_{ij}	x^*_1	x^*_2	x^*_3	x^*_4	x^*_5
2	∞	5	4	<u>3</u>	<u>2</u>	1
0,5	2	5	<u>4</u>	<u>2</u>	<u>3</u>	<u>1</u>
0	0,5	5	<u>3</u>	1	4	<u>2</u>
-1	0	<u>5</u>	<u>2</u>	<u>1</u>	<u>4</u>	<u>3</u>
-2	-1	<u>3</u>	1	<u>2</u>	4	5
$-\infty$	-2	2	1	3	4	5

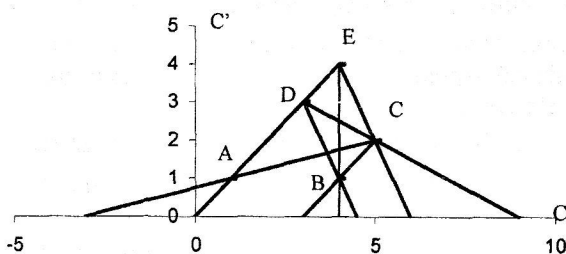


Рисунок 1.

Кількість прямих, непаралельних до Ox , $C_s^2 - 1 = 9$, тобто кількість усіх розв'язків задачі на переставленнях не перевищує $N \leq 10$. Цю оцінку можна суттєво зменшити, тому що прямих з різним нахилом $N_0 = 5$, різних розв'язків задачі – 6. У таблиці наведено множину цих розв'язків для випадку $G = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, зазначено, які координати поточного розв'язку змінюються в разі переходу значення параметра через наступне значення t''_{ij} . Інтервали, на яких розв'язок задачі визначений – (t'_{ij}, t''_{ij}) .

У випадку розв'язування задачі на переставленнях більшої вимірності, проте з тією самою основою C'' (наприклад, $k=10$, $S(C'') = ((1,1), (4,1), (5,2), (3,3), (4,4))$, $[C'''] = (2, 1, 3, 3, 1)$, кількість різних розв'язків не змінюється. У разі розв'язування цієї задачі на розміщеннях ($\eta > 5$) для визначення кількості різних розв'язків додатково проводимо прямі, що проходять через O , тому $N_0 = 7$, різних розв'язків – 8.

У випадку розв'язання задачі Б, величини, аналогічні (7), (9), у G додається $g_0=0$, $t_{ij} = -\frac{g_j - g_i}{g_j - g_i}$, $\forall i, j \in J_0^0: i < j, g_i \neq g_j$, далі алгоритм аналогічний, верхня оцінка кількості розв'язків $C_\eta^2 + 1, C_{\eta+1}^2 + 1$, а для задачі (1)-(2) на сполученнях та розміщеннях – $C_k^2 + C_\eta^2 + 2, C_{k+1}^2 + C_{\eta+1}^2 + 2$ відповідно.

2. ОПУКЛЕ ПРОДОВЖЕННЯ ФУНКЦІЙ У НЕЛІНІЙНІЙ ОПТИМІЗАЦІЇ НА ПЕРЕСТАВЛЕННЯХ

Дослідимо задачу нелінійної оптимізації на множинах, що належать межі будь-якої сильно опуклої множини. Окремим випадком цієї задачі є задача нелінійної комбінаторної оптимізації на переставленнях з додатковими обмеженнями. Доведено, що ця задача зводиться до задачі опуклої (увігнутої) оптимізації в разі, якщо цільова функція двічі неперервно диференційована. Запропоновано метод пошуку еквівалентної задачі опуклої оптимізації.

Як відомо [2], $d \subset R^k$ – опукла множина, якщо

$$z = \alpha x + (1 - \alpha)y \in d, \forall 0 \leq \alpha \leq 1, \forall x, y \in d.$$

Функція $f(x): R^k \rightarrow R^1$ – опукла, якщо

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y), \forall \alpha, 0 \leq \alpha \leq 1, \forall x, y \in R^k.$$

Двічі неперервно диференційована функція $f(x)$ ($f(x) \in C^2(R^k)$) є опуклою,

якщо її матриця Гесса додатно визначена: $\sum_{1 \leq i \leq j \leq k} \frac{\partial^2 D(x)}{\partial x_i \partial x_j} x_i x_j \geq 0, x \in R^k$.

Перевірку додатної визначеності матриці можна виконати за критерієм Сильвестра. Це можна зробити за такою достатньою умовою.

Теорема. Нехай є квадратична форма

$$\sum_i M_i x_i^2 + 2 \sum_{i < j} M_{ij} x_i x_j.$$

Тоді, якщо: 1) $M_i \geq 0, 1 \leq i \leq k$, 2) $|M_{ij}| \leq \sqrt{M_i M_j} / (k - 1), 1 \leq i < j \leq k$, то квадратична форма – додатно визначена.

Доведення. Введемо в розгляд величини μ_i : $0 \leq \mu_i \leq M_i$ та $|M_{ij}| = \sqrt{\mu_i \mu_j} / (k-1)$, $1 \leq i < j \leq k$, існування яких випливає з виконання умови 2 теореми. Тоді

$$\begin{aligned} \sum_i M_i x_i^2 + 2 \sum_{i < j} M_{ij} x_i x_j &= \sum_{i < j} \left(\frac{M_i}{k-1} x_i^2 + 2 M_{ij} x_i x_j + \frac{M_j}{k-1} x_j^2 \right) = \sum_i (M_i - \mu_i) x_i^2 + \\ &+ \sum_{i < j} \left(\frac{\mu_i}{k-1} x_i^2 + 2 M_{ij} x_i x_j + \frac{\mu_j}{k-1} x_j^2 \right) = \\ \sum_i (M_i - \mu_i) x_i^2 + \sum_{i < j} \left(\sqrt{\frac{\mu_i}{k-1}} x_i + \text{sign}(M_{ij}) \sqrt{\frac{\mu_j}{k-1}} x_j \right)^2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Нехай $d \subset R^k$ – опукла множина, для якої

$$\exists D(x): R^k \rightarrow R^1, D(x) \in C^2(R^k); d = \{x \in R^k : D(x) \leq 1\}.$$

Межу множини d позначимо ∂d , тоді $\partial d = \{x \in R^k : D(x) = 1\}$.

На функцію $D(x)$ накладаємо умову сильної опуклості: існує константа $M_d \geq 0$ така, що:

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq k} \frac{\partial^2 D(x)}{\partial x_i \partial x_j} x_i x_j \geq M_d \sum_{1 \leq i \leq k} x_i^2, x \in R^k.$$

Означення. Функцію $F(x) : R^k \rightarrow R^1$ будемо називати опуклим продовженням функції $f(x)$ (див., наприклад [3]) з множини ∂d в R^k , якщо виконуються наступні умови:

$$F(x) - \text{опукла в } R^k,$$

$$F(x) = f(x), \forall x \in \partial d.$$

3. ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ

Для довільної функції $f(x) \in C^2(R^k)$ ставиться питання про існування функції $F(x)$ – опуклого продовження $f(x)$ з множини ∂d в арифметичний евклідов простір R^k . Наведемо конструктивний алгоритм побудови такої функції.

Перший етап.

Перейдемо від функції $f(x)$ до функції $\Phi(x)$, яка задовольняє такі умови:

$$\Phi(x) = f(x) \quad \forall x \in \partial d,$$

$$\Phi(x) \in C^2(R^k),$$

частинні похідні другого порядку $\Phi(x)$ обмежені в R^k .

Очевидно, якщо $f(x)$ задовольняє умову 3, то $\Phi(x) = f(x)$, інакше шукаємо $\Phi(x)$ так: уведемо допоміжну функцію $g(y) : R^1 \rightarrow R^1$, $g(y) \in C^2(R^1)$ таку, що

$$g(0) = 0, g(1) = 1, |g(y)| \leq M, |g'(y)| \leq M, |g''(y)| \leq M, \forall y \geq 0,$$

де $M = \text{const}$, Наприклад, $g(y) = ye^{1-y}$.

Тоді $\Phi(x)$ визначимо за формулою

$$\Phi(x) = f(g(D(x))x) = f(g(D(x))x_1, g(D(x))x_2, \dots, g(D(x))x_k).$$

Другий етап

Перейдемо від функції $\Phi(x)$ до функції $F(x)$:

$$F(x) = \Phi(x) + P(D(x) - 1) / M_d,$$

де

$$1) P \geq M_1 + M_2;$$

$$2) M_1 = \max \left(0, \max_{1 \leq i \leq k} \max \left(\left\{ -\frac{\partial^2 \Phi(x)}{\partial x_i^2} \right\}, x \in R^k \right) \right);$$

3)

$$M_2 = \max \left(0, \max_{1 \leq i < j \leq k} \max \left(\left\{ -\sqrt{\frac{\partial^2 \Phi(x)}{\partial x_i^2} + M_1} \sqrt{\frac{\partial^2 \Phi(x)}{\partial x_j^2} + M_1} + (k-1) \left| \frac{\partial^2 \Phi(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right| \right\}, x \in R^k \right) \right).$$

Функція $F(x)$ є опуклим продовженням функції з множини ∂d в арифметичний евклідов простір R^k . Як бачимо, $F(x)$ є двічі неперервно диференційованою функцією. Оскільки множина переставлень, як відомо (див., наприклад [1]) лежить на поверхні сфери в R^k , то цей підхід застосовується до нелінійної оптимізації на переставленнях.

ЛІТЕРАТУРА

1. Стоян Ю.Г., Ємець О.О. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації: К., 1993.
2. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М., 1973.
3. Яковлев С.В. Теория выпуклых продолжений функций на вершинах выпуклых многогранников// Журн. выч. математики и мат. физики. 1994. Т. 34. №7. С. 1112-1119.

NONLINEAR AND PARAMETRIC OPTIMIZATION ON COMBINATORIAL SETS

O. Valuyska, O. Yemets, O. Pichugina

Poltava National Technical University named after Uryi Kondratuk

The polynomial method of solving linear optimization problem with parameter in target function on the sets of arrangements and combinations is proposed. The method of searching for amounts of different solutions of the problem is considered, upper estimation of this number is given. The class of nonlinear optimization problems with restrictions, for example, nonlinear optimization problem on combinations, is considered. The method of reducing of problems of this class to concave optimization problem is proposed.

Key words: nonlinear optimization, parametric optimization, combinatorial optimization, permutations

Стаття надійшла до редколегії 11.10.2001

Прийнята до друку 19.03.2002

ЗМІСТ

ОБЧИСЛЮВАЛЬНА МАТЕМАТИКА

<i>Б. Бандирський, І. Лазурчак, Л. Остапчук.</i> Знаходження наближених та точних власних значень для деяких класів крайових задач у випадку звичайних диференціальних рівнянь.....	3
<i>О. Бігун, М. Притула.</i> Числове моделювання впливу білого шуму на розв'язки рівняння Кортевега – де Фріза.....	11
<i>О. Возняк.</i> Про фундаментальний розв'язок задачі Коші для одного виродженого параболічного рівняння.....	17
<i>Н. Грипинська.</i> Нелінійний, неявний, однокроковий чисельний метод розв'язування задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь першого порядку.....	23
<i>Л. Клакович, П. Савенко.</i> Чисельне розв'язування нелінійних обернених задач стосовно синтезу антенних ґраток.....	30
<i>М. Коваль, В. Макар, Я. Савула.</i> Генерація адаптивних сіток з чотирикутних елементів у скінченноелементному аналізі.....	38
<i>Г. Коваль, Г. Цегелик.</i> Про метод параметрів виділення “максимальних” областей, які не містять нулів алгебричних багаточленів від двох дійсних змінних.....	44
<i>А. Козел, О. Фундак, Г. Шинкаренко.</i> Чисельний аналіз змішаних варіаційних задач мігрування домішок: 1. Формулювання задач та схем методу скінченних елементів.....	51
<i>М. Кутнів.</i> Триточкові різницеві схеми високого порядку точності для нелінійних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку з крайовими умовами третього роду.....	61
<i>Р. Ханко.</i> Про чисельне розв'язування граничної задачі Діріхле для рівняння Гельмгольца у випадку замкнених і розімкнених тороїдальних поверхонь.....	67
<i>Г. Цегелик, Л. Підківка, Н. Федчишин.</i> Екстраполяційний метод мажорантного типу розв'язування задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь.....	76

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

<i>Я. Бурак, Є. Чапля, О. Чернуха.</i> Математична модель вертикальної дифузії домішки в двофазових випадково-неоднорідних шаруватих тілах.....	83
<i>В. Буренко.</i> Дослідження збіжності методу ітерацій у підпросторі для задач стійкості тонкостінних конструкцій.....	90
<i>О. Валуїська, О. Ємець, О. Пічугіна.</i> До питання про нелінійну та параметричну оптимізацію на комбінаторних множинах.....	95
<i>П. Венгерський, В. Трушевський, Г. Шинкаренко.</i> Стабілізація чисельного розв'язку варіаційної задачі стоку мілкої води.....	102
<i>О. Гнатишин, С. Шахно.</i> Застосування методів типу Гаусса-Ньютона до оцінки невідомих параметрів законів розподілу в задачах теорії надійності.....	110
<i>О. Горобець, Я. Єлейко.</i> Принципи розрахунку премії одного виду страхування.....	114
<i>І. Кирчей.</i> Матриця, обернена до ермітової над тілом.....	120
<i>О. Максимук, Н. Щербина.</i> Вплив захисного покриття на тепловий режим обмежених об'ємів.....	126

<i>В. Мамчук. Математичне моделювання розвитку турбулентних пристінних течій на тілах, які коливаються.....</i>	<i>131</i>
<i>Т. Мартинович, Б. Мартинович, О. Куценко (Лобова). Зображення аналітичного розв'язку однорідного бігармонійного рівняння зі сталими коефіцієнтами у прямокутній двозв'язній концентричній області.....</i>	<i>137</i>
<i>Б. Остудін, А. Романенко. Формування плазмової межі у самоузгодженому полі електронно-іонної оптичної системи високовольтного тліючого розряду.....</i>	<i>144</i>

ІНФОРМАТИКА

<i>О. Годич, Б. Голуб, Ю. Щербина. Застосування штучних нейронних мереж для прогнозування курсу акцій.....</i>	<i>152</i>
<i>Н. Кеберле. Огляд сучасних систем інтеграції неоднорідних баз даних і знань</i>	<i>163</i>
<i>О. Левченко. Апроксимація рельєфу Львівщини у картографічній системі ArcView.....</i>	<i>173</i>
<i>Ю. Подолук, А. Переймибіда. Захист інформації в Інтернет-застосуваннях на основі криптосистем з еліптичними кривими</i>	<i>179</i>

Збірник наукових праць

Вісник Львівського університету

СЕРІЯ ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА ТА ІНФОРМАТИКА

ВИПУСК 4

Видається з 1999 р.

Підписано до друку 03.06.2002. Формат 70×100/16.

Папір друк. Різогр. друк. Обл.-вид. арк. . Наклад 300. прим. Зам. № 281.

Видавничий центр Львівського національного університету імені Івана Франка.
79000 Львів, вул. Дорошенка, 41.