Національна академія наук України
Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова

ПРАЦІ МІЖНАРОДНОЇ

МОЛОДІЖНОЇ МАТЕМАТИЧНОЇ ШКОЛИ

ПИТАННЯ ОПТИМІЗАЦІЇ ОБЧИСЛЕНЬ (ПОО – XXXVII)

Київ – 2011

International Youth School of Mathematics "The Issues of Calculation Optimization (ISCOPT–XXXVII)"

September 2011, Katsyveli

The Southern Coast of the Crimea (Ukraine)

Kyiv – 2011

Національна академія наук України
Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова

ПРАЦІ МІЖНАРОДНОЇ

МОЛОДІЖНОЇ МАТЕМАТИЧНОЇ ШКОЛИ

ПИТАННЯ ОПТИМІЗАЦІЇ ОБЧИСЛЕНЬ (ПОО – XXXVII)

Україна, Крим
Велика Ялта, смт. Кацивелі
22–29 вересня 2011 року

Праці школи

Київ – 2011

УДК 517:518:519:533:534

Праці міжнародної молодіжної математичної школи “Питання оптимізації обчислень (ПОО-XXXVII)” – Київ: Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, 2011. – 214 с.

Розглядаються питання побудови оптимальних за складністю (та близьких до них) алгоритмів розв’язання наступних класів задач обчислювальної та прикладної математики: цифрова обробка сигналів, відновлення функцій і функціоналів, розв’язування різних класів рівнянь, системний аналіз і математичне програмування, методи захисту інформації.

Відмінною рисою праць школи є їх спрямованість на побудову ефективних за різними критеріями алгоритмів, оцінок їх характеристик, порівняльний аналіз за цими характеристиками та розв’язання широкого спектра прикладних задач. Певна увага приділена комп’ютерній технології розв’язання задач прикладної та обчислювальної математики із заданими значеннями характеристик якості.

Збірник праць розрахований на спеціалістів у галузі обчислювальної та прикладної математики.

ISBN 978-966-02-5965-2

УДК 519.85

О.О. ЄМЕЦЬ, О.В. ОЛЬХОВСЬКА
Полтавський університет економіки і торгівлі, Полтава,
yemetsli@mail.ru, contacts@informatics.org.ua

ПРО ЗБІЖНІСТЬ ІТЕРАЦІЙНОГО МЕТОДУ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ КОМБІНАТОРНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ ІГРОВОГО ТИПУ НА ПЕРЕСТАВЛЕННЯХ

У роботах [1–3] розглянуто новий клас задач – задачі комбінаторної оптимізації ігрового типу на розміщеннях та переставленнях. У цих задачах на стратегії одного з гравців накладаються комбінаторні обмеження. У роботі [3] запропоновано ітераційний метод розв'язку такого класу задач на переставленнях. Розглянемо доведення збіжності цього методу.

Нехай задана платіжна матриця $A' = \left(a_{ij}^{'}\right)$ вимірності $m \times n$, елемент $a_{ij}^{'}$ якої показує перевищення (різницю) прибутків другого гравця в порівнянні з першим гравцем. На обмеження першого гравця накладаються комбінаторні обмеження, що визначаються переставленнями: $X = \left(x_1,...,x_m\right) \in E_m(G)$, де $E_m(G)$ – множина переставлень з елементів множини G.

Складемо нову матрицю $A = \left(a_{ij}\right)$ розмірністю $\overline{m} \times n$, де $\overline{m} = m!$. У цій матриці

$$a_{ij} = \sum_{t=1}^{m} a'_{tj} x_{it},\ \forall i = \overline{1,m!},\ \forall j = \overline{1,n}\ .$$

Нехай перший гравець обирає i-й рядок з ймовірністю p_i, а другий гравець вибирає j-й стовпчик з ймовірністю q_j, де $p_i \ge 0$, $\sum_{i=1}^{\overline{m}} p_i = 1$, $q_j \ge 0$ $\sum_{j=1}^{n} q_j = 1$. Математичне сподівання платежу першого гравця дорівнює $\sum_{i=1}^{\overline{m}} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j$. Оскільки $\min_j \sum_{i=1}^{\overline{m}} a_{ij} p_i \le \sum_{i=1}^{\overline{m}} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j \le \max_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j$, то

$$\min_j \sum_{i=1}^{\overline{m}} a_{ij} p_i \le \max_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j\ . \tag{1}$$

Основна теорема теорії ігор [4] стверджує, що, при деяких наборах ймовірностей $P = (p_1,...,p_m)$ та $Q = (q_1,...,q_n)$, у відношенні (1) досягається рівність, а $\left(P;Q\right)$ є оптимальним розв'язком матричної гри. Значення v ціни гри при цьому дорівнює: $v = \min_j \sum_{i=1}^{\overline{m}} a_{ij} p_i = \max_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j$.

Покладемо $A_{i.}$ – це i-й рядок матриці A, а відповідно $A_{.j}$ – j-й стовпець. Тоді якщо $SUM_1(N)$ – вектор у послідовності $\left\{SUM_1(0), SUM_1(1),..., SUM_1(N),...\right\}$, то позначимо його j-у координату $SUM_{1j}(N)$.

Позначимо $\max SUM_1\left(N\right) = \max_j SUM_{1j}(N)$, $\min SUM_1\left(N\right) = \max_j SUM_{1j}(N)$. З цими позначеннями перепишемо (1): $\min_j \sum_{i=1}^{\overline{m}} A_{i.} p_i \le \max_i \sum_{j=1}^{n} A_{.j} q_j$, де $p_i \ge 0$, $\sum_{i=1}^{\overline{m}} p_i = 1$, $q_j \ge 0$ $\sum_{j=1}^{n} q_j = 1$.

Означення. Послідовність $\overline{m}$ – вимірних векторів $SUM_2(0), SUM_2(1),...$, та n вимірних векторів $SUM_1(0), SUM_1(1),...$ назвемо векторною системою (SUM_2, SUM_1) для A якщо виконуються наступні умови:

1) вектори $SUM_1(0), SUM_2(0)$ – нульові, тобто $SUM_1(0) = \left(0,...,0\right)$, $SUM_2(0) = \left(0,...,0\right)$.

Зауважимо, що тоді виконується умова $\min SUM_2(0) = \max SUM_1(0) = 0$, при цьому ці рівності – це рівності нулю;

2) $SUM_2(N+1) = SUM_2(N) + A_{i.}$, $SUM_1(N+1) = SUM_1(N) + A_{.j}$ (2), де i, j задовольняє співвідношенню $SUM_{1i}(t) = \max_j SUM_1(N)$, $SUM_{2j}(t) = \max_i SUM_2(N)$.

Система з такими властивостями утворюється при реалізації методу з [3] алгоритм якого сформульовано та програмно реалізовано в [5].

Векторну систему (SUM_2, SUM_1) для A можна представити рекурентно, якщо задати $SUM_2(0), SUM_1(0)$. У методі з [3] на кожній ітерації рядок таблиці SUM (накопичені суми скалярних добутків першого гравця) додається до SUM_2 і визначається максимальна компонента SUM_1 (за алгоритмом з [5] – це $N\overline{v}$ – максимальний накопичений виграш), рядок таблиці SUM (накопичені суми скалярних добутків другого гравця) додається до SUM_1 і визначається мінімальний компонент SUM_2 (за алгоритмом з [5] – це $N\underline{v}$ – мінімальний накопичений виграш).

Якщо $SUM_2(0) = 0, SUM_1(0) = 0$, $\frac{SUM_2(N)}{N}$ є середнім рядків, а $\frac{SUM_1(N')}{N'}$ середнім стовпців, для кожного N, N' (N, N' – кількість ітерацій методу) буде виконуватися:

$$\frac{\min SUM_2(N)}{N} \le v \le \frac{\max SUM_1(N')}{N'}.$$

Розв'язок гри отримується, коли ці границі рівні при $N, N' \to \infty$. Наступна теорема встановлює цей факт.

Теорема. Якщо (SUM_2, SUM_1) векторна система для матриці A, утворена в процесі роботи алгоритму ітераційного методу для розв'язування задач комбінаторної оптимізації ігрового типу на переставленнях [3], то $\lim_{N\to\infty} \frac{\min SUM_2(N)}{N} = \lim_{N\to\infty} \frac{\max SUM_1(N)}{N} = v$.

Доведення даної теореми здійснено аналогічно доведенню збіжності методу Брауна – Робінсона.

У доповіді представлено обґрунтування збіжності ітераційного методу для розв'язування задач комбінаторної оптимізації ігрового типу на переставленнях.

1. Емец О.А., Устьян Н.Ю. Решение некоторых задач комбинаторной оптимизации на размещениях и перестановках игрового типа // Проблемы управления и информатики. – 2006. – № 3. – С. 37–47.
2. Емец О.А., Устьян Н.Ю. Исследование математических моделей и методов решения задач на перестановках игрового типа // Кибернетика и системный анализ. – 2007. – № 6. – С. 103–114.
3. Ємець О.О., Устьян Н.Ю. Один ітераційний метод розв'язування ігрових задач на переставленнях // Наукові вісті НТУ України "КПІ". – 2008. – № 3. – С. 5–10.
4. Вентцель Е.С. Элементы теории игр. Изд. 2-е, стереотип. – М.: Физматгиз, 1961. – 67 с.
5. Ємець О.О., Ольховська О.В. Розв'язування задач ігрового типу на множині розміщень // Інформатика та системні науки (ІСН-2010): матеріали Всеукраїнської науково-практичної конференції 18-20 березня 2010. – Полтава: РВВ ПУСКУ, 2010. – С. 61–63.