УДК 539.3

ПЛОСКА ЗАДАЧА ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ ПІВСМУГИ З ПОПЕРЕЧНОЮ ТРІЩИНОЮ

Н. Д. Вайсфельд*, д.ф.-м.н., професор*
О. Ф. Кривий*, д.ф.-м.н., професор*
З. Ю. Журавльова*, старший викладач*
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
zhuravleva@te.net.ua

Для розв'язання плоскої задачі для пружної півсмуги з поперечною тріщиною використовуються апарати інтегральних перетворень та матричного диференціального числення, враховуються нерухомі особливості розв'язку.

Vaysfel'd N. D., Kryvyi O. F., Zhuravlova Z. Yu. The integral transformations' method and the apparatus of the matrix differential calculation are used for the solving of a plain problem for the elastic semi-strip. The fixing features of the solution are considered.

Ключові слова: ПІВСМУГА, ПОПЕРЕЧНА ТРІЩИНА, ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є.
Keywords: SEMI-STRIP, TRANSVERSAL CRACK, FOURIER'S TRANSFORMATION.

Розглядається пружна півсмуга (G – модуль пружності, μ - коефіцієнт Пуассона), що описується у декартовій системі координат співвідношеннями: $0<x<a, 0<y<\infty$. На бічних гранях виконуються умови зчеплення $u(0,y)=0, v(0,y)=0$, $u(a,y)=0, v(a,y)=0, 0<y<\infty$. Тут $u(x,y)=u_x(x,y)$, $v(x,y)=v_y(x,y)$. По торцю $0<x<a, y=0$ задано напруження

$$\sigma_y\big|_{y=0}=p(x),\ \tau_{yx}\big|_{y=0}=0, 0<x<a \tag{1}$$

На лінії $c_0<x<c_1, y=B$ розташована поперечна тріщина

$$\left\langle u(x,B)\right\rangle = \psi_1(x) \neq 0, \quad \left\langle v(x,B)\right\rangle = \psi_2(x) \neq 0, \quad c_0 < x < c_1$$

$$\left\langle \tau_{xy}(x,B)\right\rangle = 0, \ \left\langle \sigma_y(x,B)\right\rangle = 0, \ c_0 < x < c_1$$

Потрібно визначити поле переміщень та напружень у півсмузі, що задовольняють крайові умови, умови на тріщині та рівняння рівноваги [1].

Вихідна задача зводиться до одновимірної шляхом застосування півнескінченного sin-, cos-перетворення Фур'є за змінною *y* за узагальненою схемою [2].

Крайова задача у просторі трансформант формулюється у векторному вигляді як

$$\begin{aligned} &L_2 \vec{y}_\beta(x) = \vec{f}(x) \\ &\vec{y}_\beta(0) = 0, \vec{y}_\beta(a) = 0 \end{aligned} \qquad (2)$$

де $$L_2 \vec{y}_\beta(x) = I\vec{y}_\beta''(x) + 2\beta Q \vec{y}_\beta'(x) - \beta^2 P \vec{y}_\beta(x),$$

$\vec{y}_\beta(x) = \left(u_\beta(x); v_\beta(x)\right)^T$, $u_\beta(x), v_\beta(x)$ - трансформанти функцій переміщень, $I, Q, P, \vec{f}(x)$ – відомі величини.

Розв'язок векторної крайової задачі розшукується у вигляді суперпозиції загального розв'язку векторного однорідного рівняння $\vec{y}_\beta^0(x)$ і його часткового векторного розв'язку $\vec{y}_\beta^1(x)$: $\vec{y}_\beta(x) = \vec{y}_\beta^0(x) + \vec{y}_\beta^1(x)$. Для знаходження загального розв'язку векторного однорідного рівняння розшукується розв'язок відповідного матричного рівняння [1]. Для знаходження часткового векторного розв'язку будується матриця-функція Гріна методом матричних інтегральних перетворень [1]. Тоді розв'язок задачі (2) приймає вигляд

$$\vec{y}_\beta(x) = Y_1(x)\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + Y_2(x)\begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} + \int_0^a G(x,\xi)\,\vec{f}(\xi)d\xi \qquad (3)$$

тут $Y_1(x), Y_2(x)$ - розв'язки матричного рівняння, $G(x,\xi)$ - матриця-функція Гріна, $c_i, i = \overline{1,4}$ - сталі, що знаходяться з крайових умов на бічних гранях півсмуги. Формула (3) описує трансформанти переміщень, що залежать від невідомих функцій

$\chi'(x), \psi'_1(x), \psi'_2(x)$, де $\chi(x) = v(x,0)$. Ці функції знаходяться з умов на торці та на тріщині

$$\sigma_y(x,0) = p(x),\ \tau_{xy}(x, B+0) = 0, \sigma_y(x, B+0) = 0 \qquad (4)$$

Підстановка виразів для функцій переміщень в умови (4) приводить до системи сингулярних інтегральних рівнянь (ССІР). Невідома функція $\chi'(x)$ розвивається в ряд з урахуванням коренів символу ядра відповідного інтегрального рівняння [3]. Невідомі функції $\psi'_1(x), \psi'_2(x)$ розвиваються в ряди за поліномами Чебишева першого роду. Ці розвинення підставляються у ССІР, що розв'язується узагальненим методом граничних інтегральних рівнянь [4].

У роботі приведена нова методика розв'язання задачі для півсмуги, що базується на зведенні вихідної задачі до векторної одномірної крайової задачі. Остання розв'язується за допомогою апарату матричного диференціального числення та матричної функції Гріна. Розв'язок ССІР будується з урахуванням нерухомих особливостей функції $\chi'(x)$ на торці півсмуги.

Література

1. Vaysfel'd N.D. On one new approach to the solving of an elasticity mixed plane problem for the semi-strip / N.D. Vaysfel'd, Z.Yu. Zhuravlova – Acta Mechanica, 2015. – 226, № 12, p. 4159-4172.
2. Попов Г.Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений / Г.Я. Попов – Москва: Наука, 1982. – 344 с.
3. Дудучава Р.В. Интегральные уравнения свертки с разрывными предсимволами, сингулярные интегральные уравнения с неподвижными особенностями и их приложения к задачам механики / Р. В. Дудучава – Тбилиси: Мецниереба, 1979. – 133 с.
4. Кривий О.Ф. Взаємний вплив міжфазних тунельних тріщини і включення в Кусково-однорідному анізотропному просторі / О.Ф. Кривий – Мат. методи та фіз.-мех. поля, 2013. – 56, № 4, с. 118-124.