УДК 539.3

ЗАДАЧА О НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ БЕСКОНЕЧНОГО УПРУГОГО СЛОЯ

Д.С.Плюснов, *студент*
Одесский национальный университет им. И.И.Мечникова
plyusnovdmitrii@gmail.com

С помощью нового подхода, предложенного в работах Г.Я. Попова, построено точное решение известной задачи для слоя.

Pliusnov D. S. The problem of a stress state of an infinite elastic layer. Using a new approach introduced by G.Ya.Popov, an exact solution of a well-known problem for an infinite layer has been built.

Ключовые слова: БЕСКОНЕЧНЫЙ УПРУГИЙ СЛОЙ, МАТРИЧНОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ
Keywords: INFINITE ELASTIC PLAYER, MATRIX INTEGRAL TRANSFORMATION

Рассматриваемая задача решен способом, предложенным в [1].

Предполагается, что упругий слой $-\infty < x, y < +\infty, 0 \le z \le h$ находится либо в идеальном контакте с абсолютно жестким основанием

$$\begin{cases} w\big|_{z=0} = 0 \\ \tau_{zx}\big|_{z=0} = 0 \\ \tau_{zy}\big|_{z=0} = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

либо жестко защемлен с ним

$$\begin{cases} u\big|_{z=0} = 0 \\ v\big|_{z=0} = 0 \\ w\big|_{z=0} = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

Здесь приняты обозначения
$u = u_x\left(x, y, z\right), v = u_y\left(x, y, z\right), w = u_z\left(x, y, z\right)$ - смещения среды, μ - коэффициент Пуассона. По грани $z = h$ задана нормальная сжимающая нагрузка $p\left(x, y\right)$, которая соответствует граничным условиям

$$\begin{cases} \sigma_z\big|_{z=h} = p\left(x, y\right) \\ \tau_{zx}\big|_{z=h} = 0 \\ \tau_{zy}\big|_{z=h} = 0 \end{cases} \qquad (3)$$

Требуется найти решение уравнений равновесия [1], удовлетворяющее краевым условиям (1-3).

На основании подхода, изложенного в [1], в рассмотрение введены новые неизвестные функции

$$z = u^{'} + v^{-}, z_1 = v^{'} - u^{\sqcup}\,. \qquad (4)$$

Здесь и далее штрих означает производную по первой переменной, точка - по второй, запятая - по третьей. Это позволяет свести уравнения равновесия к системе из двух совместно и одного раздельно решаемых уравнений:

$$\begin{cases} \Delta z + \mu_0 \nabla_{xy}\left(z + w^{,}\right) = 0 \\ \Delta w + \mu_0 \left(z + w^{,}\right)^{,} = 0 \\ \Delta z_1 = 0 \end{cases} \qquad (5)$$

Тут и далее $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, $\nabla_{xy} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, $\mu_0 = \frac{1}{1 - 2\mu}$, $\mu_* = 1 + \mu_0$.

Краевые условия (1-3) переформулированы в терминах функций (4). К первым двум уравнениям системы (5) применено полное интегральное преобразование Фурье по переменным x и y, после чего получена система уравнений относительно трансформант введенных функций:

$$\begin{cases} w''_{\alpha\beta} + \dfrac{\mu_0}{\mu_*} z'_{\alpha\beta} - \dfrac{N^2}{\mu_*} w_{\alpha\beta} = 0 \\ z''_{\alpha\beta} - N^2 \mu_0 w'_{\alpha\beta} - N^2 \mu_* z_{\alpha\beta} = 0 \end{cases}, \qquad (6)$$

решение которой вместе с уравнениями (1-3) может быть сведено к решению векторной краевой задачи.
Данная задача решена методом, предложенным в [2], что позволило построить точное решение в пространстве трансформант.

Показано, что в случае нормальной нагрузки третье уравнение системы (5) имеет тривиальное решение. Обращение интегральных преобразований и проведение замены, обратной к земене (4), завершает построение решения задачи.

Литература

1. Попов Г. Я. О приведении уравнений движения упругой среды к одному независимому и к двум совместно решаемым уравнениям . Докл. РАН.- 2002. – 384, № 2.
2. Попов Г.Я., Абдыманапов С.А., Ефимов В.В. Функции и матрицы Грина одномерных краевых задач. Алматы: Рауан.- 1999. - 113с.