УДК 519.6:539.3

ЧИСЕЛЬНА ІДЕНТИФІКАЦІЯ ПАРАМЕТРІВ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ТЕРМОПРУЖНОГО СТАНУ СКЛАДЕНОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ

А. А. Аралова, к. ф.-м. н
Інститут кібернетики НАН України
aaaralova@gmail.com

У статті розглянуто питання розв’язання за допомогою градієнтних методів зворотних крайових задач термопружного деформування довгої складеної циліндричної оболонки.

Aralova A.A. The solution of the inverse boundary value problems thermoelastic deformation long composite cylindrical shell, with the help of gradient methods is described.

Ключові слова: ТЕРМОПРУЖНИЙ СТАН, ГРАДІЄНТНІ МЕТОДИ, ЦИЛІНДРИЧНІ ТІЛА.
Keywords: THERMOELASTIC STATE, GRADIENT METHODS, CYLINDRICAL BODY.

$$
\begin{gathered}
-\left\{(\lambda+2\mu)\left(\frac{d}{dr}\left(r\frac{dy}{dr}\right)-\frac{y}{r}\right)-(3\lambda+2\mu)\alpha r\frac{dT}{dr}\right\}=f(r),\ r\in\Omega;\\
-\frac{1}{r}\left\{\frac{d}{dr}\left(rk\frac{dT}{dr}\right)\right\}=\bar{f}(r),\ \ r\in(r_1,r_2);\ \sigma_r(y)\Big|_{r=r_i}=-p_i,\ i=1,2;\\
-k\frac{dT}{dr}\Big|_{r=r_1}=\beta_1,\quad k\frac{dT}{dr}\Big|_{r=r_2}=-\alpha_2T+\beta_2;\\
[y]=0,\ [\sigma_r(y)]=0;\ \left[k\frac{dT}{dr}\right]=0,\ \left\{k\frac{dT}{dr}\right\}^{\pm}=\bar{r}[T],
\end{gathered}
\tag{1}
$$

Розглянемо довгу товсту циліндричну оболонку. З урахуванням симетрії, слідуючи [1, 2], її термопружний стан описується крайовою задачею (1), де $\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2$, $\Omega_1=(r_1,\xi)$, $\Omega_2=(\xi,r_2)$, $0<r_1<\xi<r_2<\infty$, $r_1,r_2=const>0$ – радіуси, відповідно, внутрішньої і зовнішньої кругових поверхонь; r – радіальна координата циліндричної системи координат; а компонента тензора напруги має вид $\sigma_r(y,T)=\left(\lambda+2\mu\right)\varepsilon_r(y)+\lambda\varepsilon_\varphi- \ -\left(3\lambda+2\mu\right)\alpha T$ **,** де λ, μ - постійні Ляме; $y=y(r)$ - зміщення в радіальному напрямку; *α=const*>0 – коефіцієнт температурного розширення, β_1, β_2*=const*, α_1*=const*>0, p_i*=const*, *i*=1,2; *T=T(r)* – температура, *k= u=const* – коефіцієнт теплопровідності, вважаємо невідомим.

Вважаємо, що на внутрішній поверхні циліндра відомо зміщення

$$y(d_i)=f_i,\quad i=\overline{1,N}\,. \tag{2}$$

Отримано задачу (1), (2), що складається у визначенні дійсного числа $u\in U=R=\left(-\infty,+\infty\right)$, при якому перша компонента $y=y(u)$ розв’язку $\left(y(r),T(r)\right)$ задачі (1) задовольняє рівності (2). Виходячи з [3], при кожному фіксованому $u\in U$, замість класичного розв’язку крайової задачі (1) будемо використовувати її узагальнене рішення, тобто вектор-функцію $\left(y,T\right)\in H=W_2^1\left(r_1,r_2\right)\times W_2^1\left(r_1,r_2\right)$, яка $\forall z=\left(z_1(r),z_2(r)\right)\in H_0=H$ задовольняє системі нерівностей

$$a(y,z_1)=l(T;z_1)\,,\quad a_1(T,z_2)=l_1(u;z_2)\,, \tag{3}$$

$$\begin{gathered}a_0\left(u;T,w\right)=\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\Omega_i} r\,u\frac{dT}{dr}\frac{dw}{dr}dr+\overline{r}\left[T\right]\left[w\right]+\overline{\alpha}\,r_2T\left(r_2\right)w\left(r_2\right),\\ l_0\left(w\right)=\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\Omega_i} r\,\overline{f}\,wdr+r_1\beta_1w\left(r_1\right)+\beta_2r_2w\left(r_2\right).\end{gathered} \tag{4}$$

Функціонал-нев’язки приймає вигляд

$$J\left(u\right)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\left(y\left(d_i\right)-f_i\right)^2\ . \tag{5}$$

Замість задачі (1), (2), розв’язуємо задачу (3), (4), (5), що полягає у визначенні елемента *u*, який мінімізує на *U* функціонал (5) при обмеженнях (4). Задачу (5), (3) будемо розвязувати за допомогою градієнтних методів [4], де (*n+1*)-е наближення u_{n+1} розв’язку $u\in U$ знаходиться за формулою

$$u_{n+1}=u_n-\beta_n p_n\,,\,n=0,1,\cdots,n*\,, \tag{6}$$

починаючи з деякого наближення $u_0\in U$, а напрям спуску p_n та коефіцієнт β_n для методу мінімальних похибок визначаємо за допомогою виразів $p_n=J\,'_{u_n}$, $\qquad \beta_n=\dfrac{\left\|e_n\right\|^2}{\left\|J\,'_{u_n}\right\|^2}$. Виходячи з [3, 5] для визначення (*n+1*)-го наближення u_{n+1} розв'язку $u \in U$ задачі (5), (7) введемо в розгляд спряжену задачу

$$-(\lambda+2\mu)\left(\frac{d}{dr}\left(ru\frac{dp}{dr}\right)-\frac{p}{r}\right)=0, \quad r\in\Omega;$$

$$-\frac{d}{dr}\left(ru\frac{d\psi}{dr}\right)-r(3\lambda+2\mu)\alpha\left(\frac{dp}{dr}+\frac{p}{r}\right)=0, \quad r\in\Omega,$$

$$\sigma_r(p)\Big|_{r=r_i}=0, \ i=1,2; \ -u\frac{d\psi}{dr}\Big|_{r=r_1}=0, \ u\frac{d\psi}{dr}\Big|_{r=r_2}=-\bar{\alpha}\psi(r_2); \ [p]\big|_{r=\xi}=0;$$

$$[\sigma_r(p)]\big|_{r=\xi}=0; \ \left[u\frac{d\psi}{dr}\right]\Big|_{r=\xi}=0, \ \left\{u\frac{d\psi}{dr}\right\}^{\pm}=\bar{r}[\psi]\big|_{r=\xi};$$

$$[p]\big|_{r=d_i}=0, \ [\sigma_r(p)]\big|_{r=d_i}=-\frac{1}{d_i}\big(y(u;d_i)-f_i\big), \ i=\overline{1,N}; \ u=u_n$$

При кожному $u=u_n$ для наближення $(y_1^N,T_1^N)\in H_1^N\times H_1^N$ розв'язку $(y,T)\in H\times H$ задачі (3) справедлива оцінка

$$\left\|y(u_n)-y_1^N(u_n)\right\|_{W_2^1(r_1,r_2)}\le Ch, \quad \left\|T(u_n)-T_1^N(u_n)\right\|_{W_2^1(r_1,r_2)}\le C_1h, \qquad (7)$$

де $C, C_1=const$, $h=\max_i h_i$, $h_i=r^{i+1}-r^i$.

Література

1. Коваленко А.Д. Термоупрогость. – Киев: Вища школа, 1975. – 216 с.
2. Мотовилевец И.А., Козлов В.И. Механика связанных полей в элементах конструкций. Т. 1. Термоупругость. – Киев: Наук. Думка, 1987. – 264с.
3. Сергиенко И.В., Дейнека В.С. Идентификация термонапряженного состояния составного цилиндра по известным смещениям // Проблемы управления и информатики. – 2009. – №5. – С. 25 –52.
4. Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В. Экстремальные методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1988. – 288с.
5. Сергиенко И.В., Дейнека В.С. Системный анализ многокомпонентных распределенных систем. – Киев: Наук. Думка, 2009. – 640 с.
6. Дейнека В.С. Вычислительные алгоритмы повышенного порядка точности для условно-корректной задачи термоупругости // Компьютерная математика. – 2007. - №1. – с. 3-12