

УДК 519.6

ПРО ЧИСЕЛЬНУ РЕАЛІЗАЦІЮ МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ З ОПТИМАЛЬНИМ ВИБОРОМ БАЗИСНИХ ФУНКЦІЙ (ТРИКУТНІ ЕЛЕМЕНТИ)

Каргапольцева Г.В.

Українська інженерно – педагогічна академія

kargapoltseva@ukr.net

В роботі розглядається один зі шляхів чисельної реалізації методу скінченних елементів з оптимальним вибором базисних функцій (трикутні елементи)

Kargapoltseva G.V. About numerical realization of the finite elements method with optimal basis functions (triangular elements). In the article are discussed one of the way of numerical realization of the finite elements method with optimal basis functions (triangular elements).

Ключові слова: ОПТИМІЗАЦІЯ, МЕТОД СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Key words: OPTIMIZATION, FINITE ELEMENTS METHOD

Мета даної роботи полягає в розробці та дослідженні методу наближеного знаходження оптимальної базисної функції у вигляді полінома n - го степеня, коли права частина рівняння Пуассона є сталою та змінною, та з кожною вершиною триангуляції області інтегрування пов'язана одна й та ж базисна функція з наступними властивостями: $h(0) = 1; h(1) = 0$. Розглянуто наближене знаходження оптимальних базисних функцій, з властивостями $h_k(0) = 1; h_k(1) = 0; k = \overline{1, N}$, пов'язаних з кожною вершиною триангуляції, для випадку, коли права частина рівняння Пуассона є сталою, змінною, та кількість невідомих параметрів в функціях змінюється.

Computer Sciences and System Sciences (CS&SS-2016)

Розглядається задача Дірікле для рівняння Пуассона.

$$\Delta u(x, y) = g(x, y), (x, y) \in G, \quad (1)$$

$$u(x, y) = 0, (x, y) \in \partial G, \text{ де } G - \text{ багатокутник.} \quad (2)$$

Необхідно знайти наближений розв'язок $\tilde{u}(x, y)$ задачі (1) – (2).

Нехай $A_k = (x_k, y_k), k = \overline{1, N}$ – вузли, котрими G розбивається на трикутники (вузли триангуляції); $T_j, j = (p, q, r)$ – трикутник з вершинами A_p, A_q, A_r . Покладемо:

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} x_p & y_p & 1 \\ x_q & y_q & 1 \\ x_r & y_r & 1 \end{vmatrix} \neq 0; \omega_j(x, y) \equiv \omega_{pqr}(x, y) = \frac{1}{\Delta_j} \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_q & y_q & 1 \\ x_r & y_r & 1 \end{vmatrix}.$$

При цьому $\omega_j(A_p) = 1; \omega_j(x, y) = 0$ – рівняння сторони трикутника T_j , яка з'єднує вузли A_p та A_r . Нехай $h_k(t) \in C[0, 1]$ – функція з властивостями

$h_k(0) = 1; h_k(1) = 0; k = \overline{1, N}; \pi = \{(x, y) | (x, y) = A_k, k = \overline{1, N}\}$. На ближений розв'язок задачі (1) – (2) шукається у вигляді функції

$$u_\pi(x) : u_\pi(x, y) = u_j(x, y), \forall x \in T_j \subset G,$$

$$u_j(x, y) = u_p h_p(1 - \omega_{pqr}(x, y)) + \\ + u_q h_q(1 - \omega_{qpr}(x, y)) + u_r h_r(1 - \omega_{rpq}(x, y))$$

$u_k, k = \overline{1, N}$ – деякі невідомі сталі (вузлові параметри).

Функціонал Рітца, який відповідає задачі (1) – (2), має вигляд:

$$J_G(u_\pi) = \sum_{T_j \subset G} J_{T_j}(u_j(x, y)) = \sum_{T_j \subset G} \int_{T_j} \left[\left(\frac{\partial u_j(x, y)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_j(x, y)}{\partial y} \right)^2 + \right. \\ \left. + 2g(x, y)u_j(x, y) \right] dx dy$$

І. Знайдено наближений розв'язок поставленої задачі, для випадку, коли з кожним вузлом триангуляції пов'язана єдина оптимальна базисна функція та представляється у вигляді полінома, який задовольняє умови $h(0) = 1; h(1) = 0$:

$h(t) = (1-t)(1+a_1t+a_2t^2)$, де a_1, a_2 – невідомі сталі коефіцієнти.

Тоді задача мінімізації відповідного функціонала $J_G(\{u_k\}, a_1, a_2), (k = \overline{1, N})$ зводиться до розв'язання системи рівнянь: $\frac{\partial J_G(u_\pi)}{\partial u_k} = 0, k = \overline{1, N}; \frac{\partial J_G(u_\pi)}{\partial a_1} = 0, \frac{\partial J_G(u_\pi)}{\partial a_2} = 0$.

II. Знайдено наближений розв'язок поставленої задачі, для випадку, коли оптимальні базисні функції пов'язані з кожним вузлом триангуляції, та представляються у вигляді полінома 2,3,4,5 степеня, який задовольняє умови

$$h_j(0) = 1; h_j(1) = 0; h_j(t) = (1-t)(1 + \sum_{i=1}^m a_{ij}t^i); m = \overline{1, 4}; j = \overline{1, N},$$

де $a_{ij} (i = \overline{1, 4}; j = \overline{1, N})$ - невідомі сталі коефіцієнти.

Запропонований метод наближеного відшукання однієї базисної функції та функцій, пов'язаних з кожним вузлом триангуляції, в методі скінченних елементів (трикутні елементи) (як для сталої, так і для змінної правих частин рівняння Пуассона) протестовано за допомогою програм, складених в Mathcad. Результати обчислювального експерименту демонструють доцільність використання оптимальних базисних функцій, оскільки майже всі характеристики, які знаходились для порівняння з точним розв'язком, краще, ніж в класичному методі скінченних елементів (трикутні елементи) з лінійними базисними функціями.

Література

1. Литвин О.М. Інтерлінація функцій та деякі її застосування. – Х.: Основа, 2002.- 544 с.
2. Литвин О.М., Лепетченко Г.В. Про один підхід до побудови оптимальних базисних функцій в оптимальному методі скінченних елементів // Доповіді Національної Академії Наук України. Серія: Математика. Природознавство. Технічні науки. – 2006. – №7. - С.18-22.