УДК 519.6

МЕТОД ПІДВИЩЕННЯ ТОЧНОСТІ РОЗКЛАДАННЯ В РЯД ФУР'Є РОЗРИВНИХ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

О. М. Литвин, *д. ф.-м. н., професор*
Українська інженерно-педагогічна академія
academ_mail@ukr.net

У доповіді пропонується в методі А. Н. Крилова підвищення точності наближення сумами Фур'є розривних функцій однієї змінної використовувати розривні сплайни.

Lytvyn O. M. Method for increasing the accuracy expansion in Fourier series of discontinuous functions of one variable. The report proposed a method A. N. Krylova improve the accuracy of approximation by Fourier sums of functions of one variable discontinuous use discontinuous splines.

Ключові слова: РОЗРИВНІ ФУНКЦІЇ, РЯДИ ФУРЄ, ПОКРАЩЕННЯ ЗБІЖНОСТІ, МЕТОД ВИДІЛЕННЯ ОСОБЛИВОСТЕЙ.

Keywords: DISCONTINUOUS FUNCTIONS, FOURIER SERIES, IMPROVING CONVERGENCE, METHOD RELEASE FEATURES.

Як відомо [1, п. 15, гл. 6], ряди Фур'є погано збігаються, деякі з них не будуть абсолютно та рівномірно збіжними. Зокрема, суми Фур'є не збігаються до функції в точках її розриву. В [2, стор. 516] описаний метод академіка А. Н. Крилова для покращення збіжності тригонометричних сум Фур'є розривних функцій для випадку, якщо її точки розриву першого роду відомі. В даній доповіді пропонується для чисельної реалізації метода А.Н.Крилова підвищення точності розкладання в ряд Фур'є розривних функцій однієї змінної, використовувати розривні сплайни [3, 4]. Обговорюється також можливість його узагальнення на функції двох змінних для покращення діагнозу в комп'ютерній томографії.

Вважаємо, що функція $f(x), x \in [0,1]$ має розриви разом із своїми похідними до порядку $1 \le r_k \in N$ в точках $x_k, k = \overline{1, m-1}$

$x_0 = 0 < x_1 < ... < x_{m-1} < x_m = 1:$
$f^{(s)}(x_k - 0) = f_{k-}^{(s)} \neq f_{k+}^{(s)} = f^{(s)}(x_k + 0), k = \overline{1, m-1}, s = \overline{0, r_k}$

Введемо до розгляду розривний сплайни $Sp(x) =$

$$= \begin{cases} \sum_{s=0}^{r_0} f^{(s)}(0) h1_{0,r_0,r_1,s}(x) + \sum_{s=0}^{r_1} f^{(s)}(x_1 - 0) h0_{1,r_0,r_1,s}(x), \\ 0 \le x < x_1; \\ \sum_{s=0}^{r_p} f^{(s)}(x_k + 0) h1_{k,r_k,r_{k+1},s}(x) + \sum_{s=0}^{r_{k+1}} f^{(s)}(x_{k+1} - 0) h0_{k+1,r_k,r_{k+1},s}(x) \\ x_k \le x < x_{k+1}, k = \overline{1, m-1}; \\ \sum_{s=0}^{r_{m-1}} f^{(s)}(x_{m-1} + 0) h1_{m-1,r_{m-1},r_m,s}(x) + \sum_{s=0}^{r_m} f^{(s)}(1 - 0) h0_{m,r_{m-1},r_m,s}(x), \\ x_{m-1} \le x \le 1 \end{cases}$$

де $h1_{\ell,r_i,r_{i+1},s}(x), \ell = i, i+1$- поліноми степеня $r_i + r_{i+1} - 1$ з властивостями

$$h_{\ell,r_i,r_{i+1},s}^{(p)}(x_k) = \delta_{\ell,k}\delta_{p,s}, k, \ell = i, i+1; p, s = \overline{0, r_\ell} .$$

Теорема 1. Функція $R(x) = f(x) - Sp(x)$ має властивості

$$R^{(s)}(x_k) = 0, s = \overline{0, r_k}, k = \overline{1, m-1}$$

і якщо $f_{k-}^{(s)} = f_{k+}^{(s)}, k = \overline{1, m-1}, s = \overline{r_k, r}; r \ge \max\{r_1, ..., r_{m-1}\}$, то $R(x) \in C^r[0,1]$.

Пропонується розкладати в суму Фур'є функцію $R(x)$

$$F_n(x) = \sum_{p=-n}^{n} c_p e^{i2\pi px}, \; c_p = \int_0^1 R(x) e^{-i2\pi px} dx, \; p = \overline{-n, n}$$

і функцію $f(x)$ наближувати у вигляді суми $f(x) = Sp(x) + F_n(x)$.

Враховуючи, що $R(x) \in C^r[0,1]$, то при такому наближенні ми всі точки розриву включаємо в перший доданок $Sp(x)$, а для сум Фур'є $F_n(x)$ порядок збіжності буде, як відомо [2], $O\left(\frac{1}{n^{r+1}}\right)$.

Таким чином запропонований підхід може розглядатись, як автоматичне забезпечення збіжності ряду Фур'є до функції з відомими точками розриву функції $f(x)$. Для їх наближеного знаходження можна скористатися твердженнями робіт [3, 4]. Твердження цієї доповіді та [5] лягли в основу нового методу розв'язання плоскої задачі комп'ютерної томографії у вигляді розривного сплайну від двох змінних та суми Фур'є від функції, яка є різницею між наближуваною функції та сплайном і належить до неперервних або навіть до $r, r \geq 1$ разів неперервних функцій. При цьому коефіцієнти Фур'є обчислюються за допомогою проекцій, що надходять з комп'ютерного томографа. Детальна розробка та дослідження цього методу буде опублікована в окремій статті.

Література

1. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. 2. - 1974. 655 с.
2. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 3. М., – 1966, 656 с. с илл.
3. Литвин О. М. Наближення розривної функції за допомогою розривних сплайнів / О. М. Литвин, Ю. І. Першина // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць. – Кам'янець-Подільський, 2010. – Вип. 3. – С. 122 – 131.
4. Литвин О. Н. Восстановление разрывных функций двух переменных, когда линии разрыва неизвестны (прямоугольные элементы) // Литвин О. Н., Першина Ю. И, Сергиенко И. В. // Кибернетика и системный анализ, №4, – 2014. – С. 126-134.
5. Литвин О. М. Реконструкція зображень з використанням скінченних сум Фур'є та Фейєра // О. М. Литвин, О. Г. Литвин / Тези конфер. ІСН-2016, ПУЕТ, Полтава 10-11.03.2016.