УКООПСПІЛКА

Полтавський університет
споживчої кооперації України

Кафедра вищої математики і фізики

Авторський
примірник

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Методичні рекомендації до самостійного вивчення курсу та завдання контрольних робіт для студентів заочної форми навчання спеціальностей:
7.091706 «Технологія зберігання, консервування та переробки плодів і овочів»,
7.091707 «Технологія зберігання, консервування та переробки м'яса»,
7.091711 «Технологія харчування»

ПОЛТАВА
РВЦ ПУСКУ
2005

Автори: ***Шурдук А.І.,*** завідувач кафедри вищої математики і фізики Полтавського університету споживчої кооперації України, доцент, к.ф.-м.н.
Вовк Л.І., старший викладач кафедри вищої математики і фізики Полтавського університету споживчої кооперації України
Зюков М.Є., доцент кафедри вищої математики і фізики Полтавського університету споживчої кооперації України, к.ф.-м.н.
Кошова О.П., асистент кафедри вищої математики і фізики Полтавського університету споживчої кооперації України

Рецензенти: ***Москаленко Ю.Д.,*** завідувач кафедри математики Полтавського державного педагогічного університету ім. В.Г. Короленка, доцент, к.ф.-м.н.
Махно М.Г., доцент кафедри вищої математики і фізики Полтавського університету споживчої кооперації України, к.ф.-м.н.

Розглянуто та рекомендовано до друку на засіданні кафедри вищої математики і фізики ***25 листопада 2004 р.****, протокол №* ***5***

Шурдук А.І., Вовк Л.І., Зюков М.Є., Кошова О.П.
Вища математика: Методичні рекомендації. – Полтава: РВЦ ПУСКУ, 2005. – 43 с.

Відповідальність за зміст навчально-методичного видання несуть автори, рецензенти та завідувач кафедри вищої математики і фізики ***Шурдук А.І.***

Повне чи часткове відтворення, тиражування, передрук та розповсюдження даного видання без дозволу Полтавського університету споживчої кооперації України **ЗАБОРОНЕНО**

© Полтавський університет споживчої кооперації України, 2005 р.

ВСТУП

Мета курсу «Вища математика» в системі підготовки студентів-технологів – засвоєння необхідного математичного апарату, який допомагає аналізувати, моделювати та розв'язувати прикладні технологічні задачі, використовуючи у випадку необхідності ПЕОМ.

В умовах зростаючої конкуренції на ринку товарів та послуг успіх діяльності фахівця-технолога залежить від уміння досліджувати та прогнозувати економічні, екологічні та соціальні явища. Для отримання значущих та достовірних результатів дослідження і прогнозування спеціаліст повинен застосовувати математичні методи дослідження, регресивний і дисперсійний аналіз, що базуються на теоретичних положеннях вищої математики взагалі й теорії ймовірностей зокрема.

Теорія ймовірностей вивчає закономірності масових однорідних випадкових подій, з якими стикається у своїй роботі фахівець-технолог. Математична статистика визначає методи збору та обробки статистичних даних для одержання наукових та практичних висновків (у тому числі і для прогнозування).

Задачі вивчення математики як фундаментальної дисципліни полягають у розвитку логічного та алгоритмічного мислення, у виробленні уміння моделювати реальні технолого-економічні процеси, у засвоєнні прийомів дослідження та розв'язання математично-формалізованих задач, у оволодінні основними методами математики.

Для цього необхідно ознайомити студентів з основами математичного апарату, необхідного для розв'язування теоретичних і практичних задач виробництва; виробити навички математичного дослідження прикладних задач, наприклад, застосовувати похідні при визначенні прибутку від реалізації товарів; застосовувати частинні похідні при визначенні попиту на конкурентні товари; застосовувати диференціальні рівняння при визначенні функції попиту тощо. Необхідно прищепити студентам уміння самостійно вивчати навчальну літературу з математики для прикладних питань; дати студентам засоби та прийоми кількісного аналізу для успішного вивчення ними спеціальних навчальних дисциплін, зокрема з маркетингу, технології та організації харчових виробництв, технологічного обладнання харчових виробництв і торгівлі.

Навчальними планами ПУСКУ, згідно з типовою програмою нормативної дисципліни «Вища математика», передбачено виконання контрольних робіт. Контрольна робота – це набір завдань з даного посібника, які охоплюють основні теми дисципліни. Виконання контрольної роботи є важливим етапом самостійного вивчення студентами заочного факультету дисципліни «Вища математика».

Дана методична розробка містить програму нормативної дисципліни «Вища математика», де відображені мета, завдання, що мають бути вирішені в процесі вивчення дисципліни, а також зміст дисципліни, списки рекомендованої основної і додаткової літератури.

Студенти заочної форми навчання виконують дві контрольні роботи з «Вищої математики»: № 1 і № 2.

У методичні рекомендації увійшли загальні рекомендації, щодо оформлення домашньої контрольної роботи та таблиці вибору завдань за варіантами контрольної роботи.

ВИМОГИ ЩОДО ОФОРМЛЕННЯ КОНТРОЛЬНИХ РОБІТ

*Студент повинен виконувати завдання, що входять до кожної контрольної роботи за варіантом, номер якого співпадає з двома останніми цифрами його залікової книжки (*M *– передостання,* N *– остання цифри).*

Під час виконання домашніх письмових контрольних робіт слід дотримуватися наступних правил.

Кожну контрольну роботу необхідно виконувати в окремому зошиті з полями для зауважень рецензента.

Титульний аркуш зошита слід оформляти згідно з вимогами методистів заочного факультету.

Розв'язання завдань розміщувати в тому порядку, який відповідає нумерації завдань.

Перед розв'язанням завдання записувати повністю його умову.

Розв'язання завдань слід записувати детально і акуратно, коротко пояснюючи дії, що виконуються.

Усі сторінки контрольної роботи потрібно пронумерувати, а в кінці роботи навести список використаної літератури.

Робота підписується із зазначенням дати її виконання.

ПРОГРАМА КУРСУ

1.1. Основною *метою* викладання є формування у майбутніх технологів базових математичних знань для розв'язування задач у професійній діяльності, вмінь аналітичного мислення та математичного формулювання економіко-технологічних задач.

1.2. Основними *завданнями*, що мають бути вирішені у процесі викладання дисципліни, є надання студентам знань з основних розділів вищої математики; формування початкових умінь:

– самостійного опрацювання математичної літератури;
– розрахунків середніх величин;
– здійснення дії над векторами, матрицями, обчислення визначників;
– розв'язання систем лінійних рівнянь;
– дослідження форм і властивостей прямих та площин, кривих та поверхонь другого порядку;
– класифікація функцій; числових послідовностей;
– знаходження границі степенево-показникових функцій;
– дослідження функції за допомогою диференціальних числень;
– здійснювання інтегральних числень;
– обчислення числових та степеневих рядів;
– розв'язання диференціальних рівнянь першого та вищого порядків;
– побудови та використання економіко-математичних моделей;
– самостійно розширювати свої знання, розвивати логічне і алгоритмічне мислення;
– виконувати якісний і кількісний математичний аналіз випадкових подій, випадкових величин та систем таких величин;
– проводити математичну обробку статистичних даних;
– давати статистичну оцінку параметрів генеральної сукупності;
– здійснювати статистичну перевірку гіпотез;
– використовувати елементи дисперсійного аналізу;
– теорії кореляції;
– включати результати досліджень у математичні моделі економіко-технологічних задач.

Розділ 1. Елементи лінійної алгебри

Тема 1.1. Визначники другого і третього порядку. Поняття про визначник n-го порядку. Властивості визначників.

Тема 1.2. Матриці і дії над ними. Ранг матриці. Обернена матриця.

Тема 1.3. Система лінійних рівнянь. Теорема Кронекера-Капеллі. Матричний метод. Метод Гауса. Правило Крамера.

Розділ 2. Елементи векторної алгебри та аналітичної геометрії

Тема 2.1. Вектори. Розкладання вектора за координатним базисом. Довжина вектора. Лінійні операції над векторами, заданими своїми координатами.

Тема 2.2. Скалярний добуток векторів і його властивості. Кут між векторами. Умови ортогональності двох векторів. Векторний добуток та його властивості. Змішаний добуток векторів та його властивості.

Тема 2.3. Рівняння прямої, що проходить через дві точки. Рівняння прямої, що проходить через дану точку в заданому напрямі. Канонічне і параметричне рівняння прямої в просторі (векторні і координатні форми).

Тема 2.4. Криві другого порядку: коло, еліпс, гіпербола, парабола.

Тема 2.5. Рівняння площини, що проходить через задану точку з заданим нормальним вектором (векторна та координатна форми). Тіла обертання.

Розділ 3. Вступ до математичного аналізу

Тема 3.1. Поняття функції. Основні елементарні функції і їх графіки (огляд знань з курсу середньої школи).

Тема 3.2. Границя функції в точці. Визначені границі. Поняття неперервних функцій. Неперервність елементарних функцій.

Тема 3.3. Нескінченно малі функції і їх властивості. Порівняння нескінченно малих. Еквівалентні нескінченно малі функції і їх вживання при обчислюванні границь.

Тема 3.4. Границя функції при $x \to \pm\infty$. Границя числової послідовності.

Тема 3.5. Властивості функцій, неперервних на відрізку; існування найбільшого і найменшого значення. Існування проміжних значень.

Розділ 4. Диференціальне числення функцій однієї змінної

Тема 4.1. Похідна функції в точці, її геометричний, механічний та економічний зміст. Похідна суми, добутку та частки (огляд теорем з середньої школи).

Тема 4.2. Похідна складної функції. Похідна оберненої функції, похідна обернених тригонометричних функцій.

Тема 4.3. Похідні вищих порядків.

Тема 4.4. Диференціювання функцій. Диференціал та його геометричний зміст. Вживання диференціалу для наближених обчислень.

Тема 4.5. Формули кінцевих приростів Лагранжа. Правило Лопіталя.

Тема 4.6. Формули Тейлора з остаточним членом у формі Лагранжа. Представлення функцій: e^x, $\sin x$, $\cos x$, $(1+x)^n$, $\ln(1+x)$ за формулою Тейлора. Біном Ньютона. Застосування формули Тейлора в наближених обчисленнях.

Розділ 5. Дослідження функцій за допомогою похідних

Тема 5.1. Умови зростання і спадання функцій. Точки екстремуму. Необхідні умови екстремуму. Достатні умови екстремуму. Знаходження найбільшого і найменшого значень диференційованої на відрізку функції.

Тема 5.2. Напрямок опуклості та вігнутості графіка функції; точки перегину.

Тема 5.3. Загальна схема дослідження функцій та побудова її графіка.

Розділ 6. Функції декількох змінних

Тема 6.1. Функції двох змінних та їх графічне зображення поверхнями та лініями рівня. Функції трьох змінних. Поверхні другого порядку. Лінійні і квадратичні функції (форми) двох, трьох, n-змінних.

Тема 6.2. Часткові похідні першого порядку. Теорема про рівність змішаних похідних.

Тема 6.3. Екстремум функцій декількох змінних. Необхідні умови екстремуму. Побудова емпіричної лінійної функції методом найменших квадратів.

Розділ 7. Інтегральне числення

Тема 7.1. Первісна функція. Невизначений інтеграл та його властивості. Таблиця основних формул інтегрування.

Тема 7.2. Заміна змінних і інтегрування за частинами невизначеного інтеграла.

Тема 7.3. Інтегрування найпростіших раціональних, ірраціональних і тригонометричних функцій. Вживання таблиць інтегралів.

Тема 7.4. Визначений інтеграл та його властивості. Обчислення визначеного інтеграла за частинами та заміною змінних.

Тема 7.5. Невласні інтеграли.

Тема 7.6. Геометричний зміст визначеного інтеграла. Обчислення площини плоских фігур і об'єму тіл обертання.

Тема 7.7. Наближене обчислення визначених інтегралів.

Розділ 8. Диференціальні рівняння

Тема 8.1. Поняття диференціального рівняння. Диференціальне рівняння першого порядку. Поле напрямку. Інтегральні криві, задача Коші.

Тема 8.2. Диференціальні рівняння першого порядку з відокремлюваними коефіцієнтами.

Розділ 9. Ряди

Тема 9.1. Числові ряди. Сума ряду. Необхідна умова збіжності.

Тема 9.2. Достатні умови збіжності рядів з невід'ємними членами. Ознака Даламбера.

Тема 9.3. Знакозмінні ряди. Теорема Лейбніца для знакоперемінних рядів. Оцінка залишку знакозмінного ряду. Абсолютна збіжність.

Тема 9.4. Поняття про функціональний ряд. Степеневі ряди. Інтервал та радіус збіжності. Почленне диференціювання та інтегрування степеневих рядів.

Тема 9.5. Розклад функцій у степеневий ряд. Вживання степеневих рядів у наближених обчисленнях.

ОСНОВИ ТЕОРІЇ ІМОВІРНОСТЕЙ І МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

Розділ 1. Випадкові події та їх імовірність

Тема 1.1. Предмет теорії імовірностей та її значення для економічної науки. Класифікація подій. Простір елементарних подій. Алгебра подій. Поняття випадкової події. Відносна частота.

Тема 1.2. Класичне і статистичне визначення ймовірностей випадкової події. Поняття про аксіоматичну побудову теорії імовірностей.

Тема 1.3. Імовірність суми і добутку подій. Формула повної імовірності. Формули Байєса.

Розділ 2. Випадкові величини

Тема 2.1. Дискретні випадкові величини. Функція розподілу та її властивості. Математичне сподівання і дисперсія дискретної випадкової величини, їх властивості. Нерівність Чебишова.

Тема 2.2. Схема Бернуллі. Біноміальний розподіл та його числові характеристики. Теореми Муавра-Лапласа (без доведення). Розподіл Пуассона. Найпростіша течія випадкових подій. Геометричний та гіпергеометричний розподіл.

Тема 2.3. Неперервні випадкові величини. Функція розподілу та щільність розподілу неперервних випадкових величин, їх взаємозв'язок і властивості. Математичне сподівання, дисперсія та їх властивості. Розподіл функцій випадкових величин.

Тема 2.4. Нормальний розподіл та його властивості. Рівномірний розподіл, показниковий розподіл, функція надійності в товарознавстві.

Тема 2.5. Поняття про закон великих чисел. Теорема Чебишова і стійкість середніх. Центральна гранична теорема Ляпунова (без доведення).

Розділ 3. Елементи статистичної теорії оцінювання

Тема 3.1. Генеральна сукупність та вибірка. Варіаційний ряд. Гістограма, емпірична функція розподілу, вибіркова середня і дисперсія.

Тема 3.2. Поняття про вибірковий метод. Спосіб утворення вибірки.

Тема 3.3. Статистичне оцінювання генеральної середньої, частот. Поняття про метод моментів. Похибка оцінювання. Довірча ймовірність та надійний інтервал. Визначення необхідного обсягу вибірки. Методи надійного інтервалу в товарознавстві.

Розділ 4. Методи статистичних перевірок гіпотез

Тема 4.1. Поняття про критерій згоди. Статистична перевірка гіпотез про рівність частот та середніх.

Тема 4.2. Перевірка гіпотез про закон розподілу генеральної сукупності за допомогою критерію згоди та Колмогорова.

Розділ 5. Статистичне дослідження залежностей

Тема 5.1. Функціональна залежність і регресія. Криві регресії та їх властивості.

Тема 5.2. Визначення параметрів лінійної регресії методом найменших квадратів. Коефіцієнти регресії та кореляції, їх властивості. Поняття про кореляційне відношення. Оцінювання параметрів багатовимірних лінійних функцій регресії.

Тема 5.3. Визначення коефіцієнтів нелінійних регресій методом найменших квадратів безпосередньо та з допомогою лінеаризуючих замін змінної.

Контрольна робота 1

Завдання 1-10

Якщо система сумісна, то знайти її розв'язок:
а) за формулами Крамера;
б) матричним способом;
в) методом Гауса:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}.$$

1. $a_{11} = 2$; $a_{12} = 2$; $a_{13} = 3$; $a_{21} = 5$; $a_{22} = -4$; $a_{23} = -1$; $a_{31} = 7$; $a_{32} = 6$; $a_{33} = 5$; $b_1 = 0$; $b_2 = 9$; $b_3 = 1$.
2. $a_{11} = 5$; $a_{12} = 1$; $a_{13} = 1$; $a_{21} = 6$; $a_{22} = 1$; $a_{23} = 3$; $a_{31} = 7$; $a_{32} = 1$; $a_{33} = 4$; $b_1 = 3$; $b_2 = 4$; $b_3 = 5$.
3. $a_{11} = 2$; $a_{12} = 7$; $a_{13} = 1$; $a_{21} = 3$; $a_{22} = -3$; $a_{23} = -1$; $a_{31} = 5$; $a_{32} = 8$; $a_{33} = 7$; $b_1 = 4$; $b_2 = 6$; $b_3 = 10$.
4. $a_{11} = 1$; $a_{12} = 2$; $a_{13} = -1$; $a_{21} = 2$; $a_{22} = 5$; $a_{23} = 3$; $a_{31} = 1$; $a_{32} = 7$; $a_{33} = 4$; $b_1 = 3$; $b_2 = 6$; $b_3 = 3$.
5. $a_{11} = 2$; $a_{12} = 5$; $a_{13} = 1$; $a_{21} = 3$; $a_{22} = -5$; $a_{23} = -1$; $a_{31} = 7$; $a_{32} = 7$; $a_{33} = -4$; $b_1 = 3$; $b_2 = 2$; $b_3 = 3$.
6. $a_{11} = 1$; $a_{12} = -1$; $a_{13} = 3$; $a_{21} = 2$; $a_{22} = 1$; $a_{23} = 4$; $a_{31} = 7$; $a_{32} = -1$; $a_{33} = -3$; $b_1 = 0$; $b_2 = 3$; $b_3 = 6$.
7. $a_{11} = 7$; $a_{12} = 1$; $a_{13} = 5$; $a_{21} = 8$; $a_{22} = 3$; $a_{23} = 6$; $a_{31} = 3$; $a_{32} = 8$; $a_{33} = 1$; $b_1 = 2$; $b_2 = 2$; $b_3 = 2$.
8. $a_{11} = 6$; $a_{12} = -6$; $a_{13} = 1$; $a_{21} = 7$; $a_{22} = -5$; $a_{23} = 2$; $a_{31} = 8$; $a_{32} = -6$; $a_{33} = -5$; $b_1 = 0$; $b_2 = 2$; $b_3 = 2$.
9. $a_{11} = 7$; $a_{12} = -1$; $a_{13} = 2$; $a_{21} = 2$; $a_{22} = 3$; $a_{23} = 1$; $a_{31} = 5$; $a_{32} = 7$; $a_{33} = -7$; $b_1 = 1$; $b_2 = 4$; $b_3 = 0$.
10. $a_{11} = 2$; $a_{12} = 2$; $a_{13} = 3$; $a_{21} = 5$; $a_{22} = -4$; $a_{23} = -1$; $a_{31} = 7$; $a_{32} = 6$; $a_{33} = 5$; $b_1 = 0$; $b_2 = 9$; $b_3 = 1$.

Завдання 11-20

Дано вектори $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b}(b_1; b_2; b_3)$, $\vec{c}(c_1; c_2; c_3)$ і $\vec{d}(d_1; d_2; d_3)$ в деякому базисі. Знайти:

а) скалярний добуток векторів $(2\vec{a} + 3\vec{b})$ і $\left(\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right)$;

б) векторний добуток векторів $(3\vec{a} + \vec{b})$ і $(\vec{a} - \vec{b})$;

в) показати, що вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ утворюють базис і знайти координати вектора $\vec{d}$ в цьому базисі:

11. $\vec{a} = (1; 2; 3)$, $\vec{b} = (-1; 3; 2)$, $\vec{c} = (7; -3; 5)$, $\vec{d} = (6; 10; 17)$.
12. $\vec{a} = (4; 7; 8)$, $\vec{b} = (9; 1; 3)$, $\vec{c} = (2; -4; 1)$, $\vec{d} = (1; -13; -13)$.
13. $\vec{a} = (8; 2; 3)$, $\vec{b} = (4; 6; 10)$, $\vec{c} = (3; -2; 1)$, $\vec{d} = (7; 4; 11)$.
14. $\vec{a} = (10; 3; 1)$, $\vec{b} = (1; 4; 2)$, $\vec{c} = (3; 9; 2)$, $\vec{d} = (19; 30; 7)$.
15. $\vec{a} = (2; 4; 1)$, $\vec{b} = (1; 3; 6)$, $\vec{c} = (5; 3; 1)$, $\vec{d} = (24; 20; 6)$.
16. $\vec{a} = (1; 7; 3)$, $\vec{b} = (3; 4; 2)$, $\vec{c} = (4; 8; 5)$, $\vec{d} = (7; 32; 14)$.
17. $\vec{a} = (1; -2; 3)$, $\vec{b} = (4; 7; 2)$, $\vec{c} = (6; 4; 2)$, $\vec{d} = (14; 18; 6)$.
18. $\vec{a} = (1; 4; 3)$, $\vec{b} = (6; 8; 5)$, $\vec{c} = (3; 1; 4)$, $\vec{d} = (21; 18; 33)$.
19. $\vec{a} = (2; 7; 3)$, $\vec{b} = (3; 1; 8)$, $\vec{c} = (2; -7; 4)$, $\vec{d} = (16; 14; 27)$.
20. $\vec{a} = (7; 2; 1)$, $\vec{b} = (4; 3; 5)$, $\vec{c} = (3; -4; -2)$, $\vec{d} = (2; -5; -13)$.

Завдання 21-30

Дано вершини $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$ трикутника. Знайти:
а) довжину сторони AB;
б) внутрішній кут трикутника A в радіанах з точністю до 0,001;
в) рівняння висоти, проведеної з вершини C та її довжину;
г) рівняння медіани, проведеної з вершини C;
д) точку перетину висот трикутника. Зробити схематичний малюнок.

21. A(1; 1),	B(7; 4),	C(4; 5).
22. A(1; 1),	B(–5; 4),	C(–2; 5).
23. A(–1; 1),	B(5; 4),	C(2; 5).
24. A(–1; 1),	B(–7; 4),	C(–4; 5).
25. A(1; –1),	B(7; 2),	C(4; 5).
26. A(1; –1),	B(–5;2),	C(–2; 3).
27. A(–1; –1),	B(5; 2),	C(2; 3).
28. A(–1; –1),	B(–7; 2),	C(–4; 3).
29. A(0; 1),	B(6; 4),	C(3; 5).
30. A(1; 0),	B(7; 3),	C(4; 4).

Завдання 31-40

Дано координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$. Необхідно знайти:
а) рівняння прямої A_1A_2 та довжину ребра A_1A_2;
б) кут між ребрами A_1A_2 і A_1A_4;

в) кут між ребром A_1A_4 і гранню $A_1A_2A_3$;
г) площу грані $A_1A_2A_3$;
д) об'єм піраміди;
е) рівняння площини $A_1A_2A_3$;
ж) рівняння висоти, опущеної із вершини A_4 на грань $A_1A_2A_3$. Зробити схематичний малюнок.

31. $A_1(4; 2; 5)$, $A_2(0; 7; 2)$, $A_3(0; 2; 7)$, $A_4(1; 5; 0)$.
32. $A_1(4; 4; 10)$, $A_2(4; 10; 2)$, $A_3(2; 8; 4)$, $A_4(9; 6; 4)$.
33. $A_1(4; 6; 5)$, $A_2(6; 9; 4)$, $A_3(2; 10; 10)$, $A_4(7; 5; 9)$.
34. $A_1(3; 5; 4)$, $A_2(8; 7; 4)$, $A_3(5; 10; 4)$, $A_4(4; 7; 8)$.
35. $A_1(10; 6; 6)$, $A_2(-2; 8; 2)$, $A_3(6; 8; 9)$, $A_4(7; 10; 3)$.
36. $A_1(1; 8; 2)$, $A_2(5; 2; 6)$, $A_3(5; 7; 4)$, $A_4(4; 10; 9)$.
37. $A_1(6; 6; 5)$, $A_2(4; 9; 5)$, $A_3(4; 6; 11)$, $A_4(6; 9; 3)$.
38. $A_1(7; 2; 2)$, $A_2(5; 7; 7)$, $A_3(5; 3; 1)$, $A_4(2; 3; 7)$.
39. $A_1(8; 6; 4)$, $A_2(10; 5; 5)$, $A_3(5; 6; 8)$, $A_4(8; 10; 7)$.
40. $A_1(7; 7; 3)$, $A_2(6; 5; 8)$, $A_3(3; 5; 8)$, $A_4(8; 4; 1)$.

Завдання 41-50

41. Скласти рівняння лінії, відстань кожної точки якої від початку координат і від точки A(5; 0) відносяться як 2 : 1. Зробити малюнок.
42. Скласти рівняння лінії, відстань кожної точки якої до точки A (–1; 0) вдвічі менша відстані її від прямої $x = -4$. Зробити малюнок.
43. Скласти рівняння лінії відстань кожної точки якої від точки A(2; 0) і від прямої $5x + 8 = 0$ відносяться як 5 : 4. Зробити малюнок.
44. Скласти рівняння лінії, кожна точка якої знаходиться вдвічі дальше від точки A(4; 0) , ніж від точки B(1; 0). Зробити малюнок.
45. Скласти рівняння лінії, відстань кожної точки якої від точки A(2; 0) і від прямої $2x + 5 = 0$ відносяться як 4 : 5. Зробити малюнок.
46. Скласти рівняння лінії, відстань кожної точки якої від точки A(3; 0) в два рази менша відстані від точки B(26; 0). Зробити малюнок.
47. Скласти рівняння лінії, кожна точка якої рівновіддалена від точки A(0; 2) і від прямої $y - 4 = 0$. Зробити малюнок.
48. Скласти рівняння лінії, кожна точка якої рівновіддалена від осі ординат і від кола $x^2 + y^2 = 4x$. Зробити малюнок.
49. Скласти рівняння лінії, кожна точка якої рівновіддалена від точки A(2; 6) і від прямої $y + 2 = 0$. Зробити малюнок.
50. Скласти рівняння лінії, кожна точка якої віддалена від точки A(–4; 0) в три рази далі, ніж від початку координат. Зробити малюнок.

– © ПУСКУ –

Завдання 51-60

Знайти границі заданих функцій:

51. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-2x}{3x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{3x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{5x^2}$;
г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^x$.

52. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+1}{2x^3+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{2+x}-3}{x-7}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{5x}$;
г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^x$.

53. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-2x}{3x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{3x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{5x^2}$;
г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^x$.

54. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+x^2-6}{2x^4-x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+3x}-1}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{\operatorname{arctg}x}$;
г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+2x}{2x-4}\right)^{1/x}$.

55. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+6x-5}{5x^2-x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^2 x}{x^2}$;
г) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left[\ln(x+1)-\ln x\right]$.

56. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3+x+5x^4}{x^4-12x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-2x}}{x+x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\operatorname{ctg}2x}{\sin 3x}$;
г) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x+1)\left[\ln(x+3)-\ln x\right]$.

57. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-2x^2+5x^4}{2+3x^2+x^4}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x^2}-1}{x^2+x^3}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{1-\cos 2x}$;
г) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-5)\left[\ln(x-3)-\ln x\right]$.

58. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-3x+1}{3x^2+x-5}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{5}}{x-3}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^2(x/2)}{x^2}$;
г) $\lim\limits_{x\to 1}(7-6x)^{x/(3x-3)}$.

– © ПУСКУ –

59. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^4-2x^3+2}{x^4+3}$; б) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{2x+6}}{x^2-5x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{2x\,\mathrm{tg}2x}$;
г) $\lim\limits_{x\to 2}(3x-5)^{2x/(x^2-4)}$.

60. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^5-3x^2+9}{2x^5+2x^2+5}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{2x}-2}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}5x\,\mathrm{ctg}3x$;
г) $\lim\limits_{x\to 3}(3x-8)^{2/(x-3)}$.

Завдання 61-70

Знайти: а) невизначений інтеграл; б) площу фігури, обмежену лініями; в) обчислити невласний інтеграл або встановити його розбіжність.

61. а) $\int\dfrac{dx}{x^3+8}$; б) $4y=8x-x^2$ і $4y=x+6$; в) $\int\limits_0^{+\infty}e^{-x}dx$.

62. а) $\int\dfrac{2x^2-3x+1}{x^3+1}dx$; б) $y=4-x^2$ і $y=x^2-2x$; в) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{dx}{x^2+1}$.

63. а) $\int\dfrac{(3x-7)dx}{x^3+4x^2+4x+16}$; б) $6x=y^3-16y$ і $24x=y^3-16y$; в) $\int\limits_0^1\dfrac{dx}{x}$.

64. а) $\int\dfrac{dx}{x^3+x^2+2x+2}$; б) $y=6x-x^2$ і віссю Ox; в) $\int\limits_{-1}^{2}\dfrac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$.

65. а) $\int\dfrac{x^2dx}{x^3+5x^2+8x+4}$; б) $y^2=x^3$, $x=0$ і $y=4$; в) $\int\limits_0^2\dfrac{x^3dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

66. а) $\int\dfrac{(x+3)dx}{x^3+x^2-2x}$; б) $y=x^2+4x$ і $x-y+4=0$; в) $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{\ln x}{x^3}dx$.

67. а) $\int\dfrac{(x^2-3x)dx}{x^4+5x^2+6}$; б) $xy=6$ і $y=7-x$; в) $\int\limits_{-\infty}^{1}e^t dt$.

68. а) $\int\dfrac{x^2dx}{x^4-81}$; б) $y=6x-x^2$ і $x-y+2=0$; в) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{dx}{x^2+2x+2}$.

– © ПУСКУ –

69. а) $\int\dfrac{(x^2-x+1)dx}{x^4+2x^2-3}$; б) $y=x^3$, $y=x$ і $y=2x$; в) $\int\limits_2^3\dfrac{xdx}{\sqrt[4]{x^2-4}}$.

70. а) $\int\dfrac{(x^3-6)dx}{x^4+6x^2+8}$; б) $x^2+y^2=4x$ і $y^2=2x$; в) $\int\limits_0^1\ln x dx$.

Завдання 71-80

Знайти екстремум функції двох змінних та значення функції в точках екстремуму.

71. $Z=x^2-xy+y^2+9x-6y+20$.
72. $Z=x^3+8y^3-6xy+1$.
73. $Z=3x+6y-x^2-xy-y^2$.
74. $Z=(x-1)^2+2y^2$.
75. $Z=2x^3-xy^2+5x^2+y^2$.
76. $Z=x^3+y^3-3xy$.
77. $Z=x^2+xy+y^2-4x-2y$.
78. $Z=x^2+xy+y^2-2x-y$.
79. $Z=y(x-y)-x^2-y^2$.
80. $Z=x^3+3xy^2-15x-12y$.

Завдання 81-90

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння і частинний розв'язок, що задовольняє початкові умови: $y=y_0$ при $x_0=0$; $y'=y'_0$.

81. $y''+4y'+4y=2e^x$; $y(0)=-2$, $y'(0)=-2$.
82. $y''-5y'+6y=2\cos x$; $y(0)=3$, $y'(0)=\dfrac{1}{2}$.
83. $y''-2y'+5y=x^2+1$; $y(0)=-3$, $y'(0)=-\dfrac{1}{5}$.
84. $y''+2y'-8y=3\sin x$; $y(0)=-1$, $y'(0)=-\dfrac{3}{2}$.
85. $y''-6y'+9y=\cos 2x$; $y(0)=1$, $y'(0)=\dfrac{1}{3}$.
86. $y''-4y'+5y=2e^{3x}$; $y(0)=2$, $y'(0)=-\dfrac{3}{4}$.
87. $y''-4y'+3y=3e^{2x}$; $y(0)=2$, $y'(0)=-1$.
88. $y''-4y'+4y=-x^2+3x$; $y(0)=3$, $y'(0)=\dfrac{4}{3}$.

– © ПУСКУ –

89. $y'' + 2y' + 10y = -\sin 2x$; $y(0) = 0,\ y'(0) = \frac{3}{4}$.

90. $y'' + y' - 6y = x^2 - 1$; $y(0) = 0,\ y'(0) = 1$.

Завдання 91-100

У завданнях необхідно:

а) дослідити числовий ряд на абсолютну збіжність;

б) знайти інтервал збіжності степеневого ряду і дослідити його збіжність на кінцях інтервалу.

91. а) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$; б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{2^n}$.

92. а) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos n\alpha}{2^n}$; б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{6^n + 3^n}$.

93. а) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)}$; б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)x^n}{3^n(n+2)}$.

94. а) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sin\frac{\pi n}{3}$; б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{6^n + 3^n}$.

95. а) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n\sqrt[3]{n}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{\sqrt{n}}$.

96. а) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+1}}$; б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{5^n(n+1)}$.

97. а) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \cos\frac{\pi}{5n}$; б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{5^n x^n}{3^n + 4^n}$.

98. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{7^n x^n}{6^n\sqrt[3]{n}}$.

99. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n^2+n}{2}} \cdot \frac{n}{2^n}$; б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{7^n x^n}{5^n + 3^n}$.

100. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$; б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{5^n\sqrt{n}x^n}{4^n}$.

Контрольна робота 2

Нехай M – передостання цифра номера залікової книжки, а N – остання цифра цього номера. Позначимо MN – двозначне число, яке утворене цими цифрами.

Завдання 1

Фірма друкує рекламні брошури у трьох типографіях, наклади яких відносяться як $(M + 1) : (N + 1) : (M + N + 1)$. Брак у першій типографії у середньому становить $(3 + 0{,}3(-1)^M)\%$, у другій типографії – $(2 + 0{,}2(-1)^N)\%$, а у третій – $(1 + 0{,}5(-1)^{M+N})\%$. Знайти ймовірність того, що:

а) навмання вибрана брошура буде бракованою;

б) бракована брошура надрукована у третій типографії.

Завдання 2

Компанія має $(MN + 100)$ торговельних точок, кожна з яких виконує план товарообігу із імовірністю $\frac{M+1}{N+11}$. Компанія матиме збитки, якщо більше $(25 + 5(-1)^M)\%$ торговельних точок не виконають план товарообігу, і матиме прибуток, якщо більше $(85 + 5(-1)^N)\%$ торговельних точок виконають план. Обчислити ймовірність: а) беззбиткової роботи компанії; б) прибуткової роботи компанії.

Завдання 3

Ймовірність підвищення курсу акцій першого підприємства становить $(0{,}5 + 0{,}1(-1)^M)\%$, другого – $(0{,}6 + 0{,}2(-1)^N)\%$, а третього – $(0{,}4 + 0{,}3(-1)^{M+N})\%$. Випадкова величина X – кількість підприємств, курс акцій яких підвищився. Скласти закон розподілу випадкової величини X. Побудувати функцію розподілу, її графік і многокутник розподілу. Обчислити числові характеристики випадкової величини X: математичне сподівання M(X), дисперсію D(X) та стандартне відхилення $\sigma(X)$. Знайти ймовірність $P(X > M(X))$.

Завдання 4

Розподіл збитків підприємства можна описати випадковою величиною X, яка має рівномірний розподіл на проміжку $[-M - 1, N + 1]$. Побудувати функцію і щільність розподілу та їх графіки. Обчислити числові характеристики випадкової величини X: математичне сподівання M(X), дисперсію D(X) та стандартне відхилення $\sigma(X)$. Знайти ймовірність $P(M(X) - \sigma(X) < X < M(X) + \sigma(X))$ та ймовірність прибуткової роботи підприємства.

Завдання 5

За статистичними даними можна вважати, що річний дохід жителів міста можна описати випадковою величиною X, яка має нормальний розподіл із середнім значенням $(M + N + 5)$ тис. грн та стандартним відхиленням $(2 + (-1)^{M+N})$ тис. грн. Записати щільність розподілу випадкової величини X та побудувати її графік. Знайти ймовірність, що навмання вибраний житель міста має дохід: а) вище середнього по місту; б) від $(M + 1)$ тис. грн до $(M + N + 2)$ тис. грн; в) менше ніж $(M + N + 10)$ тис. грн. Оцінити відсоток жителів міста, річний дохід яких вдвічі вищий середнього по місту. Який найменший річний дохід 10 % найзаможніших жителів міста?

Завдання 6

Кількість працівників кафе, які працюють неповний робочий день, можна вважати випадковою величиною X із нормальним розподілом. За вибіркою

x_i	0	1	2	3	4	5
n_i	$2 + (-1)^M$	$4 + 2(-1)^{M+1}$	$10 + 3(-1)^{M-1}$	$12 + 3(-1)^N$	$5 + 2(-1)^{N+1}$	$2 + (-1)^{N-1}$

а) побудувати полігон частот, емпіричну функцію розподілу та її графік;

б) обчислити вибіркові числові характеристики: середнє, дисперсію, моду і медіану;

в) знайти незсунені точкові оцінки параметрів генеральної сукупності: математичного сподівання і дисперсії;

г) побудувати довірчий інтервал для середньої кількості працівників, які працюють неповний робочий день, із надійністю 0,95.

Завдання 7

Відомі ціни продажу однотипних квартир (тис. у. о.). За рівнем значущості $\alpha = 0{,}05$ перевірити гіпотезу, що ціна квартири $x_0 = 25{,}5$ (тис. у. о.) статистично відрізняється від цін на квартири, які наведені нижче.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
$24{,}1 + 0{,}1(-1)^M$	$23{,}8 + 0{,}2(-1)^{M+1}$	$23{,}5 + 0{,}3(-1)^{M-1}$	$23{,}4 + 0{,}1(-1)^N$	$23{,}3 + 0{,}2(-1)^{N+1}$	$23{,}2 + 0{,}3(-1)^{N-1}$

Завдання 8

За вибіркою із 100 робітників побудований інтервальний варіаційний ряд для їх заробітної плати у гривнях і розраховані вибіркові середнє та стандартне відхилення. Висунута гіпотеза, що розподіл заробітної плати є нормальним і розраховані теоретичні частоти попадання у відповідні інтервали варіаційного ряду, вважаючи параметри нормального розподілу рівними їх оцінкам за вибіркою.

Інтервали	Вибіркові частоти	Теоретичні частоти
менше 500	$7 + 2(-1)^M$	$5 + (-1)^{M-1}$
від 500 до 600	$13 + 2(-1)^{M+1}$	$12 + (-1)^M$
від 600 до 700	$17 + 3(-1)^{M+N}$	$16 + 3(-1)^{M+N+1}$
від 700 до 800	$41 + 3(-1)^{M+N-1}$	$44 + 3(-1)^{M+N}$
від 800 до 900	$14 + (-1)^N$	$16 + 2(-1)^{N-1}$
більше 900	$8 + (-1)^{N+1}$	$7 + 2(-1)^N$

За рівнем значущості $\alpha = 0{,}05$ за допомогою критерію Пірсона перевірити гіпотезу про нормальний розподіл заробітної плати.

Завдання 9

Припускаючи, що кореляційна залежність нормально розподілених випадкових величин X – кількість юридичних осіб засновників та Y – статутний капітал комерційних банків (млн грн), лінійна, за результатами спостережень, наведеними нижче:

X	$M + 1$	$M + 2$	$M + 4$	$M + 7$	$M + 8$
Y	$N + 10 + (-1)^N$	$N + 10 + 2(-1)^{N-1}$	$N + 10 + 3(-1)^N$	$N + 10 + 4(-1)^{N-1}$	$N + 10 + 5(-1)^N$

Знайти:

а) вибірковий коефіцієнт кореляції;

б) вибіркові оцінки коефіцієнтів лінійної регресії Y на X;

в) побудувати у системі координат на площині вибіркові точки і вибіркову пряму регресії Y на X.

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

Контрольна робота 1

I. По змісту завдань контрольної роботи 1

Задача 1. Написати рівняння прямої, що проходить через середину відрізка AB перпендикулярно до нього, якщо A(2; 3), B(6; 7).

Розв'язання. Нехай точка C така, що AC = BC. Тоді:

$$X_C = \frac{X_A + X_B}{2} = \frac{2+6}{2} = 4; \qquad Y_C = \frac{Y_A + Y_B}{2} = \frac{3+7}{2} = 5;$$

отже, C(4; 5) – середина відрізка AB. Кутовий коефіцієнт прямої AB дорівнює: $K_{AB}=\frac{Y_B-Y_A}{X_B-X_A}=\frac{7-3}{6-2}=1$.

За умовами, шукана пряма проходить через точку C перпендикулярно до AB і тому у рівнянні $y-y_0=k(x-x_0)$ покладаємо $x_0=4$; $y_0=5$; $k=-1/k_{AB}=-1$; одержуємо $y-5=-(x-4)$, тобто $x+y-9=0$ рівняння шуканої прямої.

Задача 2. Розв'язати систему лінійних рівнянь матричним способом:

$$\begin{cases} X_1+2X_2+3X_3=14 \\ X_1+X_2-X_3=0 \\ X_1-X_2+X_3=2 \end{cases} . \qquad (1)$$

Розв'язання. Знаходимо визначник:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&2&3\\1&1&-1\\1&-1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&0&0\\1&-1&1\end{vmatrix}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2&3\\-1&1\end{vmatrix}=-2\cdot(2+3)=-10.$$

Для розв'язання цієї системи лінійних рівнянь матричним способом чинимо так: спочатку знаходимо обернену матрицю до матриці:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}, \text{ тобто матрицю } A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix},$$

де $A_{IJ}=(-1)^{I+J}\cdot M_{IJ}$ – алгебраїчне доповнення елемента a_{ij} і M_{ij} – його мінор. Маємо:

$A_{11}=\begin{vmatrix}1&-1\\-1&1\end{vmatrix}=0$; $A_{21}=-\begin{vmatrix}2&3\\-1&1\end{vmatrix}=-5$; $A_{31}=\begin{vmatrix}2&3\\1&-1\end{vmatrix}=-5$;

$A_{12}=\begin{vmatrix}1&-1\\1&1\end{vmatrix}=-2$; $A_{22}=\begin{vmatrix}1&3\\1&1\end{vmatrix}=-2$; $A_{32}=\begin{vmatrix}1&3\\1&-1\end{vmatrix}=4$;

$A_{13}=\begin{vmatrix}1&1\\1&-1\end{vmatrix}=-2$; $A_{23}=-\begin{vmatrix}1&2\\1&-1\end{vmatrix}=3$; $A_{33}=\begin{vmatrix}1&2\\1&1\end{vmatrix}=-1$.

Таким чином, $A^{-1}=-\frac{1}{10}\begin{pmatrix}0&-5&-5\\-2&-2&4\\-2&3&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0,5&0,5\\0,2&0,2&-0,4\\0,2&-0,3&0,1\end{pmatrix}$, оскільки:

$A\cdot A^{-1}=E$, тобто $\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0,5&0,5\\0,2&0,2&-0,4\\0,2&-0,3&0,1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, то обернена матриця знайдена правильно. Систему (1) можна записати в матричному вигляді, а саме:

$A\cdot X=B$, де $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}$; $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ і $B=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}$, тоді

$X=A^{-1}\cdot B$ – розв'язок цієї системи. Маємо:

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0,5&0,5\\0,2&0,2&-0,4\\0,2&-0,3&0,1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}14\\0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\cdot14+0,5\cdot0+0,5\cdot2\\0,2\cdot14+0,2\cdot0-0,4\cdot2\\0,2\cdot14-0,3\cdot0+0,1\cdot2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},$$

звідки $X_2=1$; $X_2=2$; $X_3=3$.

Задача 3. Дано вектори: $\vec{a}=2\vec{\imath}+3\vec{j}-\vec{k}$ і $\vec{b}=3\vec{\imath}+7\vec{j}+4\vec{k}$. Знайти: 1) скалярний добуток; 2) векторний добуток цих векторів.

Розв'язання. Оскільки скалярний добуток – це число рівне: $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y+a_zb_z$, то $\vec{a}\cdot\vec{b}=2\cdot3+3\cdot7+(-1)\cdot4=23$ – шуканий скалярний добуток даних векторів.

Векторний добуток $\vec{a}$ і $\vec{b}$ представляє собою вектор $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$ координати якого є, відповідно, розкладом по першому ряду визначника:

$$\vec{c}=\begin{vmatrix}\vec{\imath}&\vec{j}&\vec{\kappa}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_y&a_z\\b_y&b_z\end{vmatrix}\cdot\vec{\imath}-\begin{vmatrix}a_x&a_z\\b_x&b_z\end{vmatrix}\cdot\vec{j}+\begin{vmatrix}a_x&a_y\\b_x&b_y\end{vmatrix}\cdot\vec{\kappa}.$$

За умовою, $\begin{matrix}\vec{a}=(2;3;-1)\\ \vec{b}=(3;7;4)\end{matrix}\Rightarrow\vec{c}=19\vec{\imath}-11\vec{j}+5\vec{\kappa}$.

Задача 4. Знайти границі.

1) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+5x-6}{x^3-1}$; 2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin8x}{\sin7x}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^5+5x^4+x^2+3}{7x^5+x+10}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+5}{x+3}\right)^{4x}$.

Розв'язання.

$$1)\lim_{x\to 1}\frac{x^2+5x-6}{x^3-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\cdot(x+6)}{(x-1)\cdot(x^2+x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+6}{x^2+x+1}=\frac{1+6}{1+1+1}=\frac{7}{3};$$

$$2)\lim_{x\to 0}\frac{\sin 8x}{\sin 7x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 8x}{8x}\cdot 8x}{\frac{\sin 7x}{7x}\cdot 7x}=\frac{8}{7}\cdot\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 8x}{8x}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{7x}}=\frac{8}{7};$$

$$3)\lim_{x\to\infty}\frac{x^5+5x^4+x^2+3}{7x^5+x+10}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{5}{x}+\frac{1}{x^3}+\frac{3}{x^5}}{7+\frac{1}{x^4}+\frac{10}{x^5}}=\frac{1}{7};$$

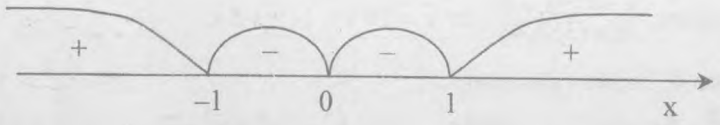
$$4)\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+5}{x+3}\right)^{4x}=\lim\left(1+\frac{2}{x+3}\right)^{4x}=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e\cong 2{,}72\right]=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{x+3}\right)^{\frac{x+3}{2}}\right]^{\frac{2}{x+3}\cdot 4x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8x}{x+3}}=e^{8}.$$

Задача 5. Дослідити методами диференціального числення та побудувати графік функції: $y=\dfrac{x^2}{x^2-1}$.

Розв'язання. Область визначення функції:
$x\in(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty)$; адже при $x^2-1=0$ ця функція не існує і тому $x\neq\pm 1$. Далі $f(x)=f(-x)$ – функція – парна, її графік симетричний відносно вісі ОУ.

$$y=\frac{x^2}{x^2-1}\geq 0\Rightarrow x^2(x-1)\cdot(x+1)\geq 0.$$



Тобто при $x\in(-\infty;-1)$ графік функції розміщений над віссю ОХ при $x\in(-1;1)$ – він розміщений під прямою $y=0$ і при $x\in(1;+\infty)$ – над прямою ОХ. Оскільки $\lim\limits_{x\to\pm 1}\frac{x^2}{x^2-1}=\pm\infty$, то $x=1$ і $x=-1$ – вертикальні асимптоти досліджуваної функції, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{x^2}}=1\Rightarrow y=1$ – рівняння горизонтальної асимптоти функції. Похилих асимптот $y=kx+b$, ця функція не має:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2-1}=0.$$

Далі знаходимо інтервали зростання, спадання функції і разом з тим можливий її екстремум.

$$y'=f'(x)=\left(\frac{x^2}{x^2-1}\right)'=\frac{2x(x^2-1)-x^2\cdot 2x}{(x^2-1)^2}=-\frac{2x}{(x^2-1)^2}=0,\ \text{при } x=0.$$

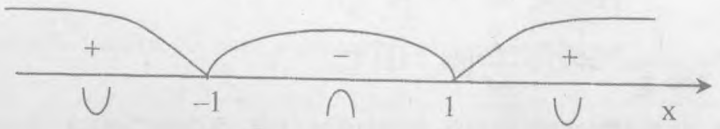
Тоді $x=0$ – критична точка. $f'(x<0)>0\rightarrow$ функція зростає, $f'(x>0)<0$ – функція спадає.

У точці $x=0$ – екстремум функції, а саме максимум: $f(0)=0$.

Тепер досліджуємо функцію на опуклість та вгнутість. Маємо:

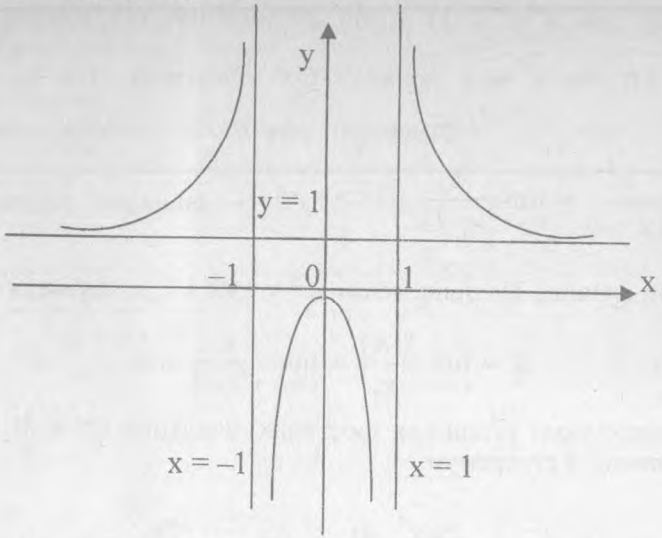
$$y''=\left(-\frac{2x}{(x^2-1)^2}\right)'=\frac{-2(x^2-1)^2+2x\cdot 2(x^2-1)2x}{(x^2-1)^4}=\frac{6x^2+2}{(x^2-1)^3}.$$

Знайдемо точки, в яких $y''=0$ або y'' не існує:
$x=\pm 1$ – критичні точки II-го роду (точки розриву).



При $x\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$ – функція вігнута, при $x\in(-1;1)$ – функція опукла. Точок перегину графік функції не має.

Побудуємо графік функції:



Задача 6. Знайти інтеграли:

1. $\int \frac{x^2 dx}{x^6 + 25}$; 2. $\int x \cdot e^{8x} dx$.

Розв'язання.

$$1.\ \int \frac{x^2 dx}{x^6+25} = \left[\begin{array}{ll} \text{Нехай } x^3 = t, \Rightarrow & 3x^2 dx = dt \\ x^6 + 25 = t^2 + 25; & x^2 dx = \frac{1}{3} dt \end{array}\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t^2+25} = \frac{1}{15}\operatorname{arctg}\frac{t}{5} + C = \frac{1}{15}\operatorname{arctg}\frac{x^3}{5} + C.$$

$$2.\ \int x e^{8x} dx = \left[\begin{array}{ll} \int u dv = uv - \int v du & \\ u = x & du = dx \\ dv = e^{8x} dx & v = \frac{1}{8} e^{8x} \end{array}\right] = \frac{x}{8} e^{8x} - \frac{1}{8}\int e^{8x} dx =$$

$$= \frac{x}{8} e^{8x} - \frac{1}{8 \cdot 8} e^{8x} + C = \frac{e^{8x}}{64}(8x - 1) + C.$$

При знаходженні цього інтеграла ми скористалися формулою інтегрування за частинами.

Задача 7. Знайти визначений інтеграл $\int_0^{0,3} \sin x dx$ з точністю до 0,001.

Розв'язання. За формулою Маклорена маємо:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

$$\int_0^{0,3} \sin x dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4 \cdot 3!} + \frac{x^6}{6 \cdot 5!} - \frac{x^8}{8 \cdot 7!} + \ldots\right) =$$

$$= \frac{9}{200} - \frac{81}{10^4 \cdot 24} + \frac{729}{10^6 \cdot 720} - \ldots \cong \frac{9}{200} = 0{,}045.$$

За наслідками теореми Лейбніца точність знаходження суми знакозмінного ряду є найменшою першого взятого за абсолютною величиною відкритого члена ряду і становить 0,001.

Задача 8. Знайти перших три члена розкладу в ряд Маклорена функції $y = e^x \sin x$.

Розв'язання: Ряд Маклорена розкладу функції $y = f(x)$, має вигляд:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}_{(0)}}{n!} x^n + \ldots.$$

Тому знаходимо значення похідних у точці $x = 0$.

$$f(0) = e^x \sin x \qquad f(0) = 0$$

$$f'(x) = e^x \sin x + e^x \cos x \qquad f'(0) = 1$$

$$f''(0) = f'(0) + e^x \cos - e^x \sin x \qquad f''(0) = 2$$

$$f'''(0) = f''(0) + e^x \cos - e^x \sin x - f'(x) \qquad f'''(0) = 2$$

Таким чином, $e^x \sin x = x + x^2 + \frac{1}{3} x^3 + \ldots.$

Задача 9. Знайти область збіжності степеневого ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{n^2+1} = \frac{x}{2} + \frac{2x^2}{5} + \frac{3x^3}{10} + \ldots + \frac{nx^n}{n^2+1} + \ldots.$$

Розв'язання. Знаходимо радіус збіжності цього ряду за формулою:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|, \text{ де } a_n = \frac{n}{n^2+1} \text{ і } a_{n+1} = \frac{n+1}{(n+1)^2+1} \text{ і маємо:}$$

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{n\left((n+1)^2+1\right)}{\left(n^2+1\right)\cdot(n+1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^3+2n^2+2n}{n^3+n^2+n+1} = 1.$$

Отже, ряд збігається при всіх $x \in (-1; 1)$. Досліджуємо збіжність ряду на кінцях цього інтервалу; при $x = 1$ одержуємо ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1} \approx \frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\frac{3}{10}+\ldots+\frac{n}{n^2+1}+\ldots.$$

Відомо, що гармонічний ряд: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \approx 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$ є розбіжним. Оскільки $\frac{n}{n^2+1} \geq \frac{n}{n^2+n^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}$ за ознакою порівняння рядів і ряд: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}$ не має кінцевої суми, він також є розбіжним рядом. Далі, при $x = -1$ маємо знакозмінний ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot(-1)}{n^2+1} = -\frac{1}{2}+\frac{2}{5}-\frac{3}{10}+\ldots+\frac{(-1)^n\cdot n}{n^2+1}+\ldots.$$

Цей ряд має вигляд: $\frac{1}{2} > \frac{2}{5} > \frac{3}{10} > \ldots$ і $\lim_{n\to 0}\frac{n}{n^2+1} = 0.$

І тому, згідно з теоремою Лейбніца, такий ряд збігається, він має конкретну і кінцеву суму ($S = \text{const}$). Отже, досліджуваний степеневий ряд збігається при $x \in [-1; 1)$.

Задача 10. Знайти розв'язок диференціального рівняння:

$$3y'' + 5y - 8y = 0;\ y(0) = 3,\ y'(0) = 5.$$

Розв'язання. Складаємо відповідне до цього рівняння характеристичне рівняння: $3k^2 + 5k - 8 = 0$, звідки $k_1 = 1$ і $k_2 = -8/3$, оскільки $k_1 \neq k_2$, то одержуємо загальний розв'язок цього рівняння, яке має вигляд:

$$y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x} = C_1e^{x} + C_2e^{-\frac{8}{3}x},$$

де $C_1 = \text{const}$; $C_2 = \text{const}$.

Тепер для одержання конкретних значень C_1 і C_2 використовуємо початкові умови при: $x=0$ $y=3$ і $y'=5$.

Оскільки $y' = C_1e^{x} - \frac{8}{3}C_2e^{-\frac{8}{3}x}$, то при $x = 0$ маємо систему, відносно невідомих C_1 і C_2, двох лінійних рівнянь: $\begin{cases} C_1 + C_2 = 3 \\ C_1 - \frac{8}{3}C_2 = 5 \end{cases}$.

Звідки $C_1 = 39/11$ і $C_2 = -6/11$, і тому $y = \frac{39}{11}e^{x} - \frac{6}{11}e^{-\frac{8}{3}x}$ – розв`язок диференціального рівняння, що задовольняє початкові умови.

Контрольна робота 2

Задача 1. У тролейбусному парку є три машини № 1 і дві машини № 2. Яка ймовірність, що перші дві машини, які вийшли з парку, мають № 1?

Розв'язання. Позначимо події: A – перша машина має № 1; B – друга машина має № 1; C – перші дві машини мають № 1. Тоді $P(A) = \frac{3}{5}$. Якщо відомо, що подія A відбулася, то в парку залишилось чотири машини – по дві кожного номера. Тому умовна ймовірність, що друга машина має № 1, у цьому випадку дорівнює $P(B/A) = \frac{2}{4}$. Отже, за формулою множення ймовірностей залежних подій маємо:

$$P(C) = P(AB) = P(A)P(B/A) = \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4} = 0{,}3.$$

Задача 2. Ймовірність попадання з однієї гармати 0,8, а з другої – 0,7. Знайти ймовірність принаймні одного попадання при залпі з двох гармат.

Розв'язання. Позначимо події: A – влучила перша гармата; B – влучила друга гармата; C – принаймні одне попадання. Зрозуміло, що A і B – незалежні, але сумісні події. За формулою додавання ймовірностей сумісних подій: $P(C) = P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$. За формулою множення ймовірностей незалежних подій маємо:

$$P(C) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) = 0{,}8 + 0{,}7 - 0{,}8\cdot 0{,}7 = 0{,}94.$$

Розглянемо інший спосіб розв'язання. Ймовірність появи принаймні однієї події можна обчислити переходом до протилежної події. Події

$C = A + B$ і $\overline{C} = \overline{A} \cdot \overline{B}$ протилежні. Тому $P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - P(\overline{A} \cdot \overline{B})$. Враховуючи незалежність протилежних подій $\overline{A}$ і $\overline{B}$, за формулою множення ймовірностей незалежних подій маємо:

$$P(C) = 1 - P(\overline{A})P(\overline{B}) = 1 - (1 - 0{,}8)(1 - 0{,}7) = 0{,}94 .$$

Задача 3. В умовах задачі 1 про тролейбусний парк обчислити ймовірність, що другою вийшла машина № 2.

Розв'язання. Позначимо події: D – друга машина має № 2; H_1 – перша машина має № 1; H_2 – перша машина має № 2. Тоді за формулою повної ймовірності маємо:

$$P(D) = P(H_1)P(D/H_1) + P(H_2)P(D/H_2) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = 0{,}4 .$$

Задача 4. Два верстата-автомата виробляють однакові деталі, які надходять на спільний конвеєр. Продуктивність першого верстата в 4 рази вища за продуктивність другого. Перший верстат у середньому виробляє 30 % деталей відмінної якості, а другий – 80 %. Навмання взята деталь виявилася відмінної якості. Знайти ймовірність, що цю деталь виготовлено на другому верстаті.

Розв'язання. Позначимо події: A – деталь відмінної якості; H_1 – деталь виготовлено на першому верстаті; H_2 – деталь виготовлено на другому верстаті. Тоді за умовою задачі:

$$P(H_1) = \frac{4}{5} = 0{,}8 ; \; P(A/H_1) = \frac{30}{100} = 0{,}3 ;$$

$$P(H_2) = \frac{1}{5} = 0{,}2 ; \; P(A/H_2) = \frac{80}{100} = 0{,}8 .$$

Ймовірність, що виготовлена деталь відмінної якості, обчислимо за формулою повної імовірності:

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) = 0{,}8 \cdot 0{,}3 + 0{,}2 \cdot 0{,}8 = 0{,}4 .$$

За формулою Баєса маємо ймовірність, що деталь відмінної якості виготовлено на другому верстаті:

$$P(H_2/A) = \frac{P(H_2)P(A/H_2)}{P(A)} = \frac{0{,}2 \cdot 0{,}8}{0{,}4} = 0{,}4 .$$

Одержаний результат можна поясніть таким чином: серед деталей відмінної якості 40 % складають деталі, які виготовлені на другому верстаті.

Задача 5. Схожість зерна становить 90 %. Знайти ймовірність, що з п'яти посіяних зернин проросте не менше чотирьох.

Розв'язання. Це схема повторних незалежних випробувань Бернуллі. Будемо вважати, що випробування – це пророщування зернини, кількість випробувань $n = 5$. Подія A (успіх) – зерно проросло, $p = 0{,}9$, $q = 0{,}1$. Тоді за формулою Бернуллі $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, $(k = 0, 1, ..., n)$ ймовірність, що з п'яти посіяних зернин проросте не менше чотирьох, дорівнює:

$$P_5(k \geq 4) = P_5(4, 5) = P_5(4) + P_5(5) = C_5^4(0{,}9)^4(0{,}1)^{5-4} + C_5^5(0{,}9)^5(0{,}1)^{5-5} =$$

$$= 0{,}33 + 0{,}59 = 0{,}92 .$$

Задача 6. Серед виготовлених деталей в середньому 0,5 % браку. Яка ймовірність, що в партії з 10 000 деталей 40 бракованих деталей?

Розв'язання. Це схема повторних незалежних випробувань Бернуллі. Вважатимемо, що випробування – це перевірка якості деталі, кількість випробувань $n = 10\,000$. Подія A (успіх) – деталь бракована, $p = 0{,}005$, $q = 0{,}995$, $k = 40$, $npq = 10000 \cdot 0{,}005 \cdot 0{,}995 = 49{,}75 > 10$. Тоді можна застосувати локальну теорему Муавра-Лапласа, наслідком якої є наближена формула $P_n(k) \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}$, де $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$, $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$. За умовою задачі:

$$x \approx \frac{40 - 10000 \cdot 0{,}005}{\sqrt{49{,}75}} = -1{,}42 ; \; P_{10000}(40) \approx \frac{\varphi(-1{,}42)}{\sqrt{49{,}75}} = \frac{0{,}1456}{7{,}05} = 0{,}0206 .$$

Значення функції $\varphi(x)$ знайдемо за таблицею ([21], дод. 1). Точна формула Бернуллі дає ймовірність 0,0214 (похибка становить 3,7 %).

Задача 7. В умовах задачі 6 знайти ймовірність, що в партії буде не більше 40 бракованих деталей.

Розв'язання. Можна застосувати інтегральну теорему Муавра-Лапласа, наслідком якої є наближена формула $P_n(k_1; k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$, де $x_i = \frac{k_i - np}{\sqrt{npq}}$, $\Phi(x) = \int_0^x \varphi(t)dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)dt$ – непарна функція Лапласа. Позначимо $k_1 = 0$, $k_2 = 40$ і обчислимо:

$$x_1 = \frac{0 - 10000 \cdot 0{,}005}{\sqrt{49{,}75}} \approx -7{,}1 ; \; x_2 = \frac{40 - 10000 \cdot 0{,}005}{\sqrt{49{,}75}} \approx -1{,}42 .$$

За інтегральною формулою Муавра-Лапласа і таблицею ([21], дод. 2) маємо:

$$P_{10000}(0;40) \approx \Phi(-1,42) - \Phi(-7,1) = \Phi(7,1) - \Phi(1,42) = 0,5 - 0,4222 = 0,08 .$$

Значення функції Лапласа знайдемо за таблицею ([21], дод. 2).

Задача 8. Бракованих свердел приблизно 1 %. Їх пакують в пачки по 100 штук. Знайти ймовірність, що в пачці буде не більше одного бракованого свердла.

Розв'язання. Це схема повторних незалежних випробувань Бернуллі. Будемо вважати, що випробування – це перевірка якості свердла з пачки, кількість випробувань $n = 100$. Подія A (успіх) – свердло браковане, $p = 0,01$, $\lambda = np = 0,01 \cdot 100 = 1 < 10$. Тому можна застосувати теорему Пуассона, з якої випливає наближена формула:

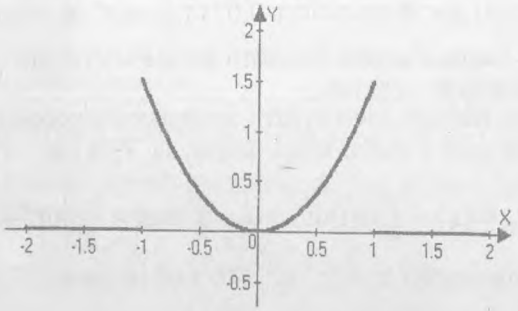
$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \; k = 0, 1, 2, ..., n ,$$

де $\lambda = np$ – середня кількість успіхів у n випробуваннях. За цією формулою ймовірність, що в пачці буде не більше одного бракованого свердла, дорівнює:

$$P_n(k \le 1) = P_{100}(0) + P_{100}(1) \approx \frac{1^0}{0!} e^{-1} + \frac{1^1}{1!} e^{-1} = 2e^{-1} = 0,736 .$$

Задача 9. Щільність розподілу випадкової величини X має вигляд:

$$p(x) = \begin{cases} Cx^2, & x \in (-1;1) \\ 0, & x \notin (-1;1) \end{cases}.$$



а) знайти коефіцієнт C; б) скласти функцію розподілу.

Розв'язання. Обчислимо інтеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = \int_{-1}^{1} Cx^2 dx = 2C\int_{0}^{1} x^2 dx = \frac{2C}{3}.$$

За властивістю щільності розподілу $\frac{2C}{3} = 1$, тому $C = 1,5$.

Якщо $x \le -1$, то $F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)dt = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0$.

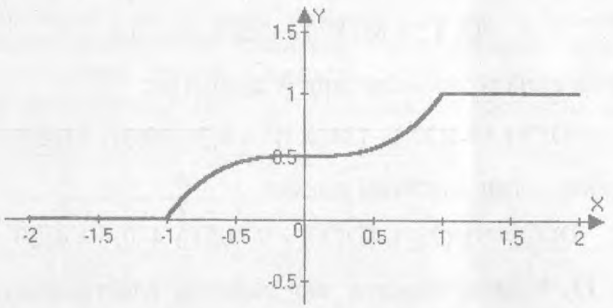
Якщо $-1 < x \le 1$, то $F(x) = \int_{-\infty}^{-1} 0dt + \int_{-1}^{x} 1,5t^2 dt = 0,5(x^3 + 1)$.

Якщо $x > 1$, то $F(x) = \int_{-\infty}^{-1} 0dt + \int_{-1}^{1} 1,5t^2 dt + \int_{1}^{x} 0dt = 1$.

Отже, функція розподілу має вигляд:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1 \\ 0,5(x^3 + 1), & -1 < x \le 1. \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

Її графік має вигляд:



Задача 10. Обчислити математичне сподівання випадкової величини $Z = 3X - 2Y$, якщо випадкова величина X має розподіл

X	0	1
P	0,7	0,3

.

Щільність розподілу випадкової величини Y має вигляд:

$$p(x) = \begin{cases} 1,5x^2, & x \in (-1;1) \\ 0, & x \notin (-1;1) \end{cases}.$$

Розв'язання. Обчислимо математичне сподівання неперервної випадкової величини Y:

$$M(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx = \int_{-1}^{+1} 1{,}5x^3 dx = 0.$$

Математичне сподівання дискретної випадкової величини X дорівнює $M(X) = \sum x_i p_i = 0 \cdot 0{,}7 + 1 \cdot 0{,}3 = 0{,}3$. За властивостями математичного сподівання маємо:

$$M(Z) = 3M(X) - 2M(Y) = 3 \cdot 0{,}3 - 2 \cdot 0 = 0{,}9.$$

Задача 11 (продовження задачі 10). Знайдемо дисперсію випадкової величини $Z = 3X - 2Y$, якщо X і Y – незалежні випадкові величини.

Розв'язання. Спочатку обчислимо початковий момент другого порядку випадкової величини Y:

$$M(Y^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x)dx = \int_{-1}^{+1} 1{,}5x^4 dx = 0{,}6.$$

Дисперсію випадкової величини Y обчислимо за розрахунковою формулою:

$$D(Y) = M(Y^2) - (M(Y))^2 = 0{,}6.$$

Дисперсія випадкової величини X дорівнює:

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = 0{,}3 - (0{,}3)^2 = 0{,}21.$$

За властивостями дисперсії маємо:

$$D(Z) = 9D(X) + 4D(Y) = 9 \cdot 0{,}21 + 4 \cdot 0{,}6 = 4{,}29.$$

Задача 12. Можна вважати, що значення електричного опору елемента мають нормальний розподіл і зосереджені на інтервалі (2,72; 2,84). Якісним вважається елемент відмінної якості, якщо його опір не менше 2,75 і не більше 2,8. Знайти відсоток опорів відмінної якості серед усіх виготовлених.

Розв'язання. За правилом трьох сигм практично вірогідно, що відхилення нормальної випадкової величини від її середнього значення не перевищить трьох стандартних відхилень. Тому можна вважати $6\sigma = 2{,}84 - 2{,}72$, звідки $\sigma = 0{,}02$. Також можна вважати, що середнє значення опору дорівнює середині інтервалу можливих

значень: $\mu = \frac{2{,}72 + 2{,}84}{2} = 2{,}78$. Для нормальної випадкової величини ймовірність попадання в заданий інтервал можна знайти за формулою:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - \mu}{\sigma}\right).$$

Тоді ймовірність опору відмінної якості дорівнює

$$P(2{,}75 < X < 2{,}8) = \Phi\left(\frac{2{,}8 - 2{,}78}{0{,}02}\right) - \Phi\left(\frac{2{,}75 - 2{,}78}{0{,}02}\right) =$$

$$= \Phi(1) - \Phi(-1{,}5) = 0{,}3413 + 0{,}4332 = 0{,}7745.$$

Отже, опорів відмінної якості серед усіх виготовлених приблизно 77,5 %.

Задача 13. Для вибірки X обчислимо вибіркове середнє, вибіркову і виправлену дисперсію.

x_i	55,5	58,5	61,5	64,5	67,5	70,5	73,5	76,5	79,5
n_i	5	6	11	9	16	20	6	3	2

Розв'язання. Оскільки варіанти рівновіддалені із кроком h =3, то для обчислення вибіркових числових характеристик можна застосувати метод умовних варіант. Складемо розрахункову таблицю, де за уявний нуль вибрано варіанту C =67,5, яка розташована посередині варіаційного ряду.

x_i	n_i	u_i	$u_i n_i$	$u_i^2 n_i$
55,5	5	–4	–20	80
58,5	6	–3	–18	54
61,5	11	–2	–22	44
64,5	9	–1	–9	9
67,5	16	0	0	0
70,5	20	1	20	20
73,5	6	2	12	24
76,5	3	3	9	27
79,5	2	4	8	32
Σ	78		–20	290

Обчислимо умовні вибіркові моменти:

$$M_1^* = \frac{\sum u_i n_i}{n} = \frac{-20}{78} = -0{,}26, \quad M_2^* = \frac{\sum u_i^2 n_i}{n} = \frac{290}{78} = 3{,}72.$$

Тоді вибіркове середнє дорівнює $\bar{x} = M_1^* h + C = -0,26 \cdot 3 + 67,5 = 66,7$, а вибіркова дисперсія $D_в = (M_2^* - (M_1^*)^2)h^2 = (3,72 - (-0,26)^2)3^2 = 32,87$.

Отже, виправлена вибіркова дисперсія дорівнює $s_x^2 = \frac{78}{78-1} 32,87 = 33,30$, а вибіркове стандартне відхилення $s_x = \sqrt{33,30} = 5,8$.

Задача 14 (продовження задачі 13). Побудуємо за вибіркою X довірчі інтервали для генерального середнього і середнього квадратичного відхилення з надійною ймовірністю $\gamma = 0,95$, вважаючи розподіл генеральної сукупності нормальним.

Розв'язання. Довірчий інтервал, який накриває невідоме генеральне середнє μ з імовірністю γ задається нерівністю:

$$\bar{x} - t\frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + t\frac{s}{\sqrt{n}},$$

де число t – визначається за таблицею ([21], дод. 3). За таблицею $t = t(0,95; 78) = 1,991$, тому гранична похибка вибіркового середнього $\Delta = \frac{ts}{\sqrt{n}} = \frac{1,991 \cdot 5,8}{\sqrt{78}} = 1,3$ і довірчий інтервал для генерального середнього ознаки X з надійною імовірністю $\gamma = 0,95$ має вигляд:

$$66,7 - 1,3 < \mu < 66,7 + 1,3 \text{ або } 65,4 < \mu < 68,0.$$

Довірчий інтервал, який накриває невідоме генеральне середнє квадратичне відхилення σ з імовірністю γ, задається нерівністю:

$$s(1-q) < \sigma < s(1+q),$$

де число q – визначається за таблицею ([21], дод. 4). За таблицею $q = q(0,95; 78) = 0,161$. Тому довірчий інтервал для середнього квадратичного відхилення ознаки X з надійною ймовірністю $\gamma = 0,95$ має вигляд:

$$5,8(1-0,161) < \sigma < 5,8(1+0,161) \text{ або } 4,8 < \sigma < 6,7.$$

Задача 15. Порівнювали вагу дорослих індичок двох порід після однакового відкорму. За вибірками одержали такі показники: $n_1 = 20$, $\bar{x} = 4,0$ кг, $s_x = 0,3$ кг, $n_2 = 25$, $\bar{y} = 4,6$ кг, $s_y = 0,4$ кг. За рівнем значущості $\alpha = 0,05$ перевіримо гіпотезу про рівність середніх $H_0 : \mu_x = \mu_y$ проти альтернативної гіпотези $H_1 : \mu_x < \mu_y$.

Розв'язання. Спочатку перевіримо гіпотезу про рівність дисперсій $H_0' : \sigma_x^2 = \sigma_y^2$ проти альтернативної гіпотези $H_1' : \sigma_x^2 < \sigma_y^2$. Обчислимо значення статистики $F_{факт} = \frac{s_y^2}{s_x^2} = \frac{0,16}{0,09} = 1,78$, як відношення більшої вибіркової дисперсії до меншої. Вона має розподіл Фішера з $k_1 = n_1 - 1$ і $k_2 = n_2 - 1$ степенями свободи. За таблицею ([30], табл. 10) для $\alpha = 0,05$ і кількості степенів свободи $k_1 = 25 - 1 = 24$ і $k_2 = 20 - 1 = 19$, знаходимо критичну точку розподілу Фішера $F_{кр} = 2,39$. Оскільки $F_{факт} < F_{кр}$, то немає підстав відхилити гіпотезу про рівність дисперсій.

Тепер перевіримо гіпотезу про рівність середніх. Критерій будується за допомогою статистики

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\left(\left(\frac{(n_1-1)s_x^2 + (n_2-1)s_y^2}{n_1 + n_2 - 2}\right)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)\right)}},$$

яка має розподіл Ст'юдента з $k = n_1 + n_2 - 2$ степенями свободи. Обчислимо фактичне значення статистики:

$$t_{факт} = \frac{4,0 - 4,6}{\sqrt{\left(\left(\frac{(20-1)\cdot 0,3^2 + (24-1)\cdot 0,4^2}{20 + 25 - 2}\right)\left(\frac{1}{20} + \frac{1}{25}\right)\right)}} = -5,57.$$

За таблицею ([21], дод. 6) для $\alpha = 0,05$ і кількості степенів свободи $k = 20 + 25 - 2 = 43$ знаходимо односторонню критичну точку розподілу Ст'юдента $t_{кр} = 1,68$. Оскільки $|t_{факт}| > t_{кр}$, то гіпотезу про рівність середніх відхиляємо. Можна вважати, що середня вага індичок першої породи менша за середню вагу індичок другої породи.

Задача 16 (продовження задачі 13). Перевіримо гіпотезу про нормальний розподіл ознаки X для рівня значущості $\alpha = 0,05$.

Розв'язання. Розрахуємо теоретичні частоти нормального розподілу, вважаючи параметри розподілу відомими і рівними їх оцінкам за вибіркою: $\mu = \bar{x} = 66,7$, $\sigma = s = 5,8$. Теоретичні ймовірності p_i попадання випадкової величини X в інтервали (x_i, x_{i+1}) дорівнюють $p_i = \Phi(z_{i+1}) - \Phi(z_i)$, де $\Phi(x)$ – функція Лапласа, а кінці інтервалів

(z_i, z_{i+1}) обчислені за формулами $z_i = (x_i - \mu)/\sigma$, причому найменше значення, тобто z_1, покладаємо рівним $-\infty$, а найбільше рівним $+\infty$. Тоді теоретичні частоти дорівнюють $n'_i = n \cdot p_i$. Результати обчислень оформити за наведеною нижче формою.

i	x_i	x_{i+1}	z_i	z_{i+1}	$\Phi(z_i)$	$\Phi(z_{i+1})$	p_i	n'_i
1	54	57	$-\infty$	–1,69	–0,5000	–0,4545	0,0455	3,55
2	57	60	–1,69	–1,17	–0,4545	–0,3790	0,0755	5,89
3	60	63	–1,17	–0,65	–0,379	–0,2422	0,1368	10,67
4	63	66	–0,65	–0,13	–0,2422	–0,0517	0,1905	14,86
5	66	69	–0,13	0,39	–0,0517	0,1517	0,2034	15,87
6	69	72	0,39	0,91	0,1517	0,3186	0,1669	13,02
7	72	75	0,91	1,43	0,3186	0,4236	0,1050	8,19
8	75	78	1,43	1,95	0,4236	0,4744	0,0508	3,96
9	78	81	1,95	$+\infty$	0,4744	0,5000	0,0256	2,00
Σ							1,0000	78,01

Розглянемо статистику $\chi^2 = \sum \frac{(n_i - n \cdot p_i)^2}{n \cdot p_i}$. Якщо вибірковий розподіл добре узгоджується з теоретичним, то $n_i \approx n \cdot p_i$ і значення статистики χ^2 малі. При великих n можна вважати, що ця статистика має розподіл Пірсона з $k = m - 1$ степенями свободи. Якщо для обчислення ймовірностей p_i за вибіркою оцінювали r параметрів теоретичного розподілу, то кількість степенів свободи становить $k = m - r - 1$. Обчислимо значення $\chi^2_{факт}$, для цього складемо розрахункову таблицю, де об'єднані два перших і два останніх інтервали, частота яких менша 5.

i	n_i	n'_i	$(n_i - n'_i)^2 / n'_i$
1	5	3,55	
2	6	5,89	0,259
3	11	10,67	0,010
4	9	14,86	2,310
5	16	15,87	0,001
6	20	13,02	3,744
7	6	8,19	0,586
8	3	3,96	0,154
9	2	2,00	
$\chi^2_{факт} =$			7,06

За вибіркою оцінювали два параметри нормального розподілу: μ і σ, тому кількість степенів свободи становить $k = m - r - 1 = 7 - 2 - 1 = 4$. Для рівня значущості $\alpha = 0,05$ і $k = 4$ степенів свободи за таблицею ([21], дод. 5) знаходимо критичне значення $\chi^2_{кр} = 9,5$. Оскільки $\chi^2_{факт} < \chi^2_{кр}$, то гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності не відхиляємо.

Задача 17. Складемо вибіркове рівняння прямої лінії регресії Y на X, якщо:

x_i	2	4	6	8	10
y_i	4	6	8	7	10

Розв'язання. Допоміжні обчислення проведемо у нижчеподаній формі:

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	2	4	4	8
2	4	6	16	24
3	6	8	36	48
4	8	7	64	56
5	10	10	100	100
Σ	30	35	220	236

Тоді $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{30}{5} = 6$, $\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{35}{5} = 7$,

$$k = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2} = \frac{236 - 5 \cdot 6 \cdot 7}{220 - 5 \cdot 6^2} = 0,65, \quad b = \bar{y} - k\bar{x} = 7 - 0,65 \cdot 6 = 3,1.$$

Отже, вибіркове рівняння прямої лінії регресії Y на X має вигляд $\bar{y}_x = 0,65x + 3,1$.

ТАБЛИЦЯ ВИБОРУ ВАРІАНТА КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ 1

Передостання цифра залікової книжки	Остання цифра залікової книжки студента									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	6	4	3	9	1	10	2	8	7	5
	16	17	14	13	20	12	18	19	15	11
	24	23	29	28	30	22	21	27	26	25
	35	39	36	31	33	32	38	34	37	40
	46	50	45	41	43	49	42	48	47	44
	51	56	57	54	55	53	60	52	58	59
	66	64	63	69	61	70	62	68	67	65
	74	72	79	78	80	73	71	77	76	75
	85	89	86	81	83	82	88	84	87	90
	96	100	95	91	93	99	92	98	97	94
1	4	1	9	7	5	8	6	10	3	2
	20	12	19	17	16	14	18	13	15	11
	27	21	25	23	22	30	24	26	29	28
	33	37	31	34	40	38	35	32	39	36
	43	45	41	47	50	46	48	44	49	42
	54	56	55	59	58	57	60	52	51	53
	63	62	69	67	66	64	68	70	65	61
	77	71	75	73	72	80	74	76	79	78
	83	87	81	84	90	88	85	82	89	86
	93	95	91	97	100	96	98	94	99	92
2	5	2	9	4	1	6	7	8	3	10
	16	19	12	17	20	15	14	13	18	11
	26	29	22	27	30	25	24	23	28	21
	38	32	39	34	31	37	36	35	33	40
	45	43	44	47	49	46	42	48	41	50
	60	57	56	54	51	52	53	55	58	59
	66	69	62	67	70	65	64	63	68	61
	76	79	72	77	80	75	74	73	78	71
	90	82	89	84	81	87	86	85	83	88
	95	93	94	97	99	98	92	96	91	100
3	5	4	7	3	9	6	2	10	1	8
	16	15	20	14	19	17	11	18	12	13
	26	25	28	24	30	27	22	29	23	21
	31	32	36	33	39	35	38	40	34	37
	45	50	46	41	43	48	47	44	42	49
	54	56	55	60	57	53	52	58	59	51
	66	65	70	64	69	67	61	68	62	63
	76	75	78	74	80	77	72	79	73	71
	81	82	86	83	89	85	88	90	84	87
	95	100	96	91	93	98	97	94	92	99

– © ПУСКУ –

Продовження таблиці вибору варіанта контрольної роботи 1

Передостання цифра залікової книжки	Остання цифра залікової книжки студента									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4	6	5	2	10	1	4	3	8	9	7
	14	20	13	17	15	12	16	18	11	19
	27	25	28	24	29	23	26	22	30	21
	34	33	37	32	38	35	40	36	39	31
	47	50	46	41	45	42	44	48	43	49
	51	59	54	58	53	55	52	57	56	60
	64	70	63	67	65	62	66	68	61	69
	77	75	78	74	79	73	76	72	80	71
	84	83	87	82	88	85	90	86	89	81
	97	100	98	91	95	92	94	96	93	99
5	10	9	8	7	1	5	4	3	2	6
	12	18	19	17	11	15	14	13	20	16
	21	22	23	25	30	26	27	28	29	24
	37	38	36	35	39	33	32	31	40	34
	48	41	46	45	44	49	43	50	47	42
	53	54	55	56	57	60	58	59	52	51
	62	68	69	67	61	65	64	63	70	66
	71	72	73	75	80	76	77	78	79	74
	87	88	86	85	89	83	82	81	90	84
	98	91	96	95	94	99	93	100	97	92
6	9	3	5	6	8	10	7	4	1	2
	20	18	17	14	16	19	11	15	13	12
	21	24	27	22	25	29	23	26	30	28
	35	37	33	39	31	38	36	32	34	40
	48	47	50	44	43	42	46	41	45	49
	51	52	59	55	56	57	53	58	54	60
	70	68	67	64	66	69	61	65	63	62
	71	74	77	72	75	76	73	79	80	78
	85	87	83	89	81	88	86	82	84	90
	98	97	100	94	93	92	96	91	95	99
7	10	6	7	1	9	8	2	3	5	4
	16	17	20	11	19	18	12	13	15	14
	27	26	22	29	23	24	30	28	25	21
	32	39	36	35	34	33	38	40	31	37
	46	41	47	45	48	50	42	44	43	49
	58	56	59	57	60	55	54	53	52	51
	66	67	70	61	69	68	62	63	65	64
	77	76	72	79	73	74	80	78	75	71
	82	89	86	85	84	83	88	90	81	87
	96	91	97	95	98	100	92	94	93	99

– © ПУСКУ –

Продовження таблиці вибору варіанта контрольної роботи 1

Передостання цифра залікової книжки		Остання цифра залікової книжки студента									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	8	8	10	6	9	5	7	1	3	4	2
		17	11	20	16	19	18	12	15	14	13
		21	23	24	22	25	27	30	28	26	29
		36	37	33	38	39	40	35	31	32	34
		46	48	43	47	50	49	45	41	44	42
		54	55	51	60	53	52	56	57	58	59
		67	61	70	66	69	68	62	63	65	64
		71	73	74	72	75	77	80	78	76	79
		86	87	83	88	89	90	85	81	82	84
		96	98	93	97	100	99	95	91	94	92
	9	8	4	10	3	7	5	6	1	2	9
		19	16	11	13	12	14	20	15	17	18
		28	21	29	27	23	22	26	30	25	24
		38	34	36	31	35	37	40	32	33	39
		44	42	47	50	46	45	49	43	48	41
		54	52	57	60	56	55	59	53	58	51
		69	66	61	63	62	64	70	65	67	68
		78	71	79	77	73	72	76	80	75	74
		88	84	86	81	85	87	90	82	83	89
		94	92	97	100	96	95	99	93	98	91

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

До контрольної роботи 1

Основна

1. Барковський В.В., Барковська Н.В. Математика для економістів: Вища математика: Навч. посібн. – К.: НАУ, 1999. – 399 с.
2. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии. – М.: Физматгиз, 1973. – 148 с.
3. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. Т. 1, Т. 2. – М.: Наука, 1976.
4. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа для втузов. – М.: Наука, 1971. – 536 с.
5. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисление. – М.: Наука, 1984. – 417 с.
6. Высшая математика для экономистов: Учеб. пособие / Под ред. Н.Ш. Кремера. – М.: Банки и биржи, ЮНИТИЮ, 1998. – 407 с.
7. Задачи и упражнения по математическому анализу для вузов / Под ред. Б.П. Демидовича. – М.: Наука, 1978. – 425 с.
8. Ильин В.А., Позняк Е.Г. Линейная алгебра. – М.: Наука, 1981. – 361 с.
9. Нічуговська Л.І., Шенгерій Л.М., Шурдук А.І. Вища математика. Теорія ймовірностей та математична статистика. Математичне програмування. Дослідження операцій: Методичні рекомендації. – Полтава: РВВ ПУСКУ, 2003. – 50 с.
10. Пискунов Н.С. Диференциальное и интегральное исчисление. – М.: Наука, 1976. – Т. 1. – 432 с.
11. Привалов И.И. Аналитическая геометрия. – М.: Наука, 1966. – 217 с.

Додаткова

12. Бугір М. Математика для економістів. Лінійна алгебра, лінійні моделі. – К.: Академія, 1998. – 196 с.
13. Карасев А.И. и др. Курс высшей математики для экономических вузов. Часть I. Основы высшей математики / А.И. Карасев, З.М. Аксютина, В.А. Кудрявцев, В.П. Демидович. Краткий курс высшей математики. – М.: Высшая школа, 1975. – 296 с.
14. Кудрявцев В.А., Демидович В.П. Краткий курс высшей математики. – М.: Наука, 1975. – 96 с.
15. Лихолетов И.И. Высшая математика. – Минск: Вышейшая школа, 1976. – 178 с.
16. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике. – М.: Наука, 1969. – 271 с.
17. Пак В.В., Носенко Ю.Л. Высшая математика: Учебник. – Донецк: Сталкер. – 123 с.

До контрольної роботи 2

Основна

18. Барковський В.В., Барковська Н.В. Математика для економістів: Теорія ймовірностей та математична статистика: Навч. посібник. – К.: НАУ, 1999. – 447 с.
19. Венецкий И.Г., Венецкая В.Й. Основные математико-статистические понятия в экономическом анализе. – М.: Статистика, 1974. – 315 с.
20. Венцель Е.С. Теория вероятностей. – М.: Физматгиз, 1962. – 483 с.
21. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высшая школа, 1972. – 400 с.
22. Гмурман В.Е. Руководство по решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высшая школа, 1975. – 479 с.
23. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. – М.: Физматгиз, 1961. – 180 с.
24. Гурский Е.И. Теория вероятностей с элементами математической статистики. – М.: Высшая школа, 1971. – 250 с.
25. Карасев А.И. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Статистика, 1979. – 318 с.

Додаткова

26. Бобков В.Н. Теория вероятностей и элементы математической статистики: Учеб. пособие. – К.: КИИГА, 1993. – 152 с.
27. Вишневский Л.Д. Лекции по теории вероятностей и элементам математической статистики: Уч.-метод. пособ. – К.: КИИГА, 1971. – 280 с.
28. Вероятностные процессы: Метод. указания к решению задач / Л.Д. Вишневский, Т.А. Погребецкая, Г.Л. Тер-Саакянц. – К.: КИИГА, 1983. – 40 с.
29. Коба В.И., Топольницкая К.Ф., Рудь В.Ф. Задачник-практикум по теории вероятностей, математической статистике. – К.: КИИГА, 1971. – 213 с.
30. Колемаев В.А., Староверов О.В., Турундаевский В.Б. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высшая школа, 1991. – 400 с.
31. Случайные события: Методические указания к практическим занятиям / А.О. Антонова, С.М. Хрисанов. – К.: КИИГА, 1989. – 48 с.

– © ПУСКУ –

ЗМІСТ

Вступ 3

Вимоги щодо оформлення контрольних робіт 4

Програма курсу. 5

Основи теорії імовірностей і математичної статистики 8

Контрольна робота 1 10

Контрольна робота 2 17

Методичні рекомендації до розв'язання типових задач 19

Таблиця вибору варіанта контрольної роботи 1 38

Список рекомендованої літератури 41

Ціна 3,39 грн

136 02 04 050 313

Навчально-методичне видання

ШУРДУК Андрій Іванович
ВОВК Людмила Іванівна
ЗЮКОВ Михайло Єгорович
КОШОВА Оксана Петрівна

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Головний редактор ***Деркач Є.А.***
Редактор-коректор ***Карасевич Л.Г.***
Комп'ютерна верстка ***Корніліч О.С.***
Відповідальний секретар ***Слинько Ю.В.***
Технічне забезпечення: ***Грицан Л.І.,***
Безрідна О.В.,
Бойко Т.В.,
Кришко М.С.,
Савіна Н.В.

Здано до редакції 10.01.2005 року. Підписано до друку 22.09.2005 року.
Формат 148×210. Папір 65 г/м². Ум.друк.арк. 2,7 + 0,1 (обкл.).
Тираж 240 прим. Зам. №50/313

РВЦ ПУСКУ

Видано редакційно-видавничим центром ПУСКУ
36014, м. Полтава, вул. Коваля, 3, к. 115, ☎ 8 (0532) 50-24-81
e-mail: rio@ucci.org.ua