НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ КІБЕРНЕТИКИ ім. В.М. ГЛУШКОВА

Н.В. Семенова
Л.М. Колєчкіна

ВЕКТОРНІ ЗАДАЧІ ДИСКРЕТНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ НА КОМБІНАТОРНИХ МНОЖИНАХ: МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ ТА РОЗВ’ЯЗАННЯ

За редакцією академіка НАН України
І.В. Сергієнка

КИЇВ НАУКОВА ДУМКА 2009

УДК 519.85
ББК 22.176
С60

С60 Семенова Н.В., Колєчкіна Л.М.
Векторні задачі дискретної оптимізації на комбінаторних множинах: методи дослідження та розв'язання: Монографія. – Київ: Наукова думка, 2009. – 266 с.

Монографія присвячена розробці та обґрунтуванню математичних моделей та обчислювальних методів розв'язання векторних задач дискретної оптимізації на комбінаторних множинах. Особлива увага приділена дослідженню структурних властивостей допустимої області, критеріального конуса, множин домінування задач. На основі встановленого взаємозв'язку між векторними задачами на комбінаторних множинах і оптимізаційними задачами, визначеними на неперервній допустимій множині, отримано умови оптимальності різних видів ефективних розв'язків. Побудовано та обґрунтовано нові підходи та ефективні методи розв'язання векторних задач на комбінаторних та полікомбінаторних множинах, проведено аналіз обчислювального експерименту.

Монографія розрахована на широке коло читачів-математиків, фахівців з математичного моделювання, кібернетики, теорії та практики векторної та дискретної оптимізації, а також студентів і аспірантів відповідних спеціальностей.

Затверджено до друку вченими радами Інституту кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України від 28 липня 2009 р. (протокол № 9) та Полтавського університету споживчої кооперації України Міністерства освіти і науки України, Укоопспілки від 3 липня 2009 р. (протокол № 6).

Рецензенти: ***Донець Г.П.***, завідувач відділу Інституту кібернетики ім. В.М. Глушкова, доктор фіз.-мат. наук
Лебєдєв Є.О., завідувач кафедри прикладної статистики факультету кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка, доктор фіз.-мат. наук, професор
Остапенко В.В., завідувач відділу чисельних методів оптимізації Начально-наукового комплексу "Інститут прикладного системного аналізу" МОН та НАН України, доктор фіз.-мат. наук, професор

Науково-видавничий відділ фізико-математичної та технічної літератури
Редактор С.Ю. Ноткіна

ISBN 978-966-00-0978-X

ЗМІСТ

ВСТУП

Задачі оптимізації декількох функцій виникають при дослідженні багатьох теоретичних і прикладних проблем. Практично будь-яка задача оптимального проектування складних економічних і технічних систем, схем, технологічних пристроїв, конструкцій, складання мережевих графіків, планування і управління виробничою і комерційною діяльністю, прийняття рішень в умовах невизначеності, ідентифікації параметрів моделі за експериментальними даним та ін. вимагає, щоб шуканий розв’язок знаходився з урахуванням багатьох критеріїв. Останні, як правило, суперечливі в тому розумінні, що якість порівнюваних альтернатив неможливо адекватно виразити одним комплексним критерієм, що представляє деяку згортку вхідних критеріїв. Отже, це означає, що апарат класичної однокритеріальної оптимізації є недостатнім для пошуку і прийняття ефективних розв’язків. Таким чином, виникає необхідність в використанні, подальшому дослідженні та розвитку більш широкої і більш загальної теорії – багатокритеріальної оптимізації.

Дослідження в області багатокритеріальної оптимізації в даний час особливо інтенсивно стимулюються практичними потребами і розвитком комп’ютерних інформаційних технологій. Тому з’явилась велика кількість праць, присвячена задачам багатокритеріальної оптимізації [2, 9, 19, 22–24, 26–31, 43, 58–60,62–63, 66–74, 78–81, 87, 89, 92, 107–110, 127–136, 181, 183, 185–188].

Вагомий вклад у розвиток теорії та методів багатокритеріальної оптимізації внесли українські вчені І.В. Сергієнко, В.С. Михалевич, Н.З. Шор, В.О. Трубін, В.Л. Волкович, Ю.Ю. Червак, В.А. Перепелиця, Л.М. Козерацька, Т.Т. Лебєдєва, Н.В. Семенова [90, 92, 127–138, 142, 144, 147, 163] та інші.

В роботах І.В. Сергієнка, В.О. Ємелічева, В.А. Перепелиці [46, 108–110, 137, 138] вперше проведено систематичне і всестороннє вивчення векторних дискретних задач, зокрема розглянуті проблеми знаходження множин оптимальних в певному розумінні розв’язків, одержані оцінки обчислювальної складності знаходження цих множин, досліджена розв’язуваність указаної проблеми в класі алгоритмів лінійної згортки часткових критеріїв, який є найпоширенішим методом пошуку елементів множини Парето для векторних задач, дано обґрунтування поліноміально розв’язуваних класів дискретних задач. Доведена нерозв’язуваність багатокритеріальних задач про комівояжера, досконалі паросполучення, кістякові дерева, ланцюг між парами вершин для всіх пар критеріїв із множин {minsum, minmax, minmin}, {maxsum, maxmax, maxmin} за умови, що векторна цільова функція не має нульових ваг. Для задач, що не розв’язувані методом лінійної згортки, досліджена гранична властивість цього методу і отримані оцінки потужності найбільшої підмножини множини Парето, яка може бути знайдена методом згортки.

Вченими кафедри обчислювальної математики Ужгородського національного університету під керівництвом професора Ю.Ю. Червака досліджено ряд нових моделей оптимального вибору з багатьма критеріями, які порівнюються між собою за важливістю при оцінці альтернативних розв'язків задач оптимізації таким чином, що один з кожних двох критеріїв важливіший за другий або ж обидва однаково важливі. Задача лексикографічної оптимізації зведена до задачі вибору на допустимій множині, в якій критерії є попарно різноважливими, тобто ранжирувані за важливістю. Цікаві результати одержані по застосуванню ідей лексикографічної оптимізації до розв'язання однокритеріальних задач дискретної оптимізації, зокрема, до задач, в яких частина або всі змінні є цілочисловими. Відомий загальний підхід до розв'язування задач у вигляді методу лексикографічних відсікань.

Суттєвий вклад в розробку сучасної теорії дискретної оптимізації, розробку і впровадження її методів при дослідженні і розв'язанні важливих прикладних задач внесли за період понад сорок років під науковим керівництвом академіка І.В. Сергієнка вчені Інституту кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України. Ними одержані важливі результати, які стали підґрунтям для розвитку теорії та створення нових напрямів в дискретній оптимізації. Дослідження проблеми стійкості, коректності задач дискретної, в тому числі векторної оптимізації, успішно здійснюється в Інституті кібернетики з початку 70-х рр. минулого століття. Як результат створені математична теорія та методологія аналізу стійкості, регуляризації параметричного та постоптимального аналізу задач дискретної оптимізації, розроблено загальний підхід до розв'язання проблеми коректності вхідних даних векторних задач дискретної та частково дискретної оптимізації, в тому числі з векторним критерієм, введені поняття і вивчені властивості сімейства збурених конусів перспективних напрямків, які на додаток до основних положень теорії точково-множинних відображень складають методологічну основу запропонованих підходів до регуляризації некоректних задач. Досліджені складні класи задач дискретної оптимізації, початкові дані яких задаються множинами можливих значень, розроблені і обґрунтовані ефективні методи їх розв'язання. Одержані результати відносно стійкості цілочислових оптимізаційних задач, вхідні дані яких генеруються випадковим чином.

В даний час інтенсивні дослідження проблем стійкості векторних задач дискретної оптимізації проводяться в Інституті кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України (І.В. Сергієнко, Т.Т. Лебєдєва, Н.В. Семенова, Т.І. Сергієнко), Білоруському державному університеті (В.О. Ємелічев, Д.П. Подкопаєв, Ю.В. Нікулін та ін.), Об'єднаному інституті проблем інформатики НАН Біларусі (Ю.Н. Сотсков), Обчислювальному центрі Російської АН (Е.М. Гордєєв, В.К. Леонтьєв), Омській філії Інституту математики СВ РАН (О.О. Колоколов, І.В.Дев'ятерикова), Інституті системних досліджень Польської АН (M. Libura), ряді університетів ФРН (E. Girlich), Нідерландів (E. S. van der Poort, G. Sierkma, A. P. M. Wagelmans, J.A.A. van der Veen), в університеті Колорадо США (H.J. Greenberg).

Білоруськими вченими під науковим керівництвом професора В.О. Ємелічева успішно розвивається конструктивний підхід до проблеми коректності векторних задач дискретної оптимізації, пов'язаний з одержанням кількісних характеристик стійкості зазначених задач, розробляється математичний апарат дослідження стійкості багатокритеріальних дискретних задач з різними типами векторних критеріальних функцій, принципами оптимальності, а також узагальненими і параметризованими принципами оптимальності.

Багато задач проектування, планування, розміщення, управління та ін. описуються за допомогою різних моделей багатокритеріальної оптимізації, розв'язки яких мають комбінаторні властивості, зокрема, переставні, сполучні тощо. Отже, пошук оптимальних розв'язків слід здійснювати на комбінаторних множинах.

В статті [106] запропоновані різні нечіткі варіанти методу вектора спаду, що ґрунтуються на понятті розмитого околу, для розв'язання однокритеріальних задач комбінаторної оптимізації. У роботі [107] розглядається набагато складніша задача – багатокритеріальна комбінаторна оптимізаційна задача для випадку різнорідних інформаційних даних, що надаються для її розв'язання. Пропонуються різні модифікації нечіткого варіанту методу вектора спаду, описані його відповідні версії для визначення множини Парето.

Як відомо [153, 156], комбінаторні множини набувають специфічних властивостей при зануренні їх в арифметичний евклідів простір. Застосування таких властивостей дає можливість розглядати різні оптимізаційні задачі і розробляти нові спеціальні методи для їх розв'язання.

Різним аспектам розв'язання проблем комбінаторної оптимізації, присвячені роботи багатьох вчених [9, 10, 18, 38–48, 53–56, 68–73, 105–110, 127–137, 141, 152–156]. Підходи до розв'язання дискретних комбінаторних оптимізаційних задач, що базуються на зануренні комбінаторних множин в арифметичний евклідів простір, розробляються, зокрема, в Харкові під керівництвом член-кореспондента НАН України. Стояна Ю.Г., професора Яковлєва С.В. та в Полтаві під керівництвом професора Ємця О.О.

Часто при розв’язуванні прикладних задач виникає потреба формалізувати у вигляді критеріїв ряд окремих вимог, які ставляться до розв’язків, визначених на комбінаторних множинах. Отже, виникає необхідність в побудові та дослідженні математичних моделей та методів їх розв’язання, які об’єднують багатокритеріальність альтернатив та допустимі множини, що мають різні комбінаторні властивості розв’язків

В даній монографії розглядаються нові актуальні векторні задачі комбінаторної оптимізації. Вона є продовженням досліджень багатокритеріальних задач оптимізації на комбінаторних множинах та їх опуклих оболонках, пошуків нових методів їх розв’язання.

В монографії викладені властивості ефективних розв’язків багатокритеріальних задачах дискретної оптимізації на різних евклідових комбінаторних множинах, побудовані методи та алгоритми розв’язання таких задач оптимізації. Зокрема, запропонована постановка евклідових комбінаторних задач з багатьма критеріями на комбінаторних множинах перестановок, розміщень та поліров розміщень, сформульовано і доведено властивості ефективних розв’язків. Викладено методи та запропоновано алгоритми розв’язування різних класів задач з багатьма критеріями на комбінаторних та полікомбінаторних множинах, які є подальшим розвитком комбінації методів обмежень та відсікань для класів лінійних та нелінійних комбінаторних задач. Побудовані математичні моделі прикладних задач з багатьма критеріями на загальній множині перестановок як задач евклідової багатокритеріальної комбінаторної оптимізації.

Методи та розроблені алгоритми можуть бути застосовані для розв’язування задач з векторним критерієм та з додатковими обмеженнями на інших комбінаторних множинах, які описуються розглянутими математичними моделями або зводяться до них.

РОЗДІЛ 1. МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ЗАДАЧІ ВЕКТОРНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ

Практично будь-яка прикладна задача є багатокритеріальною і, як правило, звести її до одного критерію досить складно, оскільки цілей може бути значно більше. В цьому випадку оптимізація проводиться за декількома частковими критеріями, і проблема зводиться до розгляду задачі багатокритеріальної оптимізації. В зв'язку з цим особливого значення в даний час набуває теорія прийняття рішень при наявності багатьох критеріїв.

У даному розділі досліджується зв'язок векторного критерію із системою цілей соціально-економічного розвитку, яку він описує. Формулюються вимоги до багатокритеріальних моделей, уточнюється призначення і можливості застосування цих моделей. Відзначається принципова неповнота опису цілей векторним критерієм, внаслідок чого для прийняття багатокритеріальних рішень необхідна додаткова інформація.

Одним із основних понять теорії багатокритеріальної оптимізації є поняття оптимального за Парето або ефективного розв'язку.

Аналізується роль ефективних (Парето-оптимальных) розв'язків у задачах векторної оптимізації. Вводяться умови узгодженості, що дозволяють обмежити область пошуку оптимуму сукупністю ефективних планів і перенести цей пошук у простір критеріїв. Дана класифікація векторних критеріїв з погляду відображення ними зв'язків між елементами системи цілей. Підкреслюється, що можливість відтворення таких зв'язків є необхідною умовою успішного розв'язання багатокритеріальних задач.

1.1. Система цілей і багатокритеріальна математична модель

Проблема прийняття рішень в економіці, зокрема оптимального планування, виникає в силу двох принципових обставин: з одного боку, багатоваріантності планових рішень, з іншого – цілеспрямованості економічних систем. Множина альтернативних варіантів плану визначається наявними можливостями економічного розвитку; а вибір із цієї множини – цілями системи, що підлягає плануванню. Прийняте рішення є результатом спільного розгляду цілей і можливостей їх узгодження одна з одною.

При використанні математичних методів в аналізі та прийнятті планових рішень обидві складові задачі вибору повинні знайти адекватне відображення в економіко-математичній моделі. Не зупиняючись тут на принципах опису множини допустимих варіантів плану, звернемося до методів математичного моделювання цілей економічного розвитку [114].

У найбільш простій і досить поширеній інтерпретації ціль розуміється як деякий заздалегідь визначений стан, досягнення якого задане розглянутій системі. Таке трактування, зрозуміло, досить обмежене, оскільки за його межами повністю залишається задача вибору мети, що складає зміст цільової стадії планування. Зазначений стан може виявитися недосяжним, а якщо він досягається, то, як правило, різними шляхами. У першому випадку необхідним є коректування початково обраної мети, у другому – вибір одного з альтернативних варіантів її досягнення.

Для опису цілей використовуються різноманітні математичні моделі, що відрізняються одна від одної своїм призначенням, вимогами до об’єкта дослідження та можливостями застосування. Найбільш загальні моделі, що використовуються переважно в теоретичному аналізі, носять якісний характер і фіксують результати порівняння різних варіантів плану з точки зору цілей системи або явно описують результати вибору з різних сукупностей альтернативних планових розв’язків. У першому випадку ціль є бінарним відношенням на множині допустимих планів, у другому – функцією вибору.

Поряд з якісним описом цілей як у теоретичних дослідженнях, так і особливо в практиці економіко-математичного моделювання широко поширені кількісні моделі, що дозволяють охарактеризувати переваги альтернатив чисельними оцінками (скалярними або векторними) і тим самим звести задачу порівняння й вибору планових рішень до розгляду відповідних оцінок.

Найпростішою і найпоширенішою моделлю такого роду є цільова функція, що ставить у відповідність кожному варіанту плану дійсне число, яке є тим більшим, якщо цільова функція максимізується, чим повніше даний варіант відповідає цілям системи. Оптимальність плану в цьому випадку, означає неможливість збільшення досягнутого значення цільової функції, з цієї причини останню часто називають критерієм оптимальності.

Сама гіпотеза про існування такого критерію ставить досить серйозні вимоги до структури переваг і властивостей вибору. Відповідність цим вимогам цілей реальних економічних систем лише частково піддається емпіричній перевірці і є предметом головним чином теоретичного аналізу. Нерідко такий аналіз не дає достатніх підстав розраховувати на існування числового критерію оптимальності, як правило, внаслідок внутрішньої суперечливості інтересів і переваг, що перешкоджає їх поданню у вигляді загальної цілі. Тоді доводиться розглядати систему цілей, виділяючи як складові більш прості часткові цілі, опис яких цільовими функціями не є настільки проблематичним.

Система цілей повсюдно виникає і у тих, ситуаціях, коли припущення про існування єдиної цільової функції не виглядає надмірним. Виділеним у результаті частковим цілям як критеріям з достатніми підставами можуть бути співставлені спеціалізовані економічні вимірники, які без особливих утруднень відображаються в прикладних моделях. Множинність цілей економічних систем має об'єктивний характер і знаходить своє модельне відображення у формі векторного критерію.

Отже, нехай елементи системи цілей представлені частковими критеріями $f_1,..., f_l : X \to R^l$; тут і далі X − множина допустимих планів, що ототожнюється зі своїм економіко-математичним описом і знаходиться у просторі R^n. Функції $f_1,..., f_l$ формують векторний критерій оптимальності $F(x) = (f_1(x),..., f_l(x))$; покладається, що j-й цілі відповідає максимізація складової $f_j(x)$. Пара (F, X), утворена векторним критерієм $F : X \to R^l$ і множиною *X*, представляє собою модель, або задачу, багатокритеріальної (векторної) оптимізації, яку будемо позначати $Z(F, X)$.

Часткові цілі, представлені компонентами векторного критерію, поєднані різного роду *зв'язками.* Зокрема, цілі пов'язані тим, що висувають вимоги до одних і тих же варіантів допустимих планів. Такі зв'язки опосередковані обмеженнями, що формують допустиму множину *X,* і умовно можуть бути названі внутрішніми.

У свою чергу, зовнішні зв'язки відображають порівняльну важливість цілей, їх настійність, взаємозамінність та ін. Ці зв'язки обумовлені структурою системи цілей, об'єктивно існуючими відношеннями між її елементами. Звичайно зовнішні зв'язки опосередковані досить складними соціально-економічними взаємодіями і тому важко піддаються економіко-математичному опису. Незважаючи на те що такі зв'язки є найважливішими реальностями задачі прийняття планових рішень, вони ніяк не відображені векторним критерієм і тому залишаються поза межами багатокритеріальної моделі.

Тоді природно, що така модель, яка розглядається сама по собі, виявляється недостатньою для обґрунтованого вибору оптимального варіанта плану. Часткові критерії $f_1,..., f_l$, будучи в загальному випадку різнонаправленими, оптимізуються на множині X різними розв'язками $x^j \in \arg\max\{ f_j(x) \mid x \in X\}$, $j \in N_l = \{1, 2,..., l\}$.

Кожний із цих розв'язків може виявитися неоптимальним, а найчастіше просто незадовільним з погляду інших компонентів векторного критерію F. Отже, виникає характерна для багатокритеріальних задач проблема досягнення компромісу між частковими цілями або, говорячи інакше, узгодження цих цілей. Таке узгодження вимагає порівняння різних елементів системи цілей, їх зіставлення однієї з другою, що неможливо без належного урахування всієї сукупності як внутрішніх, так і зовнішніх зв'язків між ними.

Отже, можна констатувати, що векторний критерій $F = (f_1, ..., f_l)$, навіть якщо його компоненти поставлені у відповідність всім складовим системи цілей, не є її еквівалентом і повинен бути посилений додатковою інформацією. До надходження такої інформації багатокритеріальна модель $Z(F, X)$ дозволяє робити висновки про порівняльну перевагу різних варіантів плану та про можливості вибору тих або інших альтернатив у тій мірі, в якій часткові критерії не суперечать один одному. Коло таких суджень, безумовно, обмежене, але вже на цьому апріорному рівні можуть бути отримані досить важливі висновки, які хоча і не вирішують остаточно задачу вибору найкращого варіанта, але значно спрощують її подальший аналіз.

1.2. Основні поняття та визначення векторної оптимізації

1.2.1. Упорядкування за Парето

Векторний критерій $F = (f_1, ..., f_l): \ X \to R^l$, будучи кількісною моделлю цілей, дає можливість одержати їх якісний опис у вигляді упорядкування допустимої множини *X*. Саме F дозволяє віддати перевагу одній з альтернатив у порівнянні з іншою, якщо перша з них одержує з погляду кожного із часткових критеріїв не меншу оцінку, ніж друга. Тим самим на множині *X* вводиться відношення $R(F) \subseteq X \times X$, визначене правилом

$$xR(F)y \Leftrightarrow f_j(x) \geq f_j(y), \ j \in N_l, \ x, y \in X, \tag{1.1}$$

або у векторній формі

$$xR(F)y \Leftrightarrow F(x) \geq F(y), \quad x, y \in X. \tag{1.2}$$

Згідно (1.2), $R(F)$ є прообразом відношення $\geq$, що перенесено відображенням F^{-1} із простору критеріїв R^l.

Відношення $R(F)$, будучи рефлексивним і транзитивним, є квазі-порядком, що іноді називають *упорядкуванням за Парето.* Відповідний строгий порядок $P(F)$ породжується відношенням $\geq$ у просторі критеріїв:

$$xP(F)y \Leftrightarrow F(x) \geq F(y), F(x) \neq F(y), x, y \in X, \quad (1.3)$$

а еквівалентність $I(F)$ ототожнює альтернативи, що мають однакову перевагу, яким відповідає одне й те ж саме значення векторного критерію.

Очевидно, упорядкування $R(F)$ залишається незмінним при будь-яких монотонно зростаючих перетвореннях компонентів векторного критерію, а тому адекватне виміру часткових цілей у шкалах порядку. Отже, $R(F)$ повністю визначається лінійними квазіпорядками $R(f_1), ..., R(f_l)$, породженими на множині X частковими критеріями $f_1, ..., f_l$:

$$xR(f_j)y \Leftrightarrow f_j(x) \geq f_j(y), \ j \in N_l, \quad (1.4)$$

причому, як неважко бачити, має місце рівність

$$R(F) = \bigcap_{j=1}^{l} R(f_j). \quad (1.5)$$

Упорядкування Парето і його представлення у вигляді (1.5) дозволяє ввести ряд корисних характеристик багатокритеріальної моделі (див. також [33, 63]).

1.2.2. Критеріальний конус

Важливим поняттям в багатокритеріальній оптимізації є поняття критеріального конуса. Розмір цього конуса служить індикатором розміру ефективної множини і крім того, характеризує труднощі, пов'язані з розв'язанням багатокритеріальної задачі [169].

Розглянемо загальну задачу багатокритеріальної лінійної оптимізації наступного вигляду:

$$Z(C,S): \max\{Cx \mid x \in S\}, \text{ де } C = (c^1, c^2, ..., c^l)^T, \ x \in S \subset R^n.$$

Означення 1.1. Критеріальним конусом називається опуклий конус, породжуваний градієнтами l цільових функцій $\left(c^1, c^2, ..., c^l\right)$.

Означення 1.2. Нуль-векторною умовою називається умова існування строго додатної лінійної комбінації градієнтів цільових функцій, що дорівнює нулю. Тобто нуль-векторна умова виконана, якщо існує вектор $\alpha \in R^l$ з компонентами $\alpha_i > 0$ для всіх i, такий, що

$$\sum_{i=1}^{l} \alpha_i c^i = 0 \in R^n.$$

Критеріальний конус завжди опуклий і замкнутий, а початок координат $0 \in R^n$ завжди належить цьому конусу. Критеріальний конус не обов'язково виступаючий. Єдиний виступаючий конус, для якого виконана нуль-векторна умова, – це конус $\{0 \in R^n\}$. За винятком критеріального конуса $\{0 \in R^n\}$, всі інші конуси – необмежені множини. Оскільки критеріальний конус породжується l градієнтами цільових функцій, він є многогранним конусом, що має l крайніх променів. Розмірність критеріального конуса задається рангом матриці C критеріїв задачі.

1.2.3. Виконання нуль-векторної умови

Нуль-векторна умова не виконується

У нижче наведених прикладах розглядаються критеріальні конуси, для яких не виконана нуль-векторна умова. Це типовий випадок у багатокритеріальній лінійній оптимізації.

Приклад 1.1. (задача лінійної оптимізації з одним критерієм).

Нуль-векторна умова не виконується в задачі $\max\{c^T x \mid x \in S\}$ доти, доки не стане рівним нулю $c \in R^n$. Якщо $c \neq 0$, то критеріальний конус є одновимірним – це необмежена напівпряма $\mu(0, c)$.

Приклад 1.2. Розглянемо багатокритеріальну задачу лінійної оптимізації $Z(C,S): \max\{Cx \mid x \in S\}$, в якій $C = (c^1, c^2, c^3)^T \in R^{3 \times n}$, $r(C) = 2$, а $l > 2$.

Графічне зображення критеріального конуса та допустимої множини подане на рис. 1.1. Критеріальний конус, як видно з рисунка, – двовимірний. Вектори c^1 і c^3 – це суттєві градієнти, оскільки без них неможливо породити цей критеріальний конус. Вектор c^2 у цьому прикладі – несуттєвий, оскільки критеріальний конус без нього не змінюється.

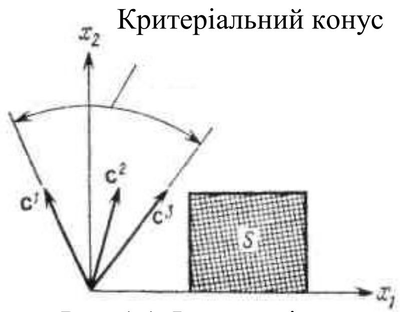


Рис. 1.1. Ілюстрація до прикладу 1.2

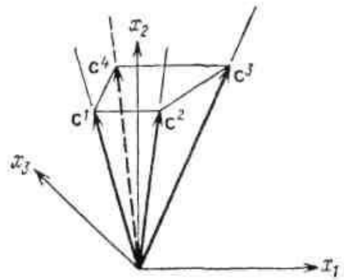


Рис. 1.2. Ілюстрація до прикладу 1.3

Приклад 1.3. Розглянемо багатокритеріальну задачу лінійної оптимізації вигляду $Z(C,S)$, де $C=(c^1,c^2,c^3,c^4)^T \in R^{4\times n}$ і число крайніх променів більше ніж $r(C)$.

Відповідний критеріальний конус зображений на рис. 1.2. Як видно з рисунка, критеріальний конус – тривимірний, але має чотири крайніх промені. Незважаючи на те, що вектори $\{c^1,c^2,c^3,c^4\}$ лінійно залежні, всі градієнти суттєві.

Нуль-векторна умова виконана

Нижче наведені приклади ілюструють критеріальні конуси, стосовно яких виконана нуль-векторна умова.

Приклад 1.4. Розглянемо багатокритеріальну задачу лінійної оптимізації $Z(C,S)$ при $r(C)>0$ (рис. 1.3). У цій задачі виконана нуль-векторна умова, оскільки існує додатний вектор $\alpha \in R^3$, такий, що $\sum_{i=1}^{0} \alpha_i c^i = 0 \in R^n$.

Хоча $r(C)=2$, всі три градієнти суттєві. Відмітимо, що якби в цю задачу були включені будь-які два із трьох критеріїв, то нуль-векторна умова не була б виконана, а двовимірний критеріальний опуклий конус породжувався б двома градієнтами.

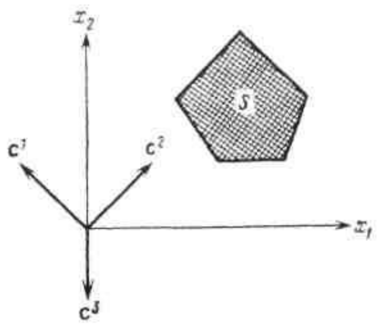


Рис. 1.3. Ілюстрація до прикладу 1.4

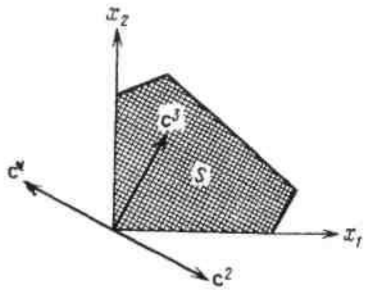


Рис. 1.4. Ілюстрація до прикладу 1.5

Приклад 1.5. Випадок, коли виконання нуль-векторної умови залежить від того, які саме критерії беруть участь у формулюванні задачі. Розглянемо градієнти цільової функції, зображені на рис. 1.4. Коли в задачі єдиний градієнт c^1, то нуль-векторна умова не виконана, а критеріальний конус – це необмежена напівпряма $\mu(0,c^1)$. Включення в задачу вектора c^2 приводить до того, що нуль-векторна умова виконується. Ввівши потім c^3, повертаємося до ситуації, коли ця умова знову не виконується. У задачі із трьома критеріями критеріальний конус представляє собою двовимірний півпростір $\{x \in R^2 \,|\, c^3 x \geq 0\}$, що не має вершини. Всі три градієнти суттєві, хоча півпростір має два крайніх промені.

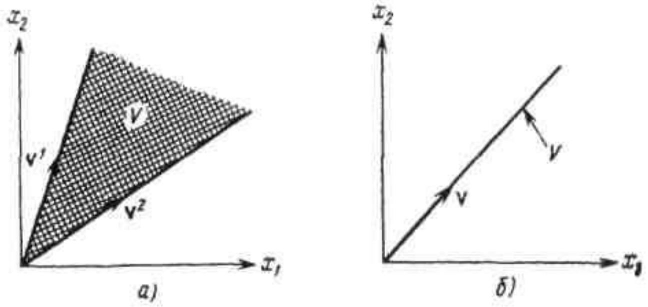


Рис. 1.5. Ілюстрація до прикладу 1.6

Таким чином, типова ситуація при переході від задачі лінійної оптимізації до багатокритеріальної задачі лінійної оптимізації полягає в наступному. Замість одновимірного променя, що виходить із початку координат, критеріальний конус стає багатомірним, який збільшує свою розмірність в результаті введення в задачу нових критеріїв.

1.2.4. Відносна внутрішність критеріального конуса

Нехай $\left(v^1, v^2, ..., v^k\right)$ – множина суттєвих твірних замкнутого опуклого конуса V. Відносна внутрішність V (позначається $\mathrm{ri}\,V$) складається із всіх строго додатних лінійних комбінацій векторів v^i. Відносна границя V визначається як різниця між clV (clV – замикання V) і його відносною внутрішністю.

Приклад 1.6. Для конуса, зображеного на рис. 1.5,*а* і породжуваного парою $\{v^1, v^2\}$, відносна внутрішність V – це просто внутрішність V, а відносна границя V задається у вигляді $\mu(0, v^1) \cup \mu(0, v^2)$.

Для конуса, породжуваного вектором $\{v\}$ на рис. 1.5,*б*, відносною внутрішністю V є сам конус V без початку координат, а початок координат – його відносною границею.

Помітимо, що $\mathrm{ri}V = V$ тільки у випадку, коли виконана нуль-векторна умова. Інтерес до відносної внутрішності критеріального конуса викликаний тим, що його відносна внутрішність – це множина, отримана в результаті множення на всі можливі додатні скалярні множники всіх строго опуклих комбінацій векторів v^i. У результаті приходимо до твердження 1.1.

Твердження 1.1. Для того, щоб точка $\bar{x} \in S$ була ефективною, необхідно і достатньо існування такого вектора $\mu \in R^n$, що належить відносній внутрішності критеріального конуса, щоб точка $\bar{x}$ була розв'язком задачі лінійного програмування

$$Z(\mu, S):\ \max\{\mu^T x \mid x \in S\}.$$

Доведення. Оскільки μ належить відносній внутрішності критеріального конуса, то існує число $\alpha \in R, \alpha > 0,$ таке, що $\mu = \alpha\lambda^T C$ для деякого $\lambda \in \Lambda = \left\{\lambda \in R^l \mid \lambda_i > 0, \sum_{i=1}^{l} \lambda_i = 1\right\}$. Тому твердження 1.1 легко отримується із теорем 7.1 і 7.2 із [169].

Значення твердження 1.1 полягає у тому, що ефективна множина задається у вигляді об'єднання всіх розв'язків сімейства задач $Z(\mu, S)$, де вектор μ належить відносній внутрішності критеріального конуса. Якщо ж μ належить відносній границі критеріального конуса, то розв'язок задачі $Z(\mu, S)$ може виявитися неефективним.

1.3. Знаходження ефективних точок з використанням складових градієнтів

Розглянемо метод, що використовує поняття відносної внутрішності критеріального конуса для графічного виявлення ефективних точок. Введемо наступні позначення. E – множина ефективних точок $x \in S$, E_x – множина ефективних крайніх точок допустимої множини S, E_μ – множина ефективних необмежених ребер допустимої множини S. Говорять, що вектор $v \neq 0$ спрямований усередину конуса V, якщо $v \in V$. Також говорять, що точка $\bar{x} \in S$ максимізує градієнт μ, якщо $\bar{x}$ є розв'язком задачі лінійного програмування $\max\{\mu^T x \mid x \in S\}$. Відповідно до твердження 1.1 ефективна множина складається із точок, що отримуються при розв'язанні задач максимізації для всіх точок відносної внутрішності критеріального конуса. Це проілюстровано наступними прикладами.

Приклад 1.7. Критеріальний конус в багатокритеріальній задачі лінійної оптимізації (рис. 1.7) являє собою невід'ємний ортант. У задачі відносна внутрішність критеріального конуса

$$\mathrm{ri}\, V = \{x \in R^2 \mid x_1, x_2 > 0\} \text{ і } E = \gamma(x^2, x^3),\ E_x = \{x^2, x^3\}, E_\mu = \varnothing.$$

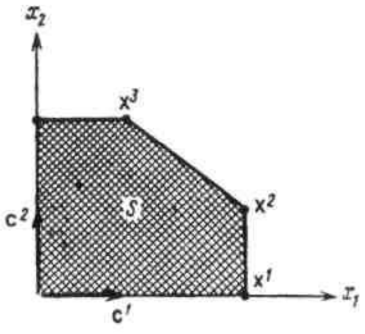


Рис. 1.7. Ілюстрація до прикладу 1.7

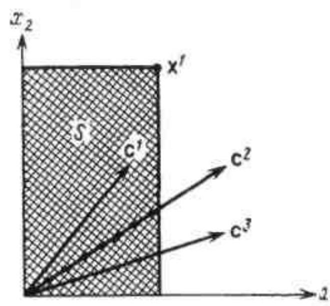


Рис. 1.8. Ілюстрація до прикладу 1.8

Виникає питання: чому всі точки, що розташовані уздовж ребра $\gamma(x^1, x^2)$, крім точки x^2, неефективні? Справа в тому, що ці точки не максимізують жодного вектора, що спрямований усередину, критеріального конуса (хоча такі точки максимізують градієнт c^1, але c^1 не належить відносній внутрішності критеріального конуса).

Приклад 1.8. У багатокритеріальній задачі лінійної оптимізації (рис. 1.8) відносна внутрішність критеріального конуса – це внутрішність опуклого конуса, що генерується парою $\{c^1, c^3\}$, а множини $E = \{x^1\}$, $E_x = \{x^1\}$, $E_\mu = \varnothing$.

У цій задачі c^2 – несуттєвий градієнт, а x^1 максимізує всі градієнти, спрямовані усередину критеріального конуса. Оскільки x^1 – єдина ефективна точка, то $I(F, S) = \{x^1\}$.

Приклад 1.9. Розглянемо задачу $Z(C, S)$ (рис. 1.9), при $C = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Нехай $\lambda \in \Lambda$ – ваговий вектор, що бере участь у формулюванні задачі лінійної оптимізації $\max\{\lambda^T Cx \mid x \in S\}$. При $\lambda_1 \in (0; 1/5)$ точка x^1 – єдина, що максимізує цільову функцію задачі лінійної оптимізації. При $\lambda_1 = 1/5$ розв'язком є необмежене ребро $\mu(x^1, v)$, де $v = (1, 0)$. При $\lambda_1 \in (1/5; 1)$ значення цільової функції в розглянутій задачі необмежене. Таким чином, $E = \mu(x^1, v)$, $E_x = \{x^1\}$, $E_\mu = \{\mu(x^1, v)\}$.

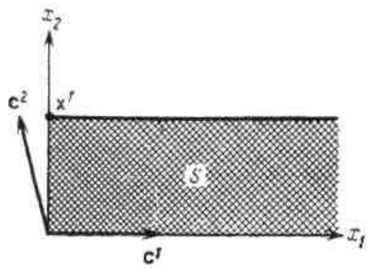


Рис. 1.9. Ілюстрація до прикладу 1.9

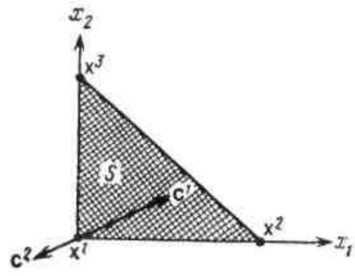


Рис. 1.10. Ілюстрація до прикладу 1.10

Приклад 1.10. Якщо градієнти критеріїв у багатокритеріальній задачі $Z(C, S)$ протилежні за напрямками, (рис. 1.10), то нуль-векторна умова виконана. У цій задачі $E = S$, $E_x = \{x^1, x^2, x^3\}$, $E_\mu = \varnothing$, оскільки нульовий вектор належить відносній внутрішності критеріального конуса.

Як правило, чим ширше критеріальний конус, тим ширше ефективна множина. Приклад 1.11 ілюструє саме такий типовий випадок. При цьому в процесі неперервного розширення критеріального конуса множина E розширюється стрибкоподібно.

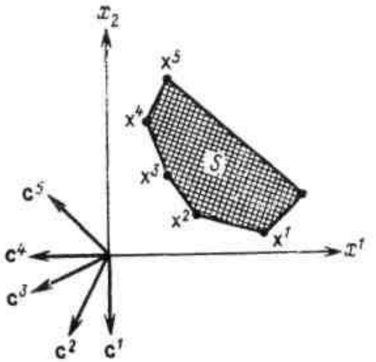


Рис. 1.11. Ілюстрація прикладу 1.11

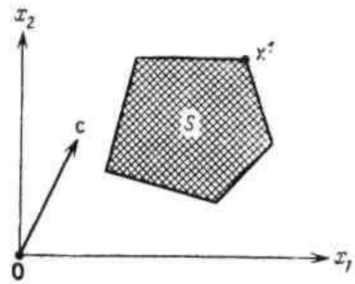


Рис. 1.12. Ілюстрація прикладу 1.12

Виключення із цього правила ілюструє приклад 1.12.

Приклад 1.11. Розглянемо градієнти критеріїв $c_1, c_2, ..., c_5$, і допустиму множину S, представлені на рис. 1.11. Для чотирьох критеріальних конусів $V_1, V_2, ..., V_4$, кожний з яких містить всі попередні, одержуємо послідовність $E_1 \subset E_2 \subset ... \subset E_4$ ефективних множини (табл. 1.1), які включаються одна в одну, оскільки відносні внутрішності критеріальних конусів теж відповідно включаються одна в одну.

Таблиця 1.1

Ефективні множини із прикладу 1.11

Твірні критеріального конуса	Ефективна множина
$V_1: \ \{c^1, c^2\}$	$E_1 = \gamma(x^1, x^2)$
$V_2: \ \{c^1, c^3\}$	$E_2 = \gamma(x^1, x^2) \bigcup \gamma(x^2, x^3)$

Продовж. табл. 1.1

Твірні критеріального конуса	Ефективна множина
$V_3: \quad \{c^1, c^4\}$	$E_3 = \bigcup_{i=1}^{3} \gamma(x^i, x^{i+1})$
$V_4: \quad \{c^1, c^5\}$	$E_4 = \bigcup_{i=1}^{4} \gamma(x^i, x^{i+1})$

Приклад 1.12. Розглянемо множину S на рис. 1.12. У задачах $\max\left\{0^T x \mid x \in S\right\}$ і $\max\left\{c^T x \mid x \in S\right\}$ реалізується випадок, коли ефективна множина стискується в міру розширення критеріального конуса.

В першій задачі критеріальний конус – це множина $\{0 \in R^2\}$, $E = S$. В другій задачі лінійного програмування критеріальний конус – це $\mu(0, c)$, $E = \{x^1\}$. Пояснення тут досить просте: відносна внутрішність критеріального конуса першої задачі не є підмножиною відносної внутрішності критеріального конуса другої задачі.

1.4. Внутрішня ненадлишковість і суперечливість

З метою зменшення розмірності векторних критеріїв та одержання можливо більш економного опису цілей багатокритеріальної задачі $Z(F, X)$, має сенс розглядати тільки *внутрішньо ненадлишкові* векторні критерії $F = (f_1, ..., f_l)$, з яких неможливо видалити будь-яку складову f_{j_0}, не змінивши при цьому впорядкування Парето:

$$R(F) \subset \bigcap_{j=1, j \neq j_0}^{l} R(f_j), \; j_0 \in N_l. \tag{1.6}$$

Легко перевірити, що векторний критерій F внутрішньо надлишковий у тих і тільки тих випадках, коли одна з його компонент f_{j_0} пов'язана з іншими функціональною залежністю

$$f_{j_0}(x) = G(f_1(x), ..., f_{j_0-1}(x), f_{j_0+1}(x), ..., f_l(x)) \; \forall x \in X, \tag{1.7}$$

причому функція G монотонно не спадає за своїми змінними. Якщо векторний критерій *лінійний,* тобто має вигляд

$F(x) = Cx = (c^1 \cdot x, ..., c^l \cdot x)^T$, де $C = \begin{bmatrix} c^1 \\ \vdots \\ c^l \end{bmatrix}$ − матриця часткових критеріїв розмірності $l \times n$, а множина $X \subseteq R^n$ містить внутрішні точки, то, згідно леми Фаркаша [121], внутрішня надлишковість рівносильна наявності лінійної залежності $f_{j_0(x)} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq j_0}}^{l} \alpha_j f_j(x)$ з невід'ємними коефіцієнтами α_j.

Перетин (1.5), як правило, породжує лише часткові квазіпорядки. Неповнота $R(F)$ є наслідком *суперечливості* (різнонаправленості) складових векторного критерію.

$R(F)$ – непорівнювані є ті й тільки ті допустимі розв'язки $x, y \in X$, для яких можна вказати пару протилежно упорядковуючих, часткових критеріїв f_i, f_j , таких, що

$$f_i(x) > f_i(y), \ \ f_j(x) < f_j(y). \qquad (1.8)$$

При відсутності суперечливих критеріїв, коли з виконання нерівності $f_i(x) > f_i(y)$ при деякому $i \in N_l$ випливає справедливість нерівностей

$$f_j(x) \geq f_j(y) \ \forall j \in N_l, \qquad (1.9)$$

квазіпорядок $R(F)$ виявляється лінійним (повним). Неважко бачити, що лінійність упорядкування Парето еквівалентна існуванню скалярної цільової функції $\varphi : X \to R$ (можна, наприклад, покласти $\varphi = \sum_{j=1}^{l} f_j(x)$) такої, що кожний із часткових критеріїв є монотонно неспадним перетворенням φ . У цьому випадку задача $Z(F, X)$ є багатокритеріальною лише формально; фактично її векторний критерій одновимірний (але не обов'язково є при цьому внутрішньо надлишковим).

На протилежному полюсі знаходяться повністю суперечливі багатокритеріальні моделі $Z(F, X)$, коли для будь-яких нерівних одна одній альтернатив $x, y \in X$ можуть бути вказані часткові критерії f_i, f_j, що задовольняють умову (1.8). Такі векторні критерії практично неможливі для порівняння допустимих розв'язків, оскільки відношення $R(F)$ збігається з діагональним відношенням $X \times X$: $xR(F)y \Leftrightarrow x = y,$ а строгий порядок $P(F)$ виявляється порожнім.

Основна кількість моделей векторної оптимізації $Z(F, X)$ займає проміжне положення між двома зазначеними полюсами, коли впорядкування Парето дозволяє порівняти деякі, але не всі можливі, пари альтернатив. Чим більш суперечливі часткові критерії $f_1, ..., f_l$, тим вужче коло можливих порівнянь і тим менш змістовна багатокритеріальна модель.

З цього погляду порівняння суперечливості різних векторних критеріїв, заданих на тій самій допустимій множині X, може бути формалізоване таким чином.

Будемо говорити, що векторний критерій $F^{(1)} = (f_1^{(1)}, ..., f_{l_1}^{(1)}):$ $X \to R^{l_1}$ не менш суперечливий, ніж векторний критерій $F^{(2)} = (f_1^{(2)}, ..., f_{l_2}^{(2)}): X \to R^{l_2}$, якщо квазіпорядок $R(F^{(1)})$ занурений в $R(F^{(2)})$ або, що те ж саме,

$$F^{(1)}(x) \geq F^{(1)}(y) \Rightarrow F^{(2)}(x) \geq F^{(2)}(y), \qquad (1.10)$$

$$F^{(1)}(x) \geq F^{(1)}(y), F^{(2)}(x) \neq F^{(1)}(y) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow F^{(2)}(x) \geq F^{(2)}(y), F^{(2)}(x) \neq F^{(2)}(y). \qquad (1.11)$$

Поняття суперечливості цілей, згідно якому цілі тим більш суперечливі, чим сильніше відрізняються напрямки, що ведуть до них, в цілому узгоджується з даним означенням.

Продемонструємо це на прикладі задач із лінійними векторними критеріями $F(x) = Cx = (c^1 \cdot x, ..., c^l \cdot x)^T$ [114]. У таких задачах напрямком, що відповідає j-й частковій цілі, слід вважати вектор c^j – градієнт лінійної цільової функції $f_j(x) = \left\langle c^j, x \right\rangle, j \in N_l$.

Якщо є два векторних критерії $F_A(x) = Ax,$ $F_B(x) = Bx,$ де

$A=\begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^{m_1} \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^{m_2} \end{pmatrix}$, причому рядки матриці критеріїв A отримані усередненням рядків B, то природно вважати, що диференціація цих напрямків у першому випадку не вище, ніж у другому. Під усередненням тут розуміється утворення лінійних комбінацій

$$a^j=\sum_{k=1}^{m_2}\nu_{jk}b^k,\ j\in N_{m_1}, \tag{1.12}$$

з невід'ємними коефіцієнтами ν_{jk} (умови нормування $\sum_{k=1}^{m_2}\nu_{jk}=1$, $j\in N_{m_1}$, при виконанні яких комбінації (1.12) стають опуклими, у цьому випадку необов'язкові, оскільки мова йде про напрямки векторів a^j, b^k). Очевидно, усереднення рядків матриці критеріїв розширює «області одностайності» (рис. 1.13); можна перевірити, що справедливе і обернене твердження.

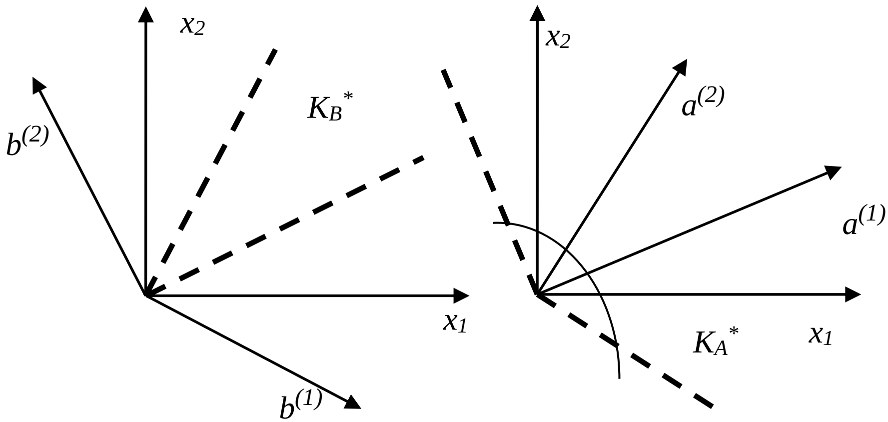


Рис. 1.13. Порівняння суперечливості векторних критеріїв

Введемо до розгляду многогранні конуси $K_A=\{x\in R^n \mid Ax\geq 0\}$, $K_0^A=\{x\in R^n \mid Ax=0\}$, $K_B=\{x\in R^n \mid Bx\geq 0\}$, $K_0^B=\{x\in R^n \mid Bx=0\}$.

Теорема 1.1. Нехай $F_A(x)=Ax$, $F_B(x)=Bx$ − лінійні векторні критерії, задані на множині X такій, що $\operatorname{int} X \neq \varnothing.$ Для того щоб векторний критерій F_B був не менш суперечливий, ніж F_A, необхідно, а у випадку rang A = rang B − і достатньо, щоб рядки a^j матриці критеріїв A були невід'ємними лінійними комбінаціями рядків b^k матриці B.

Доведення. Внаслідок лінійності векторних критеріїв та враховуючи умови (1.10), (1.11) маємо імплікації:

$$(x+K_B)\bigcap X=\varnothing \Rightarrow (x+K_A)\bigcap X=\varnothing; \tag{1.13}$$

$$(x+(K_B \setminus K_0^B))\bigcap X=\varnothing \Rightarrow (x+(K_A \setminus K_0^A))\bigcap X=\varnothing. \tag{1.14}$$

Умова (1.10) еквівалентна включенню $\quad K_A \subseteq K_B \quad$ (1.15)

Нехай K_A^*, K_B^* − конуси, спряжені до конусів K_A і K_B; нагадаємо, що, відповідно до означення, спряжений конус K^* до опуклого конусу K визначається таким чином

$$K^*=\{h\in R^n \mid h\cdot z\le 0 \quad \forall z\in K\}, \tag{1.16}$$

причому якщо K замкнутий (зокрема, многогранний), то має місце *співвідношення двоїстості* [121]

$$K=K^{**}. \tag{1.17}$$

Враховуючи (1.16), (1.17) умова (1.15) рівносильна протилежному включенню для спряжених конусів

$$K_A^* \supseteq K_B^*, \tag{1.18}$$

які в даному випадку породжені рядками відповідних матриць:

$$K_A^*=\left\{\sum_{i=1}^{m_1}\lambda_i a^i \mid \lambda_i\ge 0, i\in N_{m_1}\right\},\ \ K_B^*=\left\{\sum_{i=1}^{m_2}\mu_i b^i \mid \mu_i\ge 0, i\in N_{m_2}\right\}.$$

Отже, імплікація (1.13) має місце, тоді і тільки тоді, коли існують коефіцієнти $\nu_{jk}\ge 0,\ j\in N_{m_1},\ k\in N_{m_2}$, такі, що справедливі рівності (1.12), і умови теореми тим самим є необхідними.

При рівності рангів матриць критеріїв ці умови є також достатніми. Дійсно, у силу тільки що встановленої еквівалентності перевірки потребує тільки умова (1.14), а якщо вона порушується, тобто

$Bx^0 \ge 0, Ax^0 = 0$ при деякому $x^0 \in R^n$, то, згідно (1.12), виявляється що $\operatorname{rang} A < \operatorname{rang} B$.

1.5. Поняття кореляції критеріїв

Використання вагових коефіцієнтів критеріїв може бути суттєво ускладнене в залежності від ступеня кореляції критеріїв. Розглянемо два критерії: i та j. Для того, щоб визначити ступінь кореляції i-го та j-го критеріїв, достатньо обчислити кут між градієнтами c^i та c^j:

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\left(c^i\right)^T c^j}{\left\|c^i\right\|_2 \left\|c^j\right\|_2}\right).$$

Чим менше цей кут, тим більше кореляція між критеріями.

Якщо ж між критеріями є кореляція, то можуть виникати наступні ситуації. Нехай у багатокритеріальній задачі лінійної оптимізації, яка представлена на рис. 1.14, самим важливим є критерій із градієнтом c^1, другим іде критерій з градієнтом c^2, нарешті, найменш важливим із трьох є критерій, якому відповідає c^3. Нехай оптимальна множина $\Theta = \left\{x^1\right\}$.

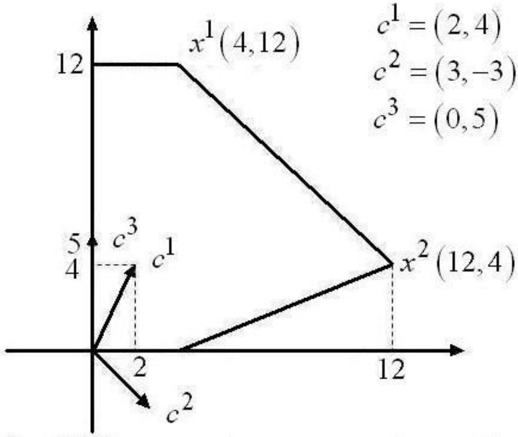


Рис 1.14. Приклад, що ілюструє кореляцію критеріїв

У цій багатокритеріальній задачі лінійної оптимізації існують гарні на перший погляд вагові вектори, яким відповідають погані оптимальні точки, і навпаки, погані вагові вектори утворюють гарні точки. Розглянемо вектор вагових коефіцієнтів $\lambda^1 = (0,7; 0,2; 0,1)$. Хоча цей вектор цілком відповідає ранжуванню критеріїв, обраному особою, що приймає рішення, вектор λ^1 дає в складовій задачі лінійного програмування оптимальну точку x^2, яка не є гарною. Розглянемо тепер ваговий вектор $\lambda^2 = (0,0; 0,1; 0,9)$, який суперечить первісному ранжуванню критеріїв, зробленим особою, що приймає рішення. Однак у складовій задачі лінійного програмування із вектором λ^2 генерується оптимальна точка x^1. Тобто оптимальний розв'язок містить найважливіший для задачі критерій з нульовою вагою.

Така суперечлива здоровому глузду поведінка вагового вектора – результат сильної кореляції векторів c^1 і c^3. Надаючи велику вагу критерію із градієнтом c^3, немає необхідності вводити будь-яку вагу для критерію з вектором c^1. Саме тому вектор λ^2 може дати оптимальну точку.

Одним із підходів, який можна використати для розв'язання проблеми даного типу, є застосування спеціально розроблених способів для зменшення потужності критеріального простору, наприклад, схем послідовного аналізу, відсіву і конструювання варіантів критеріїв для даного класу задач [94] і розбиття множини критеріїв на підмножини [74].

В основі багатьох людино-машинних процедур лежить підхід, який використовує різні згортки критеріїв ефективності. При цьому часто потрібна інформація від особи, що приймає рішення, про їх зважуючі коефіцієнти. Хоча в багатьох випадках особа, що приймає рішення може кількісно визначити важливість критеріїв, ця задача є для неї далеко не простою. Як правило, люди можуть давати завищені оцінки тим критеріям, які порівняно мало впливають на вибір, і недооцінювати найбільш суттєві. Тому для аналізу взаємозв'язків між критеріями пропонується провести кластеризацію критеріального простору, яка дозволить виявити і побудувати підмножини суперечливих критеріїв і кластери сильно зв'язаних критеріїв, що в свою чергу дає додаткову інформацію особі, що приймає рішення для більш обґрунтованого підбору зважених коефіцієнтів.

1.6. Визначення оптимальних вагових векторів

На додаток до попередніх міркувань про фактори, що впливають на Λ_E, можна чекати, що множина Λ_E буде звужуватися в міру збільшення розмірності задачі. Це відбувається тому, що можна очікувати розширення ефективної множини зі збільшенням розмірності задачі. Таким чином, з'являються додаткові труднощі при оцінці оптимального вагового вектора $\lambda \in \Lambda_E$.

Навіть якби вдалося оцінити оптимальний ваговий вектор, є можливість зустрітися з труднощами при визначенні оптимальної точки. Нехай багатокритеріальна задача лінійної оптимізації має вигляд, як зображено на рис. 1.15. Розглянемо два випадки: 1) коли оптимальна точка $\left(x^4\right)$ не є крайньою; 2) коли оптимальна точка $\left(x^5\right)$ − крайня.

Для обох точок $\lambda = \left(\frac{11}{25}, \frac{14}{25}\right) \in \Lambda_P$.

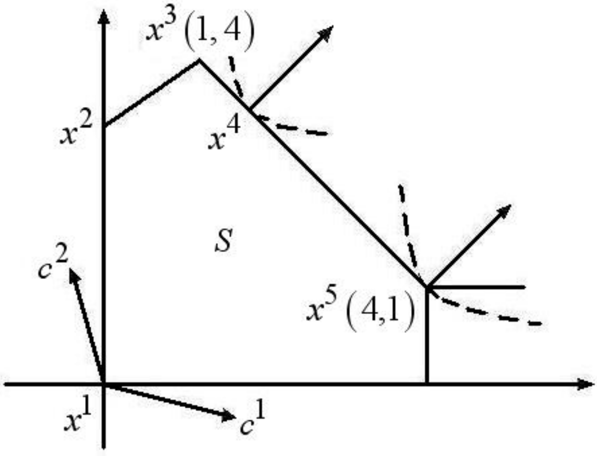


Рис 1.15. Ілюстрація визначення оптимального вагового вектора

Розв'язуючи складену задачу лінійного програмування із $\lambda = \left(\frac{11}{25}, \frac{14}{25}\right)$ симплекс-методом, припускаємо, що заміщення йде від x^1 через x^2 до x^3. Коли оптимальна точка не крайня, як x^4, розв'язок можна одержати як розв'язок задачі лінійного програмування незалежно від того, який ваговий вектор був узятий. Якщо ж оптимальна точка крайня, як x^5, і існують альтернативні оптимуми, то в складовій задачі лінійного програмування як розв'язок може бути отримана не та крайня точка. Це може трапитися навіть тоді, коли, як у цьому прикладі, використовується такий ваговий вектор, для якого градієнт цільової функції складової задачі лінійного програмування точно збігається за напрямком з локальним градієнтом функції корисності.

Отже, при використанні методів, заснованих на вагових векторах, з найрізноманітніших причин треба бути надзвичайно уважними.

1.7. Існування ефективних розв'язків та зовнішня стійкість

Існування ефективних розв'язків можна гарантувати для досить широкого кола задач. На відміну від ідеальних рішень, головною умовою існування яких є вкрай малоймовірна взаємна несуперечність цілей, у цьому випадку виявляються достатніми вимоги, що звичайно не зачіпають взаємозв'язків між цілями і задовольняють більшість прикладних задач. Нерідко ці вимоги одночасно з існуванням оптимумів Парето забезпечують зовнішню стійкість їх множини $P(F,X)$, тобто коли $\forall x \in X \ \exists x^* \in P(F,X): F\left(x^*\right) \geqq F(x)$.

Тим самим множина $P(F,X)$, внутрішня стійкість якої випливає з її означення, виявляється рішенням фон Неймана − Моргенштерна, що відповідає квазипорядку $R(F)$ [114].

Теорема 1.2. Для існування ефективних розв'язків задачі (F,X) і, більше того, зовнішньої стійкості множини $P(F,X)$ досить виконання однієї з наступних умов:

(1) $|X| < \infty$;

(2) X компактна, функції $f_j(x)$, $j \in N_l$, напівнеперервні зверху;

(3) множини $D(x) = \left\{F(X) - R_+^l\right\} \cap \left\{F(x) + R_+^l\right\}$ компактні при всіх $x \in X$.

Важливим частковим випадком опуклих моделей є лінійні багатокритеріальні задачі, коли множина допустимих розв'язків поліедральна, тобто задана скінченною системою лінійних нерівностей, а цільові функції $f_1, f_2, ..., f_l$ лінійні.

Будемо називати багатокритеріальну задачу $Z(F,X)$ регулярною, якщо множина $F(X)-R_+^l$ замкнута. Достатньою умовою регулярності є лінійність $Z(F,X)$ (у цьому випадку $F(X)-R_+^l$ представляє собою різницю поліедральних множин, а тому також поліедральна й, отже, замкнута [121]). Регулярність, крім того, забезпечується компактністю множини $F(X)$ і, тим більше, X (останнє − за умови неперервності F).

Теорема 1.3. За умови регулярності опуклої багатокритеріальної задачі $Z(F,X)$ непорожність множини ефективних розв'язків $P(F,X)$ еквівалентна її зовнішній стійкості.

Однаковою мірою з існуванням ефективних розв'язків для багатокритеріальних задач характерні їх неєдиність і, більше того, $R(F)$– нееквівалентність, а тим самим $R(F)$– незрівнянність різних елементів множини $P(F,X)$. Передумовою множинності оптимумів Парето є неповнота квазіпорядка $R(F)$; то, що така множинність типова, видно, наприклад, з наступного. Як було показано, існування ефективних розв'язків часто супроводжує зовнішня стійкість $P(F,X)$. Якщо при цьому всім елементам даної множини відповідає одне і те саме ефективне значення $y^*=F(x)\ \forall x\in P(F,X)$, то тим самим оптимуми Парето автоматично перетворюються в ідеальні елементи, що існують лише у виняткових випадках.

Взагалі, множина ефективних розв'язків $P(F,X)$ тим ширше, чим (за інших рівних умов) більш суперечливий векторний критерій $F:X\to R^l$. При цьому у міру неперервного розширення критеріального конуса множина ефективних розв'язків розширюється стрибкоподібно. Дійсно, якщо перший з векторних критеріїв F^1, F^2, заданих на загальній множині допустимих розв'язків X, не менш суперечливий, ніж другий, то, згідно (1.10), (1.11), квазіпорядок $R(F^1)$ занурений в $R(F^2)$, а тому

$$P(F^1,X)=C^{P(F^1)}(X)\supseteq C^{P(F^2)}(X)=P(F^2,X),$$

що й стверджувалося. Сказане ілюструє рис. 1.16, де зображені множини розв'язків, ефективні щодо лінійних векторних критеріїв

$F_A(X)=\left(a^1\cdot x, a^2\cdot x\right)$, $F_B(X)=\left(b^1\cdot x, b^2\cdot x\right)$, причому F_B більш суперечливий, чим F_A (на рис. 1.14 множини $P(F_A,X)$ і $P(F_B,X)$ виділяються напівжирними лініями). Відмітимо, що у випадку повністю суперечливого векторного критерію справедлива рівність $P(F,X)=X$, тобто кожен допустимий план ефективний.

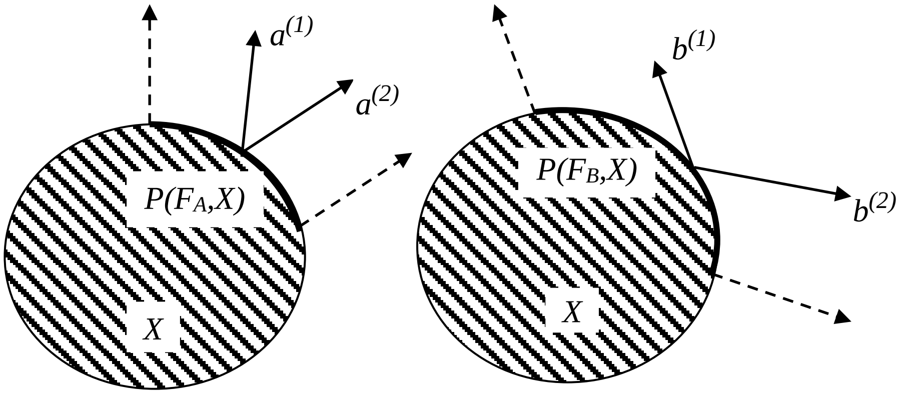


Рис. 1.16. Множини ефективних розв’язків

Залежність сукупності оптимумів Парето від другої складової багатокритеріальної задачі $Z(F,X)-$ допустимої множини $X-$ буде розглядатися в наступних розділах в залежності від конкретного завдання та властивостей допустимої множини X .

1.8. Загальна постановка векторних задач дискретної оптимізації

В багатокритеріальній задачі оптимізації порівняння розв’язків здійснюється за допомогою заданих на множині допустимих альтернатив числових функції $f_1,\ldots,f_s,f_{s+1},\ldots,f_l$, що називаються критеріями. Передбачається, що $l\geq 2$. Для кожного критерію $f_i, i\in N_l$, на числовій прямій R вказується підмножина, на якій він приймає значення.

Розглянемо багатокритеріальну задачу оптимізації. Критерії, що оптимізуються, представляються набором функцій:

$$\begin{gathered}\min F_1(x)\\ \max F_2(x)\end{gathered}\tag{1.19}$$

$$\text{за умови, } x \in X \subset R^n,$$

тут $F_1(x) = \left(f_1(x),..., f_s(x)\right), F_2(x) = \left(f_{s+1}(x),..., f_l(x)\right)$. Тобто з l функцій s мають мінімізуватись, а $l-s$ навпаки максимізуються, оскільки у практичному застосування часто виникає потреба у зменшенні одних критеріїв та збільшенні інших.

Набір функцій (1.19) можна представити у вигляді вектор-функції:

$$F = \left(-f_1(x),\ldots,-f_s(x), f_{s+1}(x),\ldots, f_l(x)\right), \tag{1.20}$$

максимум якої необхідно знайти.

В багатокритеріальній дискретній оптимізації задача формулюється шляхом визначення допустимої множини $X \subset R^n$ повністю або частково дискретної структури і заданого на ній векторного критерію $F(x) = \left(f_1(x),..., f_l(x)\right)$. Для кожної із компонент $x_j, j \in N_n$, вектора змінних $x = (x_1, x_2,..., x_n) \in X$ задані множини $X_j \subset R, j \in N_n$, її можливих значень, тобто $x_j \in X_j, j \in N_n$, і хоча б одна із множин $X_j, j \in N_n$, є скінченною або зліченною. Слід зазначити, що кожний розв’язок $x \in X$ характеризується відповідною векторною оцінкою, тобто вектором $F(x)$. Тому вибір оптимального розв’язку із множини всіх розв’язків зводиться до вибору оптимальної оцінки із множини оцінок:

$$Y = F(X) = \left\{ y \in R^l \,\middle|\, y = F(x), x \in X \right\}.$$

При цьому оптимальність оцінок (розв’язків) визначається деяким принципом оптимальності, заданим в критеріальному просторі.

Таким чином тут і надалі будемо розглядати векторну (багатокритеріальну) задачу $Z(F, X)$ максимізації векторного критерію $F = \left(f_1,..., f_l\right)$, визначеного на непорожній обмеженій дискретній множині.

Під розв’язанням цієї задачі як правило розуміють знаходження елементів однієї із наступних множин [81,113]:

1) множини ідеальних $I(F, X)$ розв’язків:

$$I(F, X) = \left\{ x \in X : \nu(x, F, X) = \varnothing \right\}, \tag{1.21}$$

$$\nu(x, F, X) = \left\{ y \in X \mid \exists i \in N_l : f_i(y) > f_i(x) \right\}.$$

2) множини Парето $P(F,X)$, тобто множини ефективних (оптимальних за Парето) розв'язків:

$$P(F,X)=\{x\in X:\pi(x,F,X)=\varnothing\} \tag{1.22}$$

$$\pi(x,F,X)=\{y\in X:F(y)\geq F(x),F(y)\neq F(x)\}$$

3) множини Слейтера $Sl(F,X)$ слабо ефективних розв'язків:

$$Sl(F,X)=\{x\in X:\sigma(x,F,X)=\varnothing\} \tag{1.24}$$

$$\sigma(x,F,X)=\{y\in X:F(y)>F(x)\}$$

4) множини Смейла $Sm(F,X)$ строго ефективних розв'язків:

$$Sm(F,X)=\{x\in X:\eta(x,F,X)=\varnothing\} \tag{1.25}$$

$$\eta(x,F,X)=\{y\in X\setminus\{x\}:F(y)\geq F(x)\}.$$

Очевидно, що:

$$I(F,X)\subset Sm(F,X)\subset P(F,X)\subset Sl(F,X). \tag{1.26}$$

Елемент множини $I(F,X)$ називається ідеальним розв'язком. Цей розв'язок є найкращим відразу за всіма частковими критеріями. Оптимальність за Парето означає, що значення будь-якого із часткових критеріїв можна збільшити лише за рахунок зменшення значення хоча б одного з інших часткових критеріїв. Для слабо ефективної оцінки (розв'язку) не знайдеться такої оцінки (розв'язку), яка була б більше відразу за всіма частковими критеріями.

Проблема відшукання всіх ефективних розв'язків (оцінок) представляє не тільки теоретичний, але й великий практичний інтерес. Це пояснюється тим, що побудова всієї множини ефективних розв'язків або ж деякої досить широкої її підмножини є одним з перших етапів у цілому ряді процедур оптимального вибору при багатьох критеріях. У наш час розроблена вже досить велика кількість різних методів виділення множини ефективних розв'язків. Докладний виклад цих методів виходить за рамки даної книги. Тому обмежимося лише коротким описом відомих методів, обговоренням проблеми і посиланням на роботи, у яких викладаються відповідні методи і алгоритми.

Переважна більшість методів побудови множини ефективних розв'язків ґрунтується на тих або інших умовах оптимальності. Найчастіше використаються необхідні умови, що полягають у тому, що якщо точка x^0 ефективна (у тому або іншому розумінні), то вона є розв'язком задачі максимізації або мінімізації (можливо, при деяких додаткових обмеженнях) числової функції спеціального вигляду при належним чином призначених величинах параметрів, що входять у цю функцію і (або) обмеження. Отже, задача виділення всіх ефективних розв'язків зводиться до відповідної скалярної параметричної задачі оптимізації. Таку заміну задачі з векторним критерієм параметричним сімейством звичайних екстремальних задач часто називають скаляризацією вхідної задачі. Якщо використовувані умови оптимальності є і достатніми, то множина розв'язків параметричної задачі є шуканою множиною ефективних розв'язків. У протилежному випадку побудована шляхом скаляризації множина може містити зайві точки, які варто виявити й відсіяти.

РОЗДІЛ 2. СУЧАСНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ВЕКТОРНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ

2.1. Дослідження та аналіз сучасного стану векторної оптимізації

Дослідженню та аналізу сучасних методів розв'язання задач векторної оптимізації і проблеми в цілому присвячено багато робіт оглядового характеру у вітчизняній [27, 28, 87, 113–115] і закордонній [169, 181, 194, 196] літературі. Проте в цих роботах не відображено на достатньому рівні переваги і недоліки зазначених методів. Зупинимося докладніше на цьому питанні.

Уперше проблема багатокритеріальної векторної оптимізації виникла в італійського економіста і соціолога В. Парето при математичному дослідженні товарного обміну. Надалі інтерес до проблеми векторної оптимізації підсилився в зв'язку з розробкою і широким використанням обчислювальної техніки в роботах економістів-математиків. І вже пізніше стало ясно, що багатокритеріальні задачі виникають не тільки в економіці, але й у техніці: наприклад, при проектуванні технічних систем, при оптимальному проектуванні інтегральних схем, у військовій справі тощо.

Векторна (багатокритеріальна) задача оптимізації лежить в основі математичної моделі, що описує деяку економічну систему або технічний об'єкт. Формалізуємо опис такої математичної моделі.

Нехай $x = \{x_j, j \in N_n\}$ − вектор змінних моделі; N_n − множина індексів вектора змінних, який належить простору n – вимірних векторів $x \in R^n$, звичайно передбачається невід'ємність вектора змінних $x \geq 0$; функціональний взаємозв'язок змінних встановлюється визначеними співвідношеннями, на які накладаються обмеження

$$G(x) \leq b, \quad x \geq 0,$$

де $G(x) = \left(g_1(x), g_2(x), ..., g_m(x)\right)$ − вектор функцій. Останні нерівності визначають допустиму область X значень змінних x, включену в простір змінних, $X \subset R^n$.

Функціонування системи, технічного об'єкта направлена на виконання зазначених цілей − критеріїв, функціонально зв'язаних з вектором змінних $f_k(x), \quad k \in N_l$, де N_l − множина індексів критеріїв. Множину $\left\{ f_1(x), f_2(x), ..., f_l(x) \right\}$ критеріїв можна представити у вигляді вектор-функції $F(x) = \{ f_k(x), k \in N_l \}$, який називають векторним критерієм (векторною цільовою функцією). Припускаючи, що кожен компонент векторного критерію спрямований на збільшення (максимізацію) свого значення, задача вибору за багатьма критеріями розв'язується як задача вибору за векторним критерієм $F(x)$ вектора змінних $x \geq 0$ з допустимої області і записується наступним чином:

$$Z(F,G): \quad \max F(x) = \{ f_k(x), k \in N_l \}$$

за умов

$$G(x) \leq b, \quad x \geq 0 .$$

Передбачається, що задача $Z(F,G)$ опукла, тобто кожна компонента векторного критерію $F(x)$ − угнута функція, а $g_i(x), i \in N_m$, − опуклі функції.

Множина точок X, що визначають допустиму область вектора змінних, є непорожньою компактною множиною

$$X = \{x \in R^n \mid x \geq 0, G(x) \leq b\} \neq \varnothing.$$

Звідси випливає, що існує розв'язок задачі $Z(F,G)$ по кожній компоненті векторного критерію $f_k(x), k \in N_l$.

Векторна задача $Z(F,G)$ розглядається для випадку, коли точки оптимуму $x^k, k \in N_l$, отримані при розв'язанні задачі за кожним критерієм $f_k(x), k \in N_l$, окремо, не збігаються (при збігу розв'язок вважається ідеальним). Тому з математичної точки зору векторна задача $Z(F,G)$ є некоректною, тобто якщо один із критеріїв $f_k(x), k \in N_l$, досяг свого оптимуму, то поліпшення інших компонент векторного критерію неможливо.

Звідси випливає, що під розв'язанням векторної задачі $Z(F,G)$ можна розуміти тільки якийсь компромісний розв'язок, що задовольняє в тому чи іншому розумінні усі компоненти векторного критерію. На вирішення цієї проблеми і спрямовані основні методи розв'язання векторних задач оптимізації. Перша спроба формулювання оптимального розв'язку зроблена в роботі В. Парето [189].

Означення 2.1. (Оптимальність за Парето)

У векторній задачі математичного програмування точка $x^0 \in X$ оптимальна за Парето, якщо вона допустима і не існує іншої точки x', для якої

$$f_k(x') \geq f_k(x^0), \forall k \in N_l ,$$

і хоча б для одного критерію $k \in N_l$ виконується строга нерівність.

Множина таких точок називається множиною $P(F,X)$ точок, оптимальних за Парето, $P(F,X) \subset X$. Їх також називають множиною точок, що непокращуються, тобто не можна знайти іншої такої точки, щоб покращувався який-небудь із критеріїв, а інші при цьому не погіршувалися. Множина точок, оптимальних за Парето, лежить між точками оптимуму, отриманими при розв'язанні векторної оптимізаційної задачі окремо за кожним критерієм. Звичайно методи розв'язання векторних задач побудовані таким чином, щоб вийти на одну з точок оптимуму за Парето, з огляду на важливість (пріоритетність) того чи іншого критерію $q \in N_l$. В даний час розроблено досить багато методів розв'язання задач векторної оптимізації, але майже всі вони носять евристичний характер. При розробці методів розв'язання векторних задач приходиться вирішувати специфічні проблеми, що так чи інакше зв'язані з вибором принципу оптимальності, який визначає оптимальність того чи іншого розв'язку. Розглянемо ці проблеми відповідно до [87].

Нормалізація критеріїв. У векторних задачах оптимізації локальні критерії мають різний фізичний зміст і, як наслідок, вимірюються в різних одиницях, масштаби їх не порівнювані, тому неможливе порівняння якості отриманих результатів за кожним критерієм. Операція зведення масштабів локальних критеріїв до єдиного, звичайно безрозмірного, зветься нормалізацією. Розв'язання проблеми нормалізації передує побудові принципу оптимальності.

Вибір принципу оптимальності. У задачах векторної оптимізації принцип оптимальності визначає властивості оптимального розв'язку і дає відповідь на головне питання − у якому розумінні оптимальний розв'язок переважає всі інші допустимі розв'язки і дає правило пошуку цього оптимального розв'язку. Принцип оптимальності − це основна проблема векторної оптимізації. Вона безпосередньо зв'язана з проблемою нормалізації критеріїв. Якщо не виникає проблеми нормалізації критеріїв, то вибір принципу оптимальності ставиться на перше місце.

Урахування пріоритету критеріїв. Звичайно з фізичного змісту задачі зрозуміло, що локальні критерії мають різну важливість при розв'язанні задачі, тобто один локальний критерій має деякий пріоритет над іншим локальним критерієм. Це, звичайно, варто враховувати при виборі принципу оптимальності і визначенні області можливих розв'язків, віддаючи відому перевагу (пріоритет) більш важливим критеріям. Цю проблему можна сформулювати в такий спосіб: знайти математичне визначення пріоритету і ступінь впливу його на розв'язання задачі векторної оптимізації.

Обчислення оптимуму задачі векторної оптимізації. Насьогодні досягнуті певні успіхи в області розв'язання широкого круга оптимізаційних задач. Але існує багато прикладів, коли обчислювальні методи й алгоритми стають непридатними для розв'язання указаних задач в результаті невеликих змін і додавань до початкової задачі, тому виникає проблема − обчислення оптимуму побудованої задачі векторної оптимізації. Додамо, що перераховані проблеми так чи інакше зводять багатокритеріальну задачу до однокритеріальної, тобто зводять до проблеми обчислення оптимуму.

Розв'язання перерахованих проблем (а як наслідок, і розвиток методів розв'язання задач векторної оптимізації) відбувається в декількох напрямках. Виділимо основні з них:

методи, що ґрунтуються на згортанні критеріїв у єдиний;

методи, побудовані на накладенні обмежень на критерії;

методи цільового програмування;

методи, засновані на відшуканні компромісного рішення;

методи, в основі яких лежать людино-машинні процедури прийняття рішень (інтерактивне програмування).

Існують інші класифікації методів розв'язання векторних задач, зокрема в залежності від вигляду наданої інформації про важливість критеріїв та ін.

Широке поширення одержав напрямок, пов'язаний із прийняттям рішень в умовах невизначеності [57–60, 96, 97, 102, 103, 160, 199].

2.1.1. Огляд методів розв'язання векторних задач оптимізації

В останні роки методам розв'язання векторних задач присвячена велика кількість літератури та інтерес до цієї області продовжує зростати. Важливою особливістю сучасного етапу розвитку даного наукового напрямку є більш широке використання методів багатокритеріальної оптимізації для розв'язання практичних задач. У рамках даного огляду зроблена спроба розглянути основні роботи цього напрямку, що мають прикладний характер. При цьому, з огляду на велику кількість літератури, присвяченої цьому питанню, автори обмежилися в основному роботами вітчизняних авторів, що у загальному досить повно відображають стан світової науки.

Сучасний етап застосування математичних методів розв'язання прикладних багатокритеріальних задач характеризується розробкою комплексних математичних засобів розв'язання практичних задач у діалоговому режимі, що виникають у процедурах планування, проектування і керування, орієнтованих на масового користувача, що не має спеціальної математичної підготовки.

Перелічимо коротко деякі з основних класів багатокритеріальних задач, що виникають у практичних процедурах.

1. **Задача індивідуального вибору** ("зосереджена" задача) однією особою, що приймає рішення, і при цілком відомих вхідних даних, зосереджених у руках особи, що приймає рішення. Цій класичній задачі присвячене велике число публікацій.

2. **Дворівнева задача вибору** (до якої зводяться чисельні багаторівневі постановки), де частину вхідних даних і результату вибору особа, що приймає рішення, повинна уточнювати зі своїми підлеглими й експертами. Цій задачі присвячені десятки (кілька відсотків) публікацій, причому результати далекі від видачі конструктивних рекомендацій для розв'язання реальних проблем.

3. **Задача цілеспрямованого формування допустимих розв'язків.**

3.1. **Задача при фіксованих обмеженнях.** Для цієї задачі характерна наступна ситуація. Цілі і вимоги формуються особою, що приймає рішення у категоріях вхідних показників (критеріїв). У цих же категоріях відбувається вибір найбільш кращого розв'язку й обґрунтування його перед вищими інстанціями. Зв'язки й обмеження, що визначають множину допустимих розв'язків, знаходяться поза сферою компетенції особи, що приймає рішення. Вони входять у компетенцію технологів і на рівні особи, що приймає рішення, у явному вигляді апріорно невідомі. Формування допустимих варіантів розв'язання складних задач типу проектування великих технічних систем, галузевого планування та ін. є далеко не простою задачею і в практичних процедурах займає основну частину часу та зусиль. Цій задачі присвячені лише окремі роботи, в основному евристичного характеру.

3.2. **Задача при варіюючій структурі обмежень** (задача системної оптимізації [35, 36]). У випадку, якщо можливості (обмеження та множина заходів) не відповідають потребам (цілям), особа, що приймає рішення до певної міри може цілеспрямовано вносити структурні зміни як у сам об'єкт керування, так і в його зв'язки з зовнішнім середовищем (виділення додаткових обсягів деяких дефіцитних ресурсів, зниження їх питомих витрат, використання нових технологій тощо). Виникає задача цілеспрямованого формування і вибору не тільки розв'язку моделі, але і її структурних змін (наприклад, варіювання переліку змінних, коефіцієнтів матриці і правих частин обмежень).

4. **Розподілена задача формування і вибору розв'язків.** Найбільш поширеними, типовими для практики розв'язання складних задач є процедури розв'язання комплексу взаємозалежних підзадач колективом фахівців у режимі багатосторонньої взаємодії їх між собою і з комп'ютером. При цьому процеси підготовки формування й

уточнення даних паралельно виконуються на багатьох робочих місцях особами, що формують розв'язки, і зв'язані не тільки з обчисленнями, але і частковим прийняттям рішень. При цьому компетенція, функції і відповідальність особи, що приймає рішення, і особи, що формує рішення, виявляються розподіленими по робочих місцях. Для розв'язання перерахованих задач, потрібно залучення усе більшого числа експертів, що складають основну частину масового користувача людино-машинних систем.

Слід зазначити, що елементарними осередками складних задач класів 2, 3, 4 є зосереджені задачі класів 1 і 3.2, тому в даному огляді в першу чергу розглядаються прикладні математичні методи розв'язання задач цих двох класів.

Враховуючи прикладну спрямованість даного огляду, тут не розглядаються роботи, що мають чисто теоретичний характер. Однак слід зазначити, що в останні роки в області математичної теорії вибору отриманий ряд істотних результатів, на що вказує велика кількість статей (див., наприклад, [179, 181, 186, 187, 194–197, 200]) і монографій [28, 29, 37, 43, 79, 95, 99, 161, 167]). Це дозволяє сподіватися, що найближчим часом позитивні зрушення в теорії позначаться і в застосуваннях.

Методи побудови парето-оптимальних розв'язків. Проблема побудови парето-оптимальних (ефективних) розв'язків є однією з найбільш поширених у векторній оптимізації. Для її розв'язання можна обрати два шляхи: вести пошук безпосередньо на множині допустимих розв'язків або спочатку ввести параметризуючу множину і вести пошук на ній.

Позначимо $X=\{x\}$ множину усіх допустимих розв'язків, $x=(x_1,\ldots,x_n)$ − вектор розв'язків, X^* − множина Парето, $X^* \subseteq X$, $\varphi(x)=\{\varphi_j(x)\}$, $j \in N_l$ − вектор часткових критеріїв, Φ − множина допустимих розв'язків у просторі критеріїв $\Phi=\{\varphi \mid \varphi(x), x \in X\}$, Φ^* − множина Парето в просторі критеріїв. Параметризація множини Парето $X^*(\Phi^*)$ для опуклих множин $X(\Phi)$ основана на результатах про гомоморфізм цієї множини і множини значень A коефіцієнтів $a=\{a_j\}$ лінійної згортки $F(x,a)\,(F(\varphi,a))$, що вже стали класичними [113].

Для лінійного випадку широко використовуються алгоритми [169], засновані на побудові базисних ефективних планів. Серед них слід зазначити ефективний алгоритм [114], у якому відсутня процедура перебору і перевірки на ефективність граней множини X. Це дає значний ефект, особливо при розв'язанні задач великих розмірностей. Для дослідження моделей складних об'єктів, що відносяться до класу багатокритеріальних задач лінійного й опуклого програмування, запропонований метод узагальнених множин досяжності. Пакет програм Потенціал, що реалізує цей метод, дозволяє особі, що приймає рішення, у діалоговому режимі на основі перетинів і проекцій множини допустимих розв'язків уявити собі її структуру.

Для опуклих багатокритеріальних задач застосовуються алгоритми, що використовують поняття карти паретівської границі [114]. Ідея методу полягає в параметризації множини Парето елементами більш простої множини A. Для цього шукається відповідне відображення $\sigma: A \to E^l$ таке, що для будь-якого φ, що належить множині Парето, знайдеться значення параметра $a \in A$ таке, що $\sigma(a) = \varphi$. Пара $M = (A, \sigma)$ називається картою паретівської границі [114]. Як відображення, зазвичай, використовується розв'язок задачі максимізації деякого узагальненого критерію, що залежить від параметра a. Наприклад, якщо за узагальнений критерій вибрати $\xi(\varphi, a) = \min\limits_{j \in N_l} (\varphi_j / a_j)$, а $A = \{a \mid \sum\limits_{j=1}^{l} a_j = 1, a_j \geq 0,\ j \in N_l\}$, то точки множини Парето знаходяться за допомогою розв'язання задачі $t^* = \max\{t \mid a_j t \leq \varphi_j(x),\ \ j \in N_l,\ \ x \in X\}$.

Параметризація σ має при цьому вигляд: $\sigma(a) = a_j t(a^*)$. Для наведеного прикладу параметризації відомі необхідні і достатні умови Парето-оптимальності розв'язку, а також інші способи параметризації (асортиментна, параметризація обмеженнями та ін. [114]). За допомогою карт паретівської границі розроблені алгоритми кусково-лінійної апроксимації множини Парето [114]. Однак зазначений метод нестійкий щодо похибок обчислення часткових критеріїв $\varphi_j(x)$, апроксимації множини X^0 і параметризуючої множини A. Виникає проблема регуляризації цієї задачі. Різні умови регуляризації, дозволяють будувати мережу на параметризуючій множині A для апроксимації множини Парето з заданою точністю.

На практиці побудова такої мережі ускладнюється значними обчислювальними затратами. Наприклад, у задачах проектування обчислення $\varphi_j(x)$ звичайно досить трудомістке, а для одержання тільки одного вузла мережі потрібно розв'язати задачу максимізації узагальненого критерію $\xi(\varphi, a)$, тобто потрібно декількаразове обчислення $\varphi(x)$. Для зниження обчислювальних витрат пропонується використовувати прийом, названий спільною оптимізацією. Виграш виходить за рахунок спеціальної схеми, що забезпечує сполучення обчислень значень узагальненого критерію для ряду значень параметра a при оптимізації його при одному зі значень параметра.

Дискретні оптимізаційні задачі побудови множини Парето у загальному випадку є переборними. Для скорочення перебору потрібно враховувати специфіку задачі. У роботі [78] докладно викладаються сім алгоритмів скороченого перебору, що реалізують метод ефективного розв'язання дискретної задачі максимізації функцій спеціального вигляду, що містять операцію мінімізації, з монотонними обмеженнями.

У [113] є короткий опис методів побудови множини Парето для різних багатокритеріальних задач перерахованих типів.

У деяких задачах проектування, коли множина Φ^0 неопукла і незв'язна, іноді буває доцільно розширити множину розв'язків, «підозрілих» якщо не на оптимальність, то на раціональність. З цією метою вводиться поняття $\Lambda -$ оптимальності розв'язків; оптимальність за Парето є його частковим випадком [198]. Розв'язок $x_\Lambda \in X^0$ назвемо $\Lambda -$ оптимальним, якщо не існує іншого розв'язку x, такого, що $\varphi(x_\Lambda) \in \varphi(x) + \Lambda$. Тут $\Lambda -$ опуклий $l -$ вимірний конус, $\Lambda \subseteq E^l$, множина $\varphi(x) + \Lambda -$ опуклий конус з вершиною в точці $\varphi(x)$; Λ називається конусом переваг. Доведені конструктивні необхідні і достатні умови $\Lambda -$ оптимальності, показано, що побудова $\Lambda -$ оптимальних розв'язків зводиться до задачі максимізації деякої функції, названої $\Lambda -$ метрикою, і що множина $\Lambda -$ оптимальних розв'язків параметризується деяким перетином конуса Λ; пропонується людино-машинна процедура побудови $\Lambda -$ оптимальних розв'язків.

У випадку, коли $\varphi_j(x)$ належить класу функцій, що задовольняють умові Ліпшиця, можна поставити задачу побудови наближених розв'язків, тобто так звану задачу $\varepsilon -$ апроксимації множини Парето. Досліджуються теоретичні питання побудови $\varepsilon -$ апроксимації множини Парето за мінімальне число кроків (крок обчислення значень $\varphi_j(x), j \in N_l$, у точці x) і пропонується схема оптимального алгоритму.

Інший спосіб побудови $\varepsilon -$ апроксимації множини Парето − випадковий пошук [150]. Основна ідея полягає в тому, що якщо обчислити значення векторного критерія $\varphi(x)$ у N точках, отриманих за допомогою датчика рівномірно розподіленої випадкової величини, виділити з них парето-оптимальні, то для будь-якої заданої точності наближення $\varepsilon > 0$ можна вказати таке число N, що отримана множина буде ε – апроксимацією множини Парето із заданою імовірністю. Однак для складних прикладних задач проектування [150] збільшення числа точок, в яких необхідно обчислити значення вектора критеріїв, приводить до істотного росту обчислювальних витрат. Тому на практиці використовуються методи випадкового пошуку при порівняно невеликих числах $N \sim 50$, що не цілком коректно теоретично, але дозволяє досить ефективно вирішувати інженерні задачі з прийнятною для інженерних розрахунків точністю.

Представляють інтерес постановки і дослідження задач пошуку ефективних розв'язків у багаторівневих системах. Для часткового випадку двох критеріїв у роботі [150] приводяться конкретні алгоритми агрегування множин Парето, отриманих на нижніх рівнях ієрархічної системи за допомогою особи, що формує рішення. Використовуються кусково-лінійна апроксимація у множині Парето верхнього рівня, а також алгоритми дезагрегації.

Практично у всіх реалізаціях розглянутих алгоритмів у діалогових людино-машинних системах, крім побудови всієї множини Парето, передбачається можливість виділення деяких «корисних» підмножин. Для їх отримання на основі деякої додаткової інформації від особи, що приймає рішення, будуються скалярні функції або критеріальні обмеження, що дозволяють звужувати область пошуку і керувати процесом знаходження ефективних точок [79, 90, 150]. Пропонується ітераційна процедура, у якій для тих же цілей використовуються точки, сформовані особою, що формує рішення. В їх околі комп'ютер генерує підмножину допустимих точок і виділяє ефективні, частину із яких відмічає особа, що формує рішення, і процедура повторюється.

Розроблені програми виділення ефективних розв'язків використовуються в багатьох організаціях для розв'язання широкого спектра прикладних задач: при проектуванні технічних систем [94, 150], галузевому плануванні [90, 115], дослідженні макроекономічних моделей [91, 114] та ін.

Методи багатокритеріального вибору на заданій множині альтернатив. Класифікація методів розв'язання задач вибору, що існує в даний час, далеко неоднозначна. Наявність докладних оглядів [2, 27, 28, 79, 87, 89, 114, 115, 151] і прикладна мета даного огляду дозволяють обмежитися грубою класифікацією, що приводиться нижче і не претендує на загальність.

До першої групи методів, мабуть найбільш популярних при розв'язанні практичних задач, можна віднести метод обмежень і різні його модифікації. Починаючи з перших робіт, присвячених методу обмежень [21], він постійно ускладнювався й удосконалювався, таким чином його варіанти так чи інакше використовуються в багатьох процедурах вибору [90, 112, 114, 115, 127, 133–136 та ін.]. Ідея методу полягає в наступному: для всіх критеріїв φ_j, $j \in J$, крім j_0-го, встановлюються бажані пороги a_j і до обмежень $x \in X^0$ додаються обмеження $\varphi_j(x) \geq a_j$, $j \in J$. На отриманій множині максимізується критерій $\varphi_{j0}(x)$. Ітерація людино-машинної процедури полягає у варіюванні величин a_j номера максимізуючого критерію (особа, що приймає рішення) і розв'язання відповідної задачі максимізації (комп'ютер). Близьким за ідеологією до методу обмежень є метод поступок [112]. Метод поступок найчастіше використовується, коли критерії можливо упорядкувати по важливості. Спочатку максимізується найважливіший (без втрати загальності перший) критерій, після чого особа, що приймає рішення вказує можливу поступку за цим критерієм Δ_1 і до обмежень $x \in X^0$ додається обмеження $\varphi_1(x) \geq \varphi_1^0 - \Delta_1$, де φ_1^0 – максимальне значення першого критерію. На отриманій множині максимізується другий критерій і т. д. Без додаткових обмежень метод поступок може збігатися до довільного наперед заданого (ефективного) розв'язку [112]. В [115] приводиться модифікація методу поступок для випадку, коли упорядкування критеріїв по важливості не обов'язково. При цьому вибір величини поступки на кожному кроці діалогової процедури відбувається за допомогою особи, що приймає рішення і деякого набору правил, що забезпечують збіжність алгоритму.

Характеризуючи методи обмежень у цілому, варто сказати, що в них, як правило, не проводиться чіткої грані між критерієм і обмеженням [115]. Звичайно методи обмежень не претендують на одержання «оптимального» розв'язку або на можливість організувати збіжну процедуру, однак вони і не накладають ніяких істотних вимог на поведінку особи, що приймає рішення, надаючи їй можливість працювати в звичних категоріях.

Друга група методів може бути охарактеризована як методи, що використовують поняття цільової функції (функції корисності) [79, 115, 200]. Основна ідея полягає в тому, що структуру переваг особи, що приймає рішення, можна формалізувати у вигляді скалярної цільової функції $F(\varphi(x), \lambda)$, де λ – вектор параметрів. Вигляд функції задається апріорно (часто вона лінійна). Параметрам λ надаються деякі початкові значення λ^0, і розв'язується задача

$$\max\{F(\varphi(x),\lambda^0) \mid x \in X\}. \qquad (2.1)$$

Отримані значення критеріїв пропонуються на розгляд особи, що приймає рішення, і, у випадку незадоволеності з її боку отриманим розв'язком, параметри λ змінюються відповідно до деяких принципів. Велика кількість процедур такого роду описана в [79], див. також [115]. Трохи інший підхід полягає в наступному. Передбачається, що між функцією корисності і перевагами особи, що приймає рішення, (описуваним бінарним відношенням R, апріорі невідомим) існує (принаймні локально) наступна відповідність:

$$\forall x, y \in X \quad F(\varphi(x),\lambda) \geq F(\varphi(y),\lambda) \Leftrightarrow xRy \qquad (2.2)$$

Тоді при порівнянні особою, що приймає рішення деяких значень $\{x^s, y^s\}, s \in S$, із X^0 одержуємо систему нерівностей відносно λ:

$$F(\varphi(x^s),\lambda) \underset{<}{\geq} F\varphi(y^s),\lambda) \qquad (2.3)$$

Якщо (2.3) має єдиний розв'язок, то переходимо до розв'язання задачі (2.1), у протилежному випадку λ^0 вибирається з (2.3) за деякими правилами (наприклад, як чебишевська точка системи (2.3) з додатковим обмеженням $\|\lambda\| = 1$ [115]). Як правило, у процесі діалогу розмірність системи (2.3) збільшується, причому набір пар $\{x^s, y^s\}$ може змінюватися. Достоїнством другої групи методів є можливість використання для одержання розв'язків добре розроблених алгоритмів і стандартних програм розв'язання задачі (2.1), а також можливість роботи для особи, що приймає рішення у порядкових шкалах. Недоліки полягають у важкості перевірки умови (2.2) (а також у підборі підходящого класу функцій $F(\varphi,\lambda)$, у можливості одержання суперечливої системи (2.3) і у відсутності явного зворотного зв'язку між отриманим розв'язком і проміжними задачами, розв'язуваними особою, що приймає рішення.

Третьою групою методів, що примикає до другої, є методи, що використовують поняття "точки ідеалу" [79, 90, 115, 196] (цільове програмування, траєкторний підхід, сатисфакційний підхід). Методи цієї групи також приводять до розв'язання оптимізаційної задачі (2.1), однак функціонал має в цьому випадку більш ясний змістовний сенс. Передбачається, що в просторі критеріїв задана "точка ідеалу" (мета)

$\varphi^{\text{ід}}$ і в цьому ж просторі введено метрику $\rho(\varphi,\varphi^{\text{ід}})$. Формально оптимальний розв'язок виходить у результаті розв'язання задачі (2.1), де як функціонал виступає $\rho(\varphi,\varphi^{\text{ід}})$. Метрика вибирається з різних міркувань [115], частіше евклідова чи узагальнена евклідова. Популярною метрикою є $\max \lambda_j |\varphi_j - \varphi_j^{i\partial}|$, де λ_j – ваги функцій. Інформація про точку ідеалу отримується, як правило, або як завдання вищестоящого рівня, або у діалозі з особою, що приймає рішення.

Одним з діалогових втілень розглянутих методів є траєкторний підхід [79, 115 та ін.]. Основна ідея його полягає в наступному. У ряді ситуацій сформувати цільові настанови у вигляді послідовності точок в просторі критеріїв, що відповідають усе більш повному степеню досягнення мети (без урахування реальних обмежень). Сукупність таких точок називається траєкторією оптимальних розв'язків. При цьому геометрично оптимальному розв'язку відповідає перетин траєкторії з границею допустимої множини. Часто розв'язання такої задачі вдається одержати в явному вигляді. У випадку, якщо траєкторія в явному вигляді невідома, пропонується діалогова процедура, що основана на послідовному уточненні (наприклад, кусково-лінійній інтерполяції) траєкторії на підставі інформації, отриманої від особи, що приймає рішення. Досліджено властивості задач, що відповідають ряду практичних ситуацій, у деяких випадках доведена збіжність.

Четверта група методів може бути охарактеризована як градієнтні методи. Їх джерела відносяться до робіт Джофріона та ін. Особливістю цих методів є те, що в їх основу покладений будь-який підходящий формальний алгоритм оптимізації (наприклад, метод Франка–Вульфа). Передбачається, що переваги особи, що приймає рішення, можуть бути описані деякою скалярною функцією (апріорі невідомою). Регламентується ряд властивостей цієї функції. Для роботи обраного формального методу оптимізації інформація про функцію може знадобитися на двох етапах – для визначення її градієнта і для вибору величини кроку при одновимірній оптимізації. Пропонується обчислювати градієнт (вірніше, вектор, рівнобіжний йому) за допомогою визначення граничних норм заміщення одного з критеріїв всіма іншими. Ця операція покладається на особу, що приймає рішення. Вибір величини кроку також виконує особа, що приймає рішення. Для цього їй надається графік зміни всіх критеріїв уздовж обраного напрямку, і особа, що приймає рішення, повинна вказати на ньому оптимальну точку. Незважаючи на оптимізм, що виник після виходу роботи Джофріона з приводу практичної реалізації градієнтних методів, виявилося, що вони не позбавлені недоліків. До них в основному відносяться:

– труднощі для особи, що приймає рішення, у визначенні граничних норм заміщення (особливо точному);

– нетривіальність для особи, що приймає рішення, розв'язку задачі одновимірної оптимізації.

Проте градієнтні методи залишаються популярними, і ті або інші аспекти цих методів присутні в розроблених алгоритмах.

П'яту групу методів умовно назвемо теоретико-множинними. При їх використанні передбачається, що функція вибору особи, що приймає рішення, є бінарною, тобто описується бінарним відно-шенням R на множині альтернатив. На підставі спостереження за роботою особи, що приймає рішення, або шляхом опитування будується набір вирішальних правил, що встановлюють деякі властивості чи співвідношення відношення R. У найбільш простих випадках як вирішальні правила можуть виступати такі, як наприклад, «Чи є R транзитивним?», «Чи є R строгим порядком?» та ін. У більш складних випадках вирішальні правила самі по собі можуть бути досить складними. Після виявлення належності чергового вирішального правила R_j до R з допомогою комп'ютера виділяється ядро відношення R_j на множині $X_i - G_{R_j}(X_j)$ (тут X_j – множина альтернатив, що залишилися до j-го кроку). Далі покладається $X_{i+1} = G_{R_i}(X_i)$. Процедура припиняється, коли потужність ядра чергового вирішального правила буде досить мала. У деяких роботах будується послідовність відношень (досить простих класів), що апроксимують R зсередини.

У зв'язку з тим, що процедура припиняється при досить малій потужності ядра, велика кількість робіт присвячена оцінці потужності ядра відношень різних класів (див., наприклад, [14, 23, 24, 115]). Ця група методів широко використовується при дискретному характері множини X, однак алгоритми розв'язання відповідних математичних задач мають, як правило, переборний характер і тому дуже трудомісткі. Попереднє припущення про бінарність функцій вибору підкріплюється теоремою про те, що будь-яка функція вибору може бути представлена у вигляді комбінації бінарних функцій вибору.

Шосту групу методів можна назвати комбінованими методами [2]. Їх основною рисою є те, що методи перших чотирьох груп застосовуються не на множині Φ, а на ядрі деякого відношення R, тобто є комбінацією методів групи 5 з методами груп 1–4. У [114] приводиться докладний огляд таких методів у випадку, коли є відношенням векторного домінування. Тут, для ілюстрації, приведемо опис для більш широкого класу відношень $\tilde{R}$.

Нехай поряд з бінарним відношенням R, що описує переваги особи, що приймає рішення, є скалярний критерій $F(x)$, який досить добре, але не вичерпно, описує бажаний вибір. Як правило, відношення R вдається виявити лише частково, тобто встановити на множині Ф частковий порядок $\tilde{R} \in R$. При цьому потужність ядра $C_{\tilde{R}}(\Phi)$ досить велика і має сенс для виділення єдиного розв'язку використовувати критерій Φ, розв'язуючи задачу

$$\max\{F(x) \mid \varphi(x) \in C_{\tilde{R}}(\Phi)\}. \tag{2.5}$$

Для виявлення $\tilde{R}$ покладається, що $\tilde{R}$ можна описати за допомогою (лінійної) функції $F(\varphi, \lambda)$ у розумінні (2.2). У діалозі з особою, що приймає рішення при порівнянні пар планів виходить система (2.3) нерівностей, що накладають обмеження на можливі значення λ. Тоді ядро $C_{\tilde{R}}(\Phi)$ можна визначити

$$C_{\tilde{R}}(\Phi) = \{\varphi \mid \varphi = \arg\max\{F(\varphi, \lambda) \mid \varphi \in \Phi\}, \lambda \in K\}, \tag{2.6}$$

де K визначається (2.3). Наводиться алгоритм розв'язання задачі (2.5), (2.6) у лінійному випадку, що зводиться до модифікації симплекс-методу, і діалоговий режим використання приведеної схеми. Відзначаються недоліки, знайдені при практичному застосуванні, що полягають в нестійкості чергового наближення.

В останні роки активно стала розвиватися сьома група методів, названа системною оптимізацією.

Постановка задачі полягає в наступному [35, 36]. Нехай система прийняття рішень складається з моделей двох рівнів. Модель верхнього рівня утворює функцію цілі (в ролі її, зокрема, може виступати особа, що приймає рішення). Моделі нижнього рівня, що визначають множини допустимих розв'язків, досить складні, а можливо, не до кінця сформульовані і залежать від деяких параметрів, області можливих значень, які відомі лише наближено. Задача полягає не тільки в тому, щоб здійснити вибір найкращого розв'язку при фіксованих обмеженнях, а в цілеспрямованій зміні області допустимих розв'язків для одержання такого розв'язку.

У [36] пропонується наступна схема розв'язання задач системної оптимізації. Обмеження моделі мають вигляд $F_i(x, p) \geq 0, i \in I$. Модель верхнього рівня встановлює ідеальну точку x^*. Як правило, ідеальна точка не задовольняє обмеження, нехай підмножину $\tilde{I} \subseteq I$ обмежень порушено. Розв'язується задача мінімізації максимальної абсолютної величини від'ємних нев'язок: $\min g, g = \max_{i \in \tilde{I}} \lambda_i \,|\, F_i(x^*, p) \,|$, де мінімізація здійснюється за параметрами моделей обмежень. Області зміни цих параметрів відповідно уточнюються, причому сама множина $\tilde{I}$ в процесі розв'язання задачі може також змінюватися. Якщо в результаті оптимальне значення g дорівнює нулю, то задача розв'язана, у протилежному випадку відбувається звертання до моделі верхнього рівня для уточнення ідеальної точки. Ітерації закінчуються, коли $g = 0$.

Як можливий шлях розв'язання слабо структурованих задач може бути розглянуто використання дескриптивного підходу. Сутність його полягає в тому, що процедуру розв'язання задачі передбачається будувати на базі дескриптивної моделі поведінки досвідчених, висококваліфікованих осіб, що приймають рішення. У [79] приводяться дескриптивні процедури, що успішно використовувалися, зокрема, для розв'язання задач розподілу ресурсів.

Нарешті, необхідно відзначити, що поведінка людини (особи, що приймає рішення) не завжди (принаймні зовні) детермінована, а спілкування з нею ведеться найчастіше в розпливчастих термінах. Це дає підстави застосовувати описані методи в умовах невизначеності [160], а також з використанням теорії нечітких множин [96, 97, 102, 103]. Подробиці можна знайти в зазначених монографіях. Описана діалогова система для розв'язання багатокритеріальної задачі галузевого планування. Розв'язання задачі проводиться в три етапи: на першому і третьому використовуються методи другої і третьої групи, на другому – метод, аналогічний системній оптимізації, описаної вище. Система використовувалася для розв'язання планових задач розвитку галузі (модель галузі містить порядку 100 обмежень, серед них цілочислові і нелінійні). Описаний алгоритм багатокритеріальної оптимізації для задач великої розмірності, заснований на методах першої групи. Алгоритм застосовувався для вибору параметрів системи керування м'якою посадкою на планету. Наводяться приклади вдалого використання методів багатокритеріальної оптимізації для розв'язання задач проектування в електротехніці, де в основному використовуються методи першої і третьої груп. Приклади використання відповідних процедур в організаційних системах керування можна знайти в [79] та для розв'язання задачі розподілу ресурсів між науково-дослідними проектами (з використанням траєкторного підходу).

У [115] системна оптимізація використовується для розв'язання задачі галузевого перспективного планування в енергетиці, особливістю якої є наявність траєкторії оптимальних розв'язків і спеціального вигляду області можливих значень коефіцієнтів матриці і правих частин обмежень.

На закінчення відзначимо, що останнім часом з'явився також ряд робіт методичного плану, пов'язаних із проблемою більш адекватного обліку специфіки практичних задач. Велика увага приділяється обліку психологічних можливостей людини в задачах індивідуального прийняття розв'язку. Відзначається, що адекватне урахування цих особливостей різко змінює характер методів, оцінку їх практичної реалізації, намічаються можливі виходи з цього положення. Аналізується ряд організаційних і психологічних особливостей процедур формування розв'язків і формулюються необхідні для включення в ці процедури вимоги до математичних методів і моделей. Відзначається, що більшість відомих методів не задовольняють цим вимогам, і обговорюються можливі підходи до розробки відповідних алгоритмів.

2.2. Методи розв'язання векторних задач дискретної оптимізації

Розглянемо методи розв'язування багатокритеріальних задач дискретної оптимізації. Як уже було зазначено, вибір розв'язку задачі багатокритеріальної оптимізації, потрібно робити з множини ефективних альтернатив тобто Парето-оптимальних, або слабо ефективних альтернатив (оптимальних за Слейтером), або строго ефективних альтернатив (оптимальних за Смейлом).

Звичайно, якщо множина абсолютно-оптимальних альтернатив не є порожньою, то будь-яка з цих альтернатив може вважатися розв'язком багатокритеріальної задачі. Як було з'ясовано вище, на практиці такі задачі зустрічаються досить рідко. Таким чином, потрібно вирішити, що робити у випадку, коли множина абсолютно-оптимальних альтернатив є порожньою. Оскільки ефективні альтернативи є непорівнюваними між собою за перевагою, яка задається критеріями задачі, то для їх порівняння потрібна додаткова інформація про перевагу на множині критеріїв, а саме: скількома одиницями виграшу за одними критеріями можна компенсувати програш за іншими критеріями. Джерелом такої інформації може бути як особа, що приймає рішення, так і специфіка предметної області, в якій розв'язується задача.

Оскільки у рамках постановки багатокритеріальної задачі проблема вибору єдиної ефективної альтернативи не може бути розв'язаною, то для її вирішення необхідно ввести правило R вибору єдиної альтернативи з множини ефективних альтернатив.

Нехай $R(F,X)$ – множина альтернатив багатокритеріальної задачі:

$$\max\left\{F(x)=\left(f_1(x),...,f_l(x)\right)\middle|\, x\in X\right\},$$

яка задовольняє правилу вибору *R*. Згідно [27], сформулюємо умови, яким це правило повинно задовольняти у загальному випадку:

1) вибір повинен бути здійсненним завжди, тобто множина альтернатив не порожня $R(F,X)\neq\varnothing$, тому вибирається ефективний розв'язок з множини можливих альтернатив, тобто $R(F,X)\subseteq P(F,X)$;

2) згідно правилу *R* однозначно визначається розв'язок багатокритеріальної задачі, тобто якщо $x',x''\in R(F,X)$, то $x' \sim x''$;

3) якщо множина альтернатив X' є підмножиною іншої *X*, то вибір $R(F,X)$ з «більш широкої» множини альтернатив *X*, якщо він належить «більш вузькій» множині альтернатив $R(F,X)\subseteq X'$, повинен бути вибором з цієї множини. Тобто якщо $R(F,X)\bigcap X'\neq\varnothing$, то $R(F,X)\bigcap X'=R(F,X')$.

Можна побудувати величезну кількість правил вибору, які задовольняють цим умовам, що дасть можливість пристосуватися до специфіки предметної області і особи, що приймає рішення.

Незважаючи на такий широкий спектр різних можливих правил вибору, серед них можна виділити певні класи:

1. Правила вибору, які безпосередньо визначені на множині ефективних альтернатив, тобто $R(F,X)=R(F,P(F,X))$. Перевагою таких правил є їх простота, а суттєвим недоліком – необхідність побудови усієї множини ефективних альтернатив.

2. Правила вибору, які є суперпозицією двох правил вибору: правила вибору $R'(F,X)$, що є визначеним на множині альтернатив і вибирає деяку підмножину альтернатив, яка містить як ефективні, так і неефективні альтернативи, і правила вибору $R(F,R'(F,X))$, що є визначеним на множині вже попередньо вибраних альтернатив і вибирає тільки ефективну альтернативу. Такий розподіл правил вибору на два правила в деяких практичних ситуаціях дозволяє реалізувати досить ефективний вибір.

3. Діалогові процедури вибору. Цей клас правил вибору враховує той факт, що формалізація правила в багатьох практичних ситуаціях прийняття рішень ускладнюється наявністю «людського» фактору.

Це приводить до необхідності створення правил вибору у вигляді діалогової процедури, яка являє собою ітеративний процес взаємодії між особою, що приймає рішення і комп’ютером.

Кожна ітерація i, де $i = 1, 2, \ldots$, складається з двох етапів:

1. Обчислювальний етап. На даному етапі комп’ютер використовує отриману від особи, що приймає рішення інформацію для побудови правила вибору, визначає ефективну альтернативу $x^i = R^i\left(F, X\right)$ і формує допоміжну інформацію для визначення переваг альтернатив.

2. Етап прийняття рішення. Аналізується отримана від комп’ютера ефективна альтернатива та допоміжна інформація. Якщо ця інформація задовольняє особу, що приймає рішення, то приймається рішення про вибір розв’язку, в протилежному випадку дається нова інформація для комп’ютера, завдяки якій буде робитися інший вибір і т. д.

Методи багатокритеріальної оптимізації являють собою чисельну реалізацію певного правила вибору ефективної (Парето-оптимальної), слабо ефективної (оптимальної за Слейтером), строго ефективної (оптимальної за Смейлом) альтернатив. Вони класифікуються за типами інформації наступним чином [27]: методи багатокритеріальної оптимізації; методи, які не використовують інформацію про перевагу на множині критеріїв; методи, які використовують один тип інформації про перевагу на множині критеріїв; методи, які використовують різні типи інформації про перевагу на множині критеріїв; спеціальні методи.

Наведемо короткий змістовний опис відомих методів багатокритеріальної оптимізації.

2.2.1. Принцип справедливого компромісу

Нехай всі локальні критерії, що утворюють вектор-функцію $F(x)$ задачі $Z(F, X)$ є однаково важливими.

Справедливим вважається такий компроміс, при якому відносний рівень зниження якості одного або декількох критеріїв не перевершує відносного рівня підвищення якості решти критеріїв (менше або рівний).

Цьому принципу можна дати наступну математичну інтерпретацію: нехай в області визначення X дано два розв’язки x' і x'', якість яких оцінюється критеріями $F_1\left(x\right)$ і $F_2\left(x\right)$. Розв’язок x' переважає над розв’язком x'' за критерієм $F_1\left(x\right)$, але поступається йому за критерієм $F_2\left(x\right)$. Необхідно порівняти ці розв’язки і вибрати найкращий на основі принципу справедливого компромісу.

Для порівняння цих розв’язків на основі принципу справедливого компромісу введемо міру відносного зниження якості розв'язків за кожним з критеріїв – ціну поступки x:

$$x_1 = \frac{\Delta F_1(x', x'')}{\max\limits_{x', x''} F_1(x)}, \quad x_2 = \frac{\Delta F_2(x'', x')}{\max\limits_{x', x''} F_2(x)}, \tag{2.7}$$

де ΔF_1 і ΔF_2 – абсолютні зниження рівня критеріїв відповідно при переході від розв'язку x' до розв'язку x'' для критерію $F_1(x)$ і при зворотному переході для критерію $F_2(x)$.

Якщо відносне зниження критерію $F_1(x)$ більше, ніж критерію $F_2(x)$, то слід віддати перевагу розв'язку x'. Це випливає з порівняння ціни поступки за кожним критерієм.

Алгоритм, що реалізує принцип справедливого компромісу. Алгоритм включає наступні кроки.

Крок 0. Вибираємо x' і $x'' \in X$.

Крок 1. Обчислюємо за формулами (2.7) x_1 і x_2.

Крок 2. Якщо $x_1 > x_2$, то вибираємо x', якщо $x_1 < x_2$, то вибираємо x''.

Крок 3. Якщо не існує вектора $x \in X$, що переважає над x' або x'', то процес розв'язування зупиняється, інакше вибираємо новий вектор x''' і переходимо до кроку 1.

Модель визначення області компромісів, а також модель справедливого компромісу інваріантні до масштабу вимірювання критеріїв. Проте перша з них є допоміжною при виборі розв'язку, а інша може бути використана тільки в тих ситуаціях вибору розв'язку, для яких ідея справедливого компромісу може бути виправдана. Тому в більшості випадках доводиться вдаватися до інших принципів оптимальності, що мають сенс тільки у разі нормалізованого простору критеріїв, коли всі локальні критерії мають єдиний масштаб вимірювання. В більшості випадків масштаби вимірювання критеріїв неоднакові, і виникає необхідність проводити нормалізацію критеріїв, тобто штучно приводити їх до єдиної міри.

Більшість принципів нормалізації ґрунтується на введенні ідеального розв'язку, тобто розв'язку, що має ідеальний вектор ефективності F^i. Цей ідеальний розв'язок можна апріорно припустити виходячи з інформації про об'єкт, а можна розв'язати задачу оптимізації для кожного локального критерію і відповідно значення вектора ефективності прийняти за ідеальний вектор ефективності F^i. Тоді вибір оптимального розв’язку стає рівнозначним якнайкращому наближенню до цього ідеального вектора $F^{i} = \left(F_{i_1} .., F_{i_n}\right)$. В цьому випадку замість дійсного значення критеріїв розглядаються або їх відхилення від ідеального значення $\Delta F_j = F_{i_j} - F_j$, або їх безрозмірне відносне значення: $\overline{F_j} = F_j / F_{i_j}$.

При розв’язуванні даної задачі використовуються обидва способи нормалізації. Таким чином, успішний розв’язок проблеми нормалізації багато в чому залежить від того, наскільки точно і об’єктивно вдається визначити ідеальну якість розв’язку.

Після нормалізації критеріїв ефективності задача вибору розв’язку набуває математичного значення. В теоретико-множинному відношенні вона стає задачею впорядковування обмежених векторних множин, а з погляду теорії наближень – задачею наближення в метричному просторі. Це дає можливість проводити обґрунтований вибір принципів оптимальності і визначати їх значення.

Отже, для даного випадку принцип оптимальності ідентичний принципу наближення, а узагальнений скалярний критерій оптимізації – критерію наближення, що є деякою функцією відхилення від ідеальної функції.

2.2.2. Метод квазіоптимізації локальних критеріїв

У цьому випадку здійснюється пошук не єдиного точного оптимуму, а деякої області розв’язків, близьких до оптимального, або квазіоптимальної множини. При цьому рівень допустимого відхилення від точного оптимуму визначається з урахуванням точності постановки задачі (наприклад, залежно від точності обчислення величини критеріїв), а також деяких практичних міркувань (наприклад, вимог точності розв’язку задачі).

На початку проводиться якісний аналіз відносної важливості критеріїв: на підставі такого аналізу критерії розташовуються і нумеруються в порядку зменшення важливості, так що головним вважається критерій $f_1(x)$, менш важливий $f_2(x)$, потім слідує решта локальних критеріїв $f_3(x), \ldots, f_l(x)$. Критерії розглядаються на деякій області *X*. Максимізується перший по важливості критерій $f_1(x)$ і визначається його найбільше значення M_1. Потім призначається допустиме зниження (поступка) $d_1 \geq 0$ критерію $f_1(x)$. Визначається нова допустима область X_1, як підмножина X вигляду:

$$X_1 = X \bigcap \left\{ x \mid f_1(x) \geq M_1 - d_1 \right\} \tag{2.8}$$

Такий підхід дозволяє значно звузити первинну допустиму область X, коли здійснюється перехід до наступного по важливості критерію.

Після цього знаходимо найбільше значення M_2 другого критерію $f_2(x)$ на множині X_1, тобто за умови, що значення першого критерію повинно бути не менше ніж $M_1 - d_1$. Знову призначається значення поступки $d_2 \geq 0$, але вже по другому критерію, яке разом з першим використовується при знаходженні умовного максимуму третього критерію, і т. д. Нарешті, максимізувався останній по важливості критерій $f_l(x)$ за умови, що значення кожного критерію $f_r(x)$ з $l-1$ попередніх повинно бути не менше відповідної величини $M_r - d_r$; одержувані стратегії вважаються оптимальними:

$$X_i = X_{i-1} \bigcap \left\{ x \mid f_i(x) \geq M_i - d_i \right\}.$$

Таким чином, оптимальною вважається така стратегія, що є розв'язком останньої задачі з наступної послідовності задач:

1) знайти $M_1 = \max\left\{ f_1(x) \middle| x \in X \right\}$;

2) знайти $M_2 = \max\left\{ f_2(x) \middle| x \in X_1 \right\}$;

...

l) знайти $M_l = \max\left\{ f_l(x) \middle| x \in X_{l-1} \right\}$. (2.9)

Якщо критерій $f_l(x)$ на множині розв'язків, що задовольняють обмеження задачі l з (2.9) не досягає свого найбільшого значення M_l, то розв'язком багатокритеріальної задачі вважають ту, що максимізувала послідовність $\{x_k\}$ з послідовності множин:

$$X_{l-1} \subset X_{l-2} \subset \ldots \subset X_1 \subset X.$$

Реалізація подібної максимізації послідовності має сенс тоді, коли верхня границя в задачі l є досяжною.

Алгоритм розв'язання задачі векторної оптимізації включає наступні кроки.

Крок 1. Нехай x_{01} – розв'язок задачі:

$$\max\left\{ f_1(x), x \in X \right\}.$$

Крок 2. Нехай x_{0k} – розв’язок задачі:

$$\max\left\{ f_k\left(x\right) \middle| x \in X_{k-1} \right\}, \text{ де } X_k \text{ визначається з (2.9).}$$

Крок 3. Якщо $k < l$, то встановлюємо $k = k + 1$ і повертаємося до кроку 2.

Якщо $k = l$, то x_{0l} вважаємо оптимальним розв’язком.

Алгоритм закінчує свою роботу.

Значення поступок $d_i, i \in N_l$ послідовно призначаються при вивченні взаємозв’язку часткових критеріїв.

На початку розв’язується питання про призначення допустимого зниження d_1 першого критерію від найбільшого значення $\grave{I}_{1}$. Практично для цього задають декілька величин поступок d_{11}, d_{12}, d_{13}, ... і шляхом розв’язання задач 2 з (2.9) визначають відповідні максимальні значення $M_2\left(d_{11}\right)$, $M_2\left(d_{12}\right)$, $M_2\left(d_{13}\right)$... другого критерію. Далі розглядають пару критеріїв $f_2\left(x\right)$ і $f_3\left(x\right)$. Знову призначають пробні значення поступок d_{21}, d_{22} ... і, розв’язуючи задачу 3 з (2.9), відшукують найбільші значення $M_3\left(d_{21}\right), M_3\left(d_{22}\right)$. Одержані дані аналізують, призначають d_2, переходять до наступної пари критеріїв $f_3\left(x\right)$ і $f_4\left(x\right)$ і т. д. Нарешті, в результаті аналізу взаємного впливу критеріїв $f_{l-1}\left(x\right)$ і $f_l\left(x\right)$ вибирають значення останньої поступки $d_l - 1$ і відшукують оптимальні стратегії, вирішуючи задачу l з (2.9) (звичайно обмежуються знаходженням однієї такої стратегії).

Таким чином, хоча формально при використанні методу послідовних поступок достатньо розв’язати лише ряд задач (2.9), проте для призначення значення поступок з метою з’ясування взаємозв’язку часткових критеріїв фактично доводиться розв’язувати істотно більше число таких задач.

Для розв’язання багатокритеріальної задачі потрібно так ранжирувати критерії, щоб потім зручніше було вибирати значення поступок.

Розглядаючи вище викладене, можна зробити наступний висновок: метод послідовних поступок доцільно застосовувати для розв’язання багатокритеріальних задач, в яких всі часткові критерії впорядковані за ступенем важливості, причому кожний критерій настільки істотно більш важливий, ніж наступний, що можна обмежитися урахуванням тільки попарного зв’язку критеріїв і вибирати допустиме зниження чергового критерію враховуючи поведінку лише одного наступного критерію.

Особливо зручним є випадок, коли вже в результаті попереднього аналізу багатокритеріальної задачі з'ясовується, що можна допустити припущення поступок лише в межах «інженерної» точності (5–10 % від найбільшої величини критерію).

Слід зауважити, що метод не обмежує можливості особи, що приймає рішення, у виборі ефективних альтернатив. Це обґрунтовується наступною теоремою.

Теорема 2.1. [21] Для будь-якого впорядкування критеріїв і будь-якої ефективної альтернативи x^* існує послідовність невід'ємних поступок $\Delta f_i, i \in N_l$, таких, що на останньому кроці процедури буде отримана множина ефективних альтернатив, всі елементи якої рівноцінні x^*.

Треба зауважити що, якщо на перших кроках особа, що приймає рішення, задавала великі значення поступок, то ефективна альтернатива, яка отримується в кінці процедури, може мати більш високі показники за менш важливими критеріями.

І навпаки, якщо особа, що приймає рішення, намагається отримати високі показники за більш важливим критерієм, то можна отримати ефективну альтернативу з неприпустимо малими показниками за менш важливим критерієм. На основі вищезазначеного можна зробити висновок, що необхідно правильно впорядкувати критерії, тоді можна обмежитись аналізом попарного зв'язку критеріїв.

Серед недоліків методу слід відмітити наступне:

1) тільки на першому кроці методу величина поступки відповідає її фактичному значенню, оскільки вона визначена на всій множині альтернатив. На наступних кроках величина поступки може бути значно меншою за її фактичне значення, оскільки вона визначається на «уточненій» множині альтернатив;

2) в методі обчислювальна складність задач оптимізації зростає з кількістю зроблених кроків, оскільки на кожному кроці додається нове обмеження. Метод використовує два типи інформації від особи, що приймає рішення: інформацію про впорядкування критеріїв і про діапазони значень критеріїв

2.2.3. Метод згортання векторного критерію в суперкритерій

Одним з поширених методів розв'язання багатокритеріальних задач є метод зведення багатокритеріальної задачі до однокритеріальної шляхом згортання векторного критерію в суперкритерій. При цьому кожний критерій множиться на відповідний йому ваговий коефіцієнт.

$$\Phi(x)=\sum_{i=1}^{l}\alpha_i f_i(x),\ \alpha_i \ge 0, \sum_{i=1}^{l}\alpha_i = 1.$$

При цьому виникають труднощі з правильним вибором коефіцієнтів $\alpha_i, i \in N_l$. Цей метод ще дістав назву лінійної згортки критеріїв.

Існують різні способи вибору коефіцієнтів $\alpha_i, i \in N_l$. Одним з них є призначення коефіцієнта залежно від відносної важливості критеріїв.

Лінійна згортка критеріїв є однокритеріальною задачею із додатковими змінними або параметрами, яка, як правило, розв'язується повторно. Незалежно від того неперервна чи дискретна природа задачі виникають наступні питання стосовно цього методу: чи є оптимальний розв'язок задачі лінійної згортки критеріїв ефективним розв'язком багатокритеріальної задачі, чи можуть усі ефективні розв'язки багатокритеріальної задачі бути знайдені в задачі лінійної згортки? Ці питання обговорювались в роботах [46, 86, 108–110, 186].

Добре відомо, що оптимальний розв'язок задачі лінійної згортки критеріїв є ефективним, проте ефективні розв'язки, що знаходяться у внутрішності опуклої оболонки, не можуть бути знайдені цим методом. Фактично ця властивість веде до виокремлення підтримуючих ефективних розв'язків (тих, що можуть бути знайдені за допомогою лінійної згортки) і не підтримуючих (тих, що не можуть бути знайдені цим методом). Позитивною властивістю цього методу є те, що він має таку саму обчислювальну складність, як і однокритеріальна версія багатокритеріальної задачі дискретної оптимізації.

Метод лінійної згортки критеріїв не завжди забезпечує одержання всіх Парето-оптимальних розв'язків задачі дискретної оптимізації. Якщо множина Парето хоча б однієї індивідуальної однокритеріальної задачі містить такий елемент x, на якому ні при якому α не досягає максимуму значення згортки, то можна говорити про нерозв'язуваність за допомогою методу лінійної згортки критеріїв відповідної масової задачі [40]. Для алгоритму лінійної згортки критеріїв доведена нарозв'язуваність векторних задач: комівояжера, про досконалі паросполучення, про остовні дерева, про ланцюги між парами сусідніх вершин.

На жаль, одночасне використання методів дискретної лінійної оптимізації і багатокритеріальної лінійної оптимізації не дає автоматично метод розв'язання задач багатокритеріальної дискретної лінійної оптимізації.

Щоб прояснити цей момент, разглянемо спочатку досить загальну постановку векторних задач комбінаторної оптимізації.

Задача (P): $$\min\{F(x) \mid x \in X\}, \quad \text{(P)}$$

$X = \left\{ x \in D \mid x \in A_6^3 \right\}$, де $F(x)$ – вектор опуклих неперервних функцій $f_k(x), k \in N_p$, D – опукла множина невід'ємних допустимих розв'язків, A_6^3 − комбінаторна множина розміщень елементів мультимножини $M = \{0,0,0,1,1,1\}$.

Задача (LP) − лінійна релаксація задачі (P):

$$\min\{F(x) \mid x \in D\} \qquad \text{(LP)}$$

Розв'язок x^* з множини X (або D) ефективний для задачі P (або LP), якщо не існує будь-якого іншого розв'язку x в X (або D) такого, що

$$f_k(x) \geq f_k(x^*),\ k \in N_p,$$

хоча б з однією строгою нерівністю.

Нехай $P(F,X)$ і $P(F,D)$ множини всіх ефективних розв'язків задач (P) і (LP).

Добре відомо [113], що множина $P(F,D)$ Парето-оптимальних розв'язків може бути охарактеризована оптимальним розв'язком однокритеріальної параметризированої задачі (LP_α):

$$\max\left\{\alpha^T F(x) \mid x \in LD\right\} \qquad (LP_\alpha)$$

де α – p-вимірний вектор, компоненти якого задовольняють умови $\alpha_k \geq 0, k \in N_p$, $\alpha_1+\ldots+\alpha_p=1$.

1) Якщо $\alpha_k > 0, k \in N_p$, то будь-який оптимальний розв'язок задачі (LP_α) є ефективним розв'язком задачі (LP).

2) Якщо $\alpha_k \geq 0, k \in N_p$, то будь-який оптимальний розв'язок задачі (LP_α) є слабо ефективним розв'язком задачі (LP). Якщо, крім того, оптимальний розв'язок єдиний, то він є ефективним розв'язком.

Цей фундаментальний принцип – часто називаний теоремою Джоффріона – далі не поширюється на випадок дискретних змінних, оскільки множина X не є опуклою.

Множина оптимальних розв'язків $S_\alpha P(F,X)$ задачі P_α, яка визначається як задача (LP_α), в якій D заміняється на X, є тільки підмножиною множини $P(F,X)$ Парето-оптимальних розв'язків. Елементи множини $S_\alpha P(F,X)$ іноді називається "підтримуючими ефективними розв'язками", тоді як розв'язки, що належать $P(F,X)\setminus S_\alpha P(F,X)$ є "непідтримуючими ефективними розв'язками".

Непоширюваність теореми Джоффріона для задачі (P) може бути проілюстрована наступним прикладом.

Приклад 2.1. Нехай кількість критеріїв $p=2$,

$\min f_1(x)=6x_1+3x_2+x_3$,

$\min f_1(x)=x_1+3x_2+6x_3$,

$D=\left\{x=\left(x_1,x_2,x_3\right)\in A_6^3 \mid x_1+x_2+x_3\le 1\right\}$, де A_6^3 – множина розміщень з 6 елементів по 3, мультимножина $M=\{0,0,0,1,1,1\}$.

Для цієї задачі

$P(F,X)=\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$,

$S_\alpha P(F,X)=\{(0,1,0)\}$.

Отже, при розв'язуванні векторних задач дискретної, і зокрема комбінаторної, оптимізації обов'язково слід враховувати його дещо обмежене застосування.

Метод пріоритетів

В методі пріоритетів l часткових критеріїв упорядковуються в порядку їх важливості, за оцінкою спеціаліста по прийняттю рішень.

Мінімізувати $f_1(x)=\rho_1$ (найвищий пріоритет)

…

Мінімізувати $f_l(x)=\rho_l$ (найнижчий пріоритет)

Змінні ρ – це компоненти змінних що відхиляються, точніше це s_i^+ або s_i^-, які визначають i-у цільову функцію.

В методі пріоритетів по черзі розв'язуються задачі з однією цільовою функцією, починаючи з задачі з цільовою функцією, яка має найвищий пріоритет, і закінчуючи задачею з цільовою функцією, яка має найнижчий пріоритет. В процесі розв'язання послідовних задач розв'язок задачі з цільовою функцією, яка має більш низький пріоритет, не може погіршити отримані раніше результати розв'язання задач з цільовою функцією, що має більш високий пріоритет. Це означає, що, якщо x_i оптимальне значення цільової функції $f_i(x)$, то для всіх $i \geq 1$ оптимізація будь-якої цільової функції $f_j(x)(j > 1)$ з меншим пріоритетом не зможе погіршити результат x_i .

В літературі по цільовому програмуванню описаний спеціальний симплекс метод, який гарантує непогіршення розв'язку задач з цільовими функціями більш високого пріоритету. Цей метод використовує правило виключення стовпчику, який використовується для видалення з оптимальної симплекс-таблиці задачі з цільовою функцією $f_k(x)$ небазисної змінної x_j такої, що $cz_j - c_j \neq 0$ до початку розв'язання задачі з цільовою функцією $f_{k+1}(x)$. Це правило розпізнає, що небазисна змінна x_j , якщо вона отримає не нульове значення, може погіршити (але ніколи не покращить) оптимальне значення задачі з цільовою функції, яка має більший пріоритет.

Нажаль, цей метод зміни симплекс-таблиць потребує більш складних розрахунків, ніж потрібно насправді. Розглянемо, як можна досягти результату більш простим способом:

Крок 0. Визначаємо часткові функції задачі і упорядковуємо їх в порядку пріоритетів: $f_1(x) = \rho_1 \succ f_2(x) = \rho_2 ... \succ f_l(x) = \rho_l, i = 1$.

Крок 1. Розв'язуємо *i*-у задачу лінійного програмування з цільовою функцією $f_i(x)$. Позначимо через ρ_i^* отримане оптимальне значення відхиленої змінної ρ_i. Якщо $i = l$, розрахунки закінчуються, оскільки розв'язана остання l задача. В іншому випадку переходимо на наступний крок.

Крок 2. Вводимо в задачу нове обмеження $\rho_i = \rho_i^*$, тоді значення ρ_i не зможе змінитися при розв'язанні наступних задач. Вважаємо $i = i + 1$ і повертаємося на крок 1.

Послідовне введення додаткових обмежень вигляду $\rho_i = \rho_i^*$ приводить точно до такого ж результату, як правило виключення стовпчиків. Крім того, зміст введення додаткових обмежень повністю зрозумілий.

Визначеним аргументом на користь правила виключення стовпчиків може служити те, що при використанні цього правила відбувається видалення змінної, і зменшується розмір задачі. В той же час описана процедура збільшує розмір задачі при збільшенні додаткових обмежень. Але якщо уважно придивитися до цих обмежень, то легко змінити розрахунки таким чином, щоб ці обмеження враховувалися шляхом підстановки значення ρ_i^* замість ρ_i, що також зменшує кількість змінних в задачі. З цієї точки зору правило виключення стовпчиків не має переваг з вище описаною процедурою.

2.2.4. Метод розв'язування багатокритеріальних задач з використанням інтегрального критерію

Суть даного методу полягає в тому що критерії $f_i(x), i \in N_l$, певним чином об'єднуються в один інтегральний критерій $F(x) = g(f_1(x), f_2(x),..., f_l(x))$, а потім знаходиться максимум або мінімум даного критерію.

В залежності від того, яким чином часткові критерії об'єднуються в узагальнений критерій розділяють наступні види узагальнених критеріїв:

1. Адитивний критерій.
2. Мультиплікативний критерій.
3. Мінімаксний (максимінний) критерій.

В адитивних критеріях цільову функцію отримуємо шляхом додавання нормованих значень часткових критеріїв. В загальному вигляді її можна представити наступним чином:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{l} k_i \frac{f_i(x)}{f_i^0(x)} = \sum_{i=1}^{l} k_i f_i(x) \to \max(\min), \tag{2.10}$$

де l – кількість об'єднаних часткових критеріїв;

k_i – ваговий коефіцієнт *i*-го часткового критерію;

$f_i(x)$ – числове значення *i*-го часткового критерію;

$f_i^o(x)$ – *i*-й нормуючий дільник;

$f_i(x)$ – нормоване значення *i*-го часткового критерію.

Часткові критерії мають різну фізичну природу і тому різну розмірність. А значить просто додавати їх некоректно. В зв'язку з цим в формулі (2.10) числові значення часткових критеріїв діляться на деякі нормуючі дільники, які назначаються наступним чином:

1. В ролі нормуючих дільників приймаються директивні значення параметрів чи критеріїв, задані замовником. Вважається, що значення параметрів, закладені в технічному завданні, є оптимальними і найкращими.

2. В ролі нормуючих дільників приймаються максимальні (мінімальні) значення критеріїв, досяжні в області допустимих значень.

Розмірності самих часткових критеріїв і відповідних нормуючих дільників однакові, тому в решті решт узагальнений адитивний критерій буде безрозмірною величиною.

Мультиплікативні критерії працюють за принципом компромісу, який бере за основу ідею рівномірності. Суть принципу максиміна полягає в наступному: при проектуванні складних систем, при наявності великого числа часткових критеріїв встановити між ними аналітичні співвідношення дуже важко. Тому намагаються знайти таке значення змінних x, при яких нормовані значення всіх часткових критеріїв рівні між собою:

$$k_i f_i(x) = K,$$

де k_i – ваговий коефіцієнт i-го часткового критерію;

$f_i(x)$ – нормоване значення i-го критерію, K – константа.

При великій кількості часткових критеріїв через складність взаємозв'язків добитися виконання вказаного вище відношення дуже складно.

2.2.5. Метод наближення всіх часткових критеріїв до ідеальної точки

Метод не використовує допоміжну інформацію від особи, що приймає рішення про перевагу на множині критеріїв.

Правило вибору компромісу R у цьому методі полягає у знаходженні альтернативи, яка має оцінку, що є найближчою до ідеальної точки.

Ідеальною називається точка, що визначається наступним чином:

$$y^* = \left(y_1^*, ..., y_l^*\right) \in R^l, \; y_i^* = \max\left\{ f_i(x) \middle| x \in X \right\}, i \in N_l$$

$$y = \left(f_1(x), f_2(x), ..., f_l(x)\right) \in Y \subset R^l.$$

Як правило, ідеальна альтернатива x не належить X.

Зміст назви пояснюється тим, що такі точки оптимальні зразу за всіма критеріями і отримати більше значення ні по жодному критерію неможливо.

Визначається відстань $\rho_s\left(y, y^*\right) = \left(\sum_{i=1}^{l} \left|y_i - y_i^*\right|^s\right)^{\frac{1}{s}}$ між точками y і y^* у метричних просторах R_s^l з показником метрики $s \geq 1$. Тоді, згідно з цим методом, компромісна оцінка знайдеться як розв'язок так званої скаляризованої задачі

$$y^0 \in \operatorname{Arg}\min_{y \in Y} \left(\sum_{i \in N_l} \left| y_i - y_i^* \right|^s \right)^{1/s}, \text{ і } x^0 \in \operatorname{Arg}\min \left(\sum_{i \in N_l} \left| f_i(x) - y_i^* \right|^s \right)^{1/s}.$$

Значення показника метрики s вибирається в залежності від предметної області. На практиці в основному використовують значення $s = 1, 2, \infty$.

Отже, розв'язання задачі багатокритеріальної оптимізації за правилом вибору компромісу R зводиться до розв'язання звичайної однокритеріальної задачі оптимізації

Якщо $s = 2$ (евклідова метрика), то в цьому випадку компромісна альтернатива x^* знаходиться як розв'язок скаляризованої задачі:

$$\min_{x \in X} \sum_{i \in N_l} \left(f_i(x) - y_i^* \right)^2 .$$

Застосовується в тих випадках, коли критерії мають зміст відстані або інших фізичних величин, для яких ця метрика змістовна.

При $s = 1, \infty$ критерії можуть мати будь-який інший зміст (наприклад, вартість, надійність, тривалість і т. д.) і скаляризовані задачі будуть мати відповідно вигляд:

$$\min_{x \in X} \sum_{i \in N_l} \left| f_i(x) - y_i^* \right| = \max_{x \in X} \sum_{i \in N_l} f_i(x) \qquad (2.11)$$

$$\min_{x \in X} \max_{i \in N_l} \left| f_i(x) - y_i^* \right| = \max_{x \in X} \min_{i \in N_l} \left(f_i(x) - y_i^* \right). \qquad (2.12)$$

Задача (2.11) розглядається, коли необхідно оцінити відстань до ідеальної точки як сумарну за всіма критеріями і така оцінка має певний зміст у предметній області, в якій розв'язується задача (наприклад, у двохкритеріальній задачі, де максимізуються прибуток фірми і заробітна платня її працівників, цільова функція задачі має зміст частини доходу фірми).

Задача (2.12) розглядається, коли особа, що приймає рішення, оцінює відстань до ідеальної точки як найгіршу за значенням показника.

Якщо критерії задачі мають різні одиниці вимірювання, масштаб, то як правило, для задач (2.11), (2.12) їх зводять до безрозмірної шкали $[0,1]$ і розв'язують відповідно задачі:

$$\max_{x\in X}\sum_{i\in N_l}\overline{f}_i(x)=\max_{x\in X}\sum_{i\in N_l}\frac{\left(f_i(x)-f_i^{\min}\right)}{\left(y_i^*-f_i^{\min}\right)}=\max_{x\in X}\sum_{i\in N_l}\frac{f_i(x)}{\left(y_i^*-f_i^{\min}\right)},$$

$$\max_{x\in X}\min_{i\in N_l}\left(\overline{f}_i(x)-1\right)=\max_{x\in X}\min_{i\in N_l}\left(\frac{f_i(x)-f_i^{\min}}{y_i^*-f_i^{\min}}-1\right)=\max_{x\in X}\min_{i\in N_l}\left(\frac{f_i(x)-y_i^*}{y_i^*-f_i^{\min}}\right).$$

Відмітимо, що для будь-якого $s\in[1,\infty)\,R(Y)\subseteq P(Y)$ і для $s=\infty\ R(Y)\subseteq Sl(Y)$, якщо множина *Y* строго опукла, то $|R(Y)|=1$.

2.2.6. Метод вибору за кількістю домінуючих критеріїв

Метод не використовує допоміжну інформацію від особи, що приймає рішення, про перевагу на множині критеріїв. Правило вибору *R* за цим методом враховує взаємні співвідношення між оцінками альтернатив і не враховує величини різниць оцінок. Метод призначений для розв'язання багатокритеріальних задач з дискретною множиною альтернатив, яка має невелику потужність (може бути перебрана за реальний час).

Нехай $q(x,x')$ – кількість критеріїв, за якими альтернатива x' строго переважає альтернативу *x*. Покладемо $Q(x)=\max\limits_{x\in X}q(x,x')$ й визначимо $Q=\min\limits_{x\in X}Q(x)$. Тоді за правилом вибору *R,* яке розглядається, вибираються альтернативи, які відповідають величині *Q* (домінуючому показнику множини *X*).

Основні властивості методу полягають у наступному:

$R(X)=R(P(F,X))$, тобто вибір за цим методом з усієї множини розв'язків і вибір з множини ефективних розв'язків – співпадають;

$R(X)\subseteq P(F,X)$ – метод вибирає ефективні розв'язки.

Слід зауважити, якщо $q(x,x')$ – кількість критеріїв, за якими альтернатива x' сильно переважає альтернативу *x*, то цей метод вибирає слабо ефективні альтернативи.

2.2.7. Метод послідовного вводу обмежень

Головна ідея даного методу полягає в послідовному введенні обмежень на альтернативи, які мають незадовільні з точки зору особи, що приймає рішення, значення критеріїв.

Метод використовує два типи інформації від особи, що приймає рішення: інформацію про відносну важливість критеріїв та інформацію про діапазони значень критеріїв.

Алгоритм.

0-й крок. Покладемо $k := 1, X_1 = X$.

1-й крок. Обчислюються оптимальні значення кожного критерію окремо на уточненій множині альтернатив:

$$f_i^{*(k)} = \max_{x \in X_k} f_i(x), i \in N_l; X\ _1 \subset X,$$

і формується вектор ідеальної оцінки на уточненій множині альтернатив: $f^{*(k)} = \left(f^{*(k)}, ..., f_l^{*(k)} \right)$.

2-й крок. Визначаються вагові коефіцієнти критеріїв $\alpha_1^{(k)}, ..., \alpha_l^{(k)}$ наступним чином: складається матриця $\sigma_{ji}^{(k)} = \sigma_{ij}^{(k)},\ i, j \in N_l$, переваг на множині критеріїв, кожна пара симетричних елементів якої $\sigma_{ij}^{(k)} = \left(\sigma_{ji}^{(k)} \right)$ характеризує відносну важливість i-го критерію у порівнянні з j-м.

3-й крок. Розраховуються вагові коефіцієнти критеріїв за наступною формулою:

$$a_i^{(k)} = \left(\sum_{s \in N_l} \sigma_{is} \right) / \left(\sum_{r = N_l} \sum_{s = N_l} \sigma_{rs} \right), i \in N_l.$$

4-й крок. Розв'язується задача

$$\max_{x \in X} \sum_{i = N_l} a_i^{(k)} f_i(x),$$

і визначається альтернатива x^k та її оцінка $y^k = \left(f_1\left(x^k\right), ..., f_l\left(x^k\right) \right)$.

5-й крок. Аналізується отримана альтернатива та оцінка y^k шляхом її порівняння з ідеальною оцінкою $f^{*(k)}$. Якщо оцінка y^k задовольняє особу, що приймає рішення, то процедура закінчується, а альтернатива x^k приймається за розв'язок вхідної задачі. Інакше, здійснюється перехід на наступний крок.

6-й крок. Вказується номер $s \in N_l$ критерію, значення якого найменше, на думку особи, що приймає рішення, її задовольняє і визначається, до якого рівня ξ_s потрібно покращити значення цього критерію та формується нова уточнена множина альтернатив $X_{k+1} = \{x \in X_k \mid f_s(x) \ge \xi_s\}$, $k := k+1$ і здійснюється перехід на перший крок.

В цьому методі можуть використовуватися й інші способи визначення переваг $\alpha_1^{(k)},...,\alpha_l^{(k)}$ на множині критеріїв. Наприклад, нехай x^{ij} – альтернатива, яка максимізує j-й критерій на множині X_i; $f_i^{\max(k)}, f_i^{\min(k)}$ – відповідно найкраще та найгірше значення i-го критерію на цій множині. Для $i \in N_l$, обчислимо величини:

$$\delta_i^{(k)} = \max_{l \in N_l} \frac{f_i^{\max(k)} - f_i\left(x^{ij}\right)}{f_i^{\max(k)} - f_i^{\min(k)}}, \quad \text{або} \quad \delta_i^{(k)} = \frac{1}{l} \sum_{j \in N_l} \frac{f_i^{\max(k)} - f_i\left(x^{ij}\right)}{f_i^{\max(k)} - f_i^{\min(k)}},$$

відповідно максимальне або середнє відносне відхилення від найкращого значення i-го критерію на альтернативах, що максимізують інші критерії. Вагові коефіцієнти критеріїв визначаються за формулою:

$$a_i^{(k)} = \delta_i^{(k)} / \left(\sum_{j \in N_l} \delta_j^{(k)} \right), i \in N_l.$$

2.2.8. Метод бажаної точки

0 крок. Розраховуються максимальні і мінімальні значення критеріїв:

$$f_i^* = \max_{x \in X} f_i(x), h_i^* = \min_{x \in X} f_i(x), i \in N_l.$$

Здійснюється монотонне перетворення критеріїв до нормованого безрозмірного вигляду:

$$w_i\left(x\right)=\frac{f_i^*-f_i\left(x\right)}{f_i^*-h_i^*}, i\in N_l.$$

Покладемо $k:=1$.

1-й крок. Аналізується отриманий на попередньому кроці розв’язок та його оцінка у порівнянні з максимальними і мінімальними значеннями критеріїв і вказуються бажані значення критеріїв:

$$\xi_i^k\in\left[h_i^*, f_i^*\right], i\in N_l .$$

2-й крок. Здійснюється перетворення бажаних значень цільових функцій до нормованого безрозмірного вигляду:

$$w_i^k=\frac{f_i^*-\xi_i^*}{f_i^*-h_i^*}, i\in N_l .$$

3-й крок. Обчислюються вагові коефіцієнти критеріїв:

$$p_i^k=\left(\prod_{j=1, j\neq 1}^{l} w_j^k\right)/\left(\sum_{j=1}^{l}\prod_{l=1, j\neq 1}^{l} w_j^k\right), i\in N_l .$$

4-й крок. Ефективна альтернатива $x^k\in X$ знаходиться як розв’язок однокритеріальної задачі: $\max\limits_{x\in X}\min\limits_{i\in N_l} p_i^k w_i\left(x\right)$.

5-й крок. Обчислюється оцінка $y^k=\left(f_1\left(x^k\right),..., f_l\left(x^k\right)\right)$. Якщо отримані значення цільових функцій задовольняють особу, що приймає рішення, то процедура закінчується, у протилежному випадку $k:=k+1$ і переходимо на 1-й крок алгоритму.

Цей метод використовує тільки один тип інформації від особи, що приймає рішення, про бажані значення критеріїв.

2.2.9. Метод задоволених вимог

Метод використовує два типи інформації від особи, що приймає рішення: інформацію про домінування одного критерію над іншими та інформацію про діапазони значень критеріїв.

Особливістю цієї діалогової процедури є визначення переваги на множині критеріїв шляхом виділення так званого головного критерію.

***k*-й крок** $(k=1,2,\ldots)$. Виділяється головний критерій $f_i(x), i \in N_l$, який найбільше за всі інші повинен бути покращеним.

***k*+1-й крок.** Встановлюється мінімально допустимі рівні значень інших критеріїв ξ_j^k, $j \in N_l$, $j \neq i$.

***k*+2-й крок.** Розв'язується однокритеріальна задача

$$\max_{x \in X_k} f_i(x), \text{ де } X_k = \left\{ x \in X \mid f_j(x) \geq \xi_j^k, j \in N_l, j \neq i \right\},$$

визначається ефективна альтернатива x^k.

***k*+3-й крок.** Розраховується ефективна оцінка альтернативи x^k: $y^k = \left(f_1\left(x^k\right), \ldots, f_l\left(x^k\right) \right)$ і аналізується отримане значення головного критерію. Якщо воно не задовольняє його, то здійснюється перехід на *k*-й крок, залишаючи номер головного критерію незмінним. Якщо значення головного критерію задовольняє особу, що приймає рішення, то вона вирішує – чи можливо деяке погіршення значення головного критерію з метою покращення значень інших. У випадку позитивної відповіді слід перейти на *k*-й крок із метою призначити інший головний критерій. У протилежному випадку – процедура закінчується.

2.2.10. Метод векторної релаксації

Метод використовує тільки один тип інформації від особи, що приймає рішення, − інформацію про відносну важливість критеріїв.

Цей метод призначений для пошуку ефективних альтернатив в неперервних задачах багатокритеріальної безумовної оптимізації наступного вигляду: $\max\limits_{x \in R^n} \left\{ f_i(x), i \in N_l \,\middle|\, x \in R^n \right\}$. Припускається, що критерії задачі є неперервно-диференційованими угнутими функціями.

k-й крок $(k=1,2,\ldots)$. Являє собою крок градієнтного методу для лінійної згортки критеріїв з ваговими коефіцієнтами $a_1^k, \ldots, a_l^k, \sum\limits_{i=1}^{l} a_i^k > 0, i \in N_l$, які визначаються особою, що приймає рішення, за допомогою будь-якої процедури експертного оцінювання важливості критеріїв.

Тобто $x^k = x^{k-1} + \gamma^k \sum_{i=1}^{l} a_i^k \nabla f_i \left(x^{k-1} \right)$, початкове наближення x^0 є будь-якою точкою простору $R^n; \gamma^k > 0$ – величина кроку, яка знаходиться з умови збільшення лінійної згортки критеріїв $\gamma^k = \arg\max_{\gamma \in R^1} \sum_{i=1}^{l} a_i^k f_i \left(x^{k-1} + \gamma \sum_{i=1}^{l} a_i^k \nabla f_i \left(x^{k-1} \right) \right)$.

Якщо оцінка $y^k = \left(f_1\left(x^k\right), ..., f_l\left(x^k\right) \right)$ знайденої альтернативи задовольняє особу, що приймає рішення, то процедура закінчується. У протилежному випадку переходимо до наступного кроку.

Слід зауважити, що альтернативи, які генеруються цією процедурою, тільки в граничному випадку будуть ефективними. Тому особа, що приймає рішення, коли аналізує отриману альтернативу, звертає увагу не тільки на те, щоб вона відповідала його перевагам на множині критеріїв, але і наскільки вона є оптимальною за Парето. Оптимальність альтернативи оцінюється величиною:

$$\left\| \sum_{i=1}^{l} a_i^k \nabla f_i \left(x^k \right) \right\|.$$

РОЗДІЛ 3. ОСОБЛИВОСТІ ОПТИМІЗАЦІЙНИХ ЗАДАЧ НА КОМБІНАТОРНИХ МНОЖИНАХ

Результати досліджень властивостей комбінаторних множин, занурених в арифметичний евклідів простір, дають можливість застосувати класичні підходи математичного програмування до розв'язування комбінаторних оптимізаційних задач, а також пропонувати та розвивати нові оригінальні методи розв'язування багатокритеріальних задач. Використовуючи властивості комбінаторних множин та їх опуклих оболонок, є доцільним удосконалювати апарат математичного програмування залученням некласичних комбінаторних множин, що дасть можливість розглядати більш адекватні реаліям математичні моделі.

3.1. Загальна постановка задачі комбінаторної оптимізації

Нехай задана деяка скінчена дискретна множина A.

Комбінаторним простором $X = X_A$ назвемо сукупність усіх комбінаторних об'єктів визначеного виду з елементів множини A. Зокрема, це можуть бути сполучення, перестановки, розміщення та ін.

Під оптимізаційною задачею комбінаторного типу розуміємо наступну задачу: визначити точку x^* з цього простору, що доставляє екстремум деякому функціоналу $f(x)$, тобто

$$f\left(x^*\right) = \underset{x \in X}{\text{extr}}\, f(x) \tag{3.1}$$

і задовольняє заданим умовам.

Як відомо, більшість оптимізаційних задач комбінаторного типу можуть бути зведені до задач цілочислової оптимізації. У роботі [197] встановлені деякі достатні умови зведення до задач цілочислового лінійного програмування, показано, що не існує загального алгоритму, який знаходить таке зведення, навіть якщо воно існує. Крім того, зведення оптимізаційної комбінаторної задачі до вигляду задачі цілочислової оптимізації не виправдовується ще й тому, що при цьому втрачається можливість урахування її комбінаторних властивостей [141]. Наприклад, задача комівояжера може бути зведена до задачі цілочислового лінійного програмування багатьма способами. Однак розв'язання виникаючих при цьому задач методами цілочислового лінійного програмування без урахування специфіки задачі комівояжера є вкрай непрактичним, здійсненним лише при невеликій кількості міст і не йде ні в яке порівняння з методами поліпшеного перебору, зокрема з методом гілок і меж, розвинутим спеціально для задачі комівояжера.

Існує ряд алгоритмів, що враховують для цілочислової моделі задачі її комбінаторні властивості [10, 39, 42, 47, 53–55, 68–73, 76, 127–136, 141].

Таким чином, не існує чітко вираженої границі між задачами оптимізації, що описуються цілочисловими і комбінаторними моделями. Тому дуже важливо для розв'язання задачі правильно підібрати відповідну математичну модель, що враховувала б її найважливіші властивості і особливості з метою найбільш ефективного розв'язання задачі.

Задачі вигляду (3.1) визначені на просторі $X = X_A$ комбінаторних об'єктів, породжуваних деякою дискретною скінченою множиною A. Екстремум функціоналу $f(x)$, заданого на просторі X, визначається на всьому просторі або на його частині R, тобто $R \subseteq X$.

Отже, оптимізаційну комбінаторну задачу в загальному вигляді можна записати в такий спосіб: визначити $x^* \in X_A$ зі співвідношення

$$f(x^*) = \operatorname*{extr}_{x \in R \subset X} f(x) \tag{3.2}$$

або ж у явному вигляді

$$x^* = \arg\left(\operatorname*{extr}_{x \in R \subset X} f(x)\right). \tag{3.3}$$

Ясно, що в силу скінченності множини A, оптимізаційна комбінаторна задача має розв'язок завжди, і цей розв'язок найчастіше неєдиний.

Таким чином, не має необхідності досліджувати задачу на існування розв'язків (у випадку нескінченності множини A це питання потребує подальшого дослідження).

Однак проблема розв'язуваності залишається, вона приймає форму практичної можливості розв'язання, тобто того, чи не перевищують запити даної оптимізаційної комбінаторної задачі наявні обчислювальні ресурси (математичне забезпечення, швидкодію, пам'ять ЕОМ та ін.). Утім, питання про практичну можливість розв'язання задачі залишається одним з основних питань обчислювальної математики.

Формальні постановки оптимізаційних комбінаторних задач можна розділити на два класи: безумовні та умовні. Ці поняття аналогічні відповідним поняттям з недискретної оптимізації.

Слід зазначити, що умовність задачі найчастіше залежить від простору, у якому вона формулюється. Як правило, введення додаткових обмежень ускладнює задачу в алгоритмічному відношенні, однак зменшує область допустимих планів, що доцільно враховувати.

3.2. Властивості комбінаторних множин

Як відомо, під комбінаторним об'єктом розуміють підмножину заданої дискретної множини, що задовольняє деяким властивостям.

Нехай $\Lambda = \{\lambda_1,...,\lambda_n\}$ − скінчена множина різних елементів довільної природи. Розглянемо комбінаторну множину P, породжену Λ.

Множину P назвемо евклідовою комбінаторною множиною, якщо її елементами є упорядковані набори елементів множини Λ.

Позначимо $N_n = \{1, 2,..., n\}$ множину перших n натуральних чисел. Тоді кожен елемент $\pi = \{\pi_1,..,\pi_n\} \in P$ є упорядкованим набором

$$\pi = \{\lambda_{i_1},...,\lambda_{i_n}\}, i \in N_n. \tag{3.4}$$

Нехай маємо n різних символів $a_i, i \in N_n$, кожний з яких утворює множину A_i, що складається з n_i однакових елементів a_i. Як відомо [156] з множини $A_i, i \in N_n$, можна будувати різні набори a, що складаються із $k \le n$ символів, тобто $a = (a_1, a_2,..., a_k)$. Їх відповідна сукупність утворює комбінаторну множину.

Комбінаторні множини, елементи яких вважаються різними, якщо у них різний порядок слідування символів, назвемо комбінаторними евклідовими множинами.

Прикладами комбінаторних евклідових множин є множина перестановок, розміщень, сполучень, розбиттів та ін.

При взаємно однозначному відображенні f комбінаторної множини E на деяку підмножину E_f арифметичного евклідового простору R^n, будь-якому елементу $a = (a_{j_1}, a_{j_2},..., a_{j_n}) \in E$ ставиться у відповідність елемент $x = (x_1, x_2,..., x_n) \in E_f$ за наступним правилом:

$$x_t = a_{j_t}, j_t \in N_n.$$

Відображення f, згідно [156], є зануренням комбінаторних множин перестановок у простір R^n; комбінаторні множини P_n, P_{nk}, занурені в R^n у результаті відображення f позначаються відповідно E_n, E_{nk}.

Здійснимо відображення множини P в арифметичний евклідів простір. Нехай $M = \{\mu_1,...,\mu_m\}$ − множина m різних дійсних чисел. Установимо взаємоoднозначну відповідність f між елементами множин Λ і M, тобто покладемо $\mu_i = f(\lambda_i)$, $\lambda_i = f^{-1}(\mu_i)$, $i \in N_m$. Здійснимо бієкцію множини P на підмножину $\pi E_f \subset E$.

Кожному елементу $\pi = (\pi_1, \pi_2, ..., \pi_n)$ вигляду (3.4) поставимо у відповідність вектор $\bar{x} = (x_1,...,x_n) \subset R^n$ за наступним правилом:

$$x_i = f(\pi_i),\ i \in N_n. \quad (3.5)$$

Зупинимося на найбільш розповсюджених способах завдання множини M і відображення f. Перенумеруємо елементи множини Λ. Поставимо у відповідність множині Λ множину номерів його елементів, тобто покладемо $M = N_m$. Нехай $\pi \in P$ і має вигляд (3.4). Тоді

$$x_j = i_j,\ j \in N_n. \quad (3.6)$$

Розглянемо випадок, коли елементами множини Λ є дійсні числа $\lambda_1,...,\lambda_m$. Елементу $x \in E$ вигляду (3.6) можна поставити у відповідність вектор $x = (x_1,...,x_n)$ з координатами $x_j = \lambda i_j,\ i_j \in N_m,\ j \in N_n$.

Надалі, якщо не оговорюється протилежне, будемо розглядати комбінаторні множини, породжені дійсними числами. Усі сформульовані нижче результати легко узагальнюються.

Розглянемо задачу оптимізації функціоналу на евклідовій комбінаторній множині. Нехай на евклідовій комбінаторній множині P задано функціонал к (π). Потрібно знайти точку $\pi^* \in R$ таку, що доставляє екстремум функціоналу. При відображенні множини P в евклідів простір R^n можна сформулювати задачу оптимізації деякої функції $\varphi(x)$ на множині E, причому кожній точці $\pi \in P$ буде відповідати точка $x \in E$, така, що $\varphi(x) = к(\pi)$. У результаті маємо задачу математичного програмування: потрібно знайти точку $x^* \in E$, таку, що

$$\varphi(x^*) = \operatorname*{extr}_{x \in E} \varphi(x). \quad (3.7)$$

Дослідженню комбінаторних задач у R^n і розробці методів їх розв'язання, що ґрунтуються на властивостях евклідового простору, присвячено велику кількість праць.

Як приклад, комбінаторним об'єктом є множина перестановок, на якій задається область значень задачі. Зокрема, перестановкою із n-елементів називається така впорядкована множина з n-елементів, які різняться між собою порядком їх розміщення. Тому далі розглянемо основні властивості комбінаторних множин, які описані в роботах [153, 154, 156] і будуть використані в даній роботі для подальшого викладу матеріалу.

3.2.1. Властивості загальної множини перестановок

Позначимо $N_0^k = N_k \bigcup \{0\}$. Вимірність підпростору $L \subset R^k : \dim L$. Опуклу оболонку множини M позначимо $\operatorname{conv} M$. Як уже було зазначено, мультимножиною є множина елементів якої можуть повторюватися. Мультимножина A задається основою $S(A)$, тобто набором всіх її різних елементів, і кратністю елементів $k_A(a)$ (або $k(a)$) – числом повторення кожного елемента a основи цієї мультимножини.

Мультимножина B з основою $S(B)$ називається підмультимножиною мультимножини A з основою $S(A)$, якщо $S(B) \subset S(A)$ і для кожного елемента $a \in S(B)$ виконується нерівність $k_B(a) \le k_A(a)$.

Нехай задана мультимножина $A = \{a_1, a_2, ..., a_q\}$, її основа $S(A) = \{e_1, e_2, ..., e_k\}$, де $\mathrm{e_j} \in \mathrm{R}^1$ $\forall j \in N_k$ і кратність елементів $k(e_j) = r_j$, $j \in N_k$, $r_1 + r_2 + ... + r_k = q$.

Впорядкованою n-вибіркою з мультимножини A називається набір:

$$a = \left(a_{i_1}, a_{i_2}, \ \ldots, a_{i_n}\right), \tag{3.8}$$

де $a_{i_j} \in A$ $\forall i_j \in N_n$, $\forall j \in N_n$, $i_s \ne i_t$, якщо $s \ne t$ $\forall s \in N_n$, $\forall t \in N_n$.

Означення 3.1. Множина $E(A)$, елементами якої є n-вибірки вигляду (3.8) з мультимножини A, називається евклідовою комбінаторною множиною, якщо для довільних її елементів $a' = (a'_1, a'_2, ..., a'_n)$, $a'' = (a''_1, a''_2, ..., a''_n)$ виконуються умови: $(a' \ne a'') \Leftrightarrow (\exists\, j : a'_j \ne a''_j)$, тобто два елементи множини $E(A)$ відмінні один від одного, якщо вони незалежно від інших відмінностей розрізняються порядком розміщення елементів, що їх утворюють.

Множина перестановок з повтореннями з n дійсних чисел, серед яких k різних, називається загальною множиною перестановок і позначається $P_{nk}(A)$. Це множина упорядкованих n-вибірок вигляду (3.8) з мультимножини A за умови $n = q > k$.

При $n=k=q$ маємо множину перестановок без повторень. Позначимо її P_n. Очевидно, що $P_n(A)=P_{nn}(A)$. У тих випадках, коли конкретно не будемо вказувати вид множини перестановок, будемо записувати ці множини як $P(A)$.

Евклідові комбінаторні множини викликають інтерес тим, що при зануренні їх в арифметичний евклідів простір набувають важливих властивостей. Опишемо ці властивості, використовуючи результати, отримані в [153, 156].

Означення 3.2. Нехай E – евклідова комбінаторна множина, а e – елемент E. Відображення $f : E \to E_f \subset R^n$ називається зануренням множини E в арифметичний евклідів простір, якщо f ставить множину E у взаємно однозначну відповідність множині $E_f \subset R^n$ за правилом: для $e=\left(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n}\right) \in E$, $x=f(e)$, $x=(x_1, x_2, ..., x_n) \in E_f$, маємо $x_j = a_{i_j}$ $\forall j \in N_n$.

Множина E_f називається спеціальною комбінаторною множиною, або коротко c-множиною. Зазначимо, що c-множина є e-множиною.

Розглянемо властивості загальної множина перестановок при зануренні в евклідів арифметичний простір.

За означенням $P_{nk}(A)$ в точках $x \in P_{nk}(A)$ справедлива рівність:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} a_i \,. \tag{3.9}$$

Отже, точки $P_{nk}(A)$ належать гіперплощині (3.9) простору R^n.

Нехай елементи мультимножини A задовольняють умові:

$$a_1 \le a_2 \le ... \le a_n , \tag{3.10}$$

а елементи $e_1, e_2, ..., e_k$ її основи – умові:

$$e_1 < e_2 < ... < e_k . \tag{3.11}$$

Як відомо [45, 153, 156, 190]), опуклою оболонкою множини $P_{nk}(A)$, елементи якої впорядковані згідно (3.10) є загальний переставний многогранник $M_{nk}(A) = \operatorname{conv} P_{nk}(A)$:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_j \le \sum_{j=1}^{n} a_j & (3.12) \\ \sum_{j=1}^{i} x_{\alpha_i} \ge \sum_{j=1}^{i} a_j , & (3.13) \end{cases}$$

$$\alpha_j \in N_n,\ \alpha_j \ne \alpha_t,\ \forall j \ne t,\ \forall j,t \in N_i,\ \forall i \in N_n.$$

Якщо елементи мультимножини A впорядковані за незростанням

$$a_1 \ge a_2 \ge \ldots \ge a_n , \tag{3.14}$$

а елементи її основи за спаданням

$$e_1 > e_2 > ... > e_k , \tag{3.15}$$

то систему обмежень (3.12), (3.13) загального переставного многогранника $M_{nk}(A)$ можна записати в вигляді рівносильної їй системи:

$$\begin{cases} \sum_{i \in \omega} x_i \le \sum_{i=1}^{|\omega|} a_i \quad \forall \omega \subset N_n ; & (3.16) \\ \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{j=1}^{n} a_i , & (3.17) \end{cases}$$

де $|\omega|$ – кількість елементів множини індексів ω.

Розглянемо властивості многогранника $M_{nk}(A)$, почавши з опису m-граней цього многогранника, $m \in N_{n-2}^0$.

Нехай для елементів мультимножини A та її основи $S(A)$ виконуються умови (3.16), (3.17), а також справедливі рівності $n_0 = 0, n_1 = r_1, n_2 = r_1 + r_2, ..., n_k = r_1 + r_2 + ... + r_k = q = n$.

Теорема 3.1. а) якщо F – m-грань многогранника $M_{nk}(A)$, що визначається системою (3.16), (3.17). Тоді існують такі підмножини $\omega_1 \subset \ldots \subset \omega_{n-m} = N_n$, для яких нерівності (3.16) перетворюються на рівності при довільному $x \in F$, тобто відповідні обмеження – жорсткі для F. При цьому F – множина розв’язків системи, одержаної з (3.16), (3.17) заміною в (3.16) нерівностей рівностями для $\omega = \omega_\sigma$ при $\sigma \in N_{n-m-1}$;

б) якщо для підмножин $\omega_1 \subset \ldots \subset \omega_\lambda = N_n$ нерівності в (3.16), (3.17) замінити рівностями, то множина F розв'язків отриманої системи є m-грань многогранника $M_{nk}(A)$:

$$m = \dim F = k - \left\{\lambda + \sum\left(|\omega_\sigma| - |\omega_{\sigma-1}| - 1\right)\right\}$$

і підсумовування ведеться по всіх індексах $\sigma \in N_\lambda$, для кожного з яких знайдеться таке $j \in N_k$, що $n_{j-1} \le |\omega_{\sigma-1}|$ та $|\omega_\sigma| \le n_j$ (вважається $|\omega_0 = 0|$).

У роботах [153, 156] розглянуті питання суміжності граней $M_n(A)$, у яких говориться, що, якщо S_1^i і S_2^i – суміжні $i-$ грані многогранника $M_n(A)$, то $S_1^i \cap S_2^i = S^{i-1}, i \in N_{n-2}$, де $S^{i-1} - (i-1)$ грань. Тоді, відповідно до попередньої властивості можна вказати множини $\Omega_1^i = \{\omega_1^1, \omega_2^1, ..., \omega_{n-i-1}^1\}$ і $\Omega_2^i = \{\omega_1^2, \omega_2^2, ..., \omega_{n-i-1}^2\}$, що відповідають i-граням S_1^i і S_2^i. У свою чергу, для грані S_1^{i-1} існує множина $\Omega^{i-1} = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_{n-1}\}$.

Наслідок 3.1. Для того щоб $(i-1)$-грані S_1^i і S_2^i були суміжними, необхідно і достатньо, щоб множина $\Omega^{i-1} = \Omega_1^i \cap \Omega_2^i$ визначала $(i-1)-$ грань $S^{i-1}, i \in N_{n-2}$.

Для загального переставного многогранника $M_{nk}(A)$ зазначені властивості допускають деякі узагальнення.

Наслідок 3.2. Множина розв'язків системи (3.16), (3.17) є i-гранню, $i \in N_{n-2}^0$ многогранника $M_n^+(A)(a_1 > a_2 > ... > a_n \ge 0)$ у тому і тільки в тому випадку, коли кожен з цих розв'язків перетворює в рівність нерівності цієї системи лише для підмножин $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_{n-i-1}$, що мають властивість:

$$\omega_1 \subset \omega_2 \ldots \subset \omega_{n-i-1} \subset N_n. \tag{3.18}$$

Наслідок 3.2. Якщо $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ – вершина многогранника $M_{nk}(A)$, що визначається (3.16), (3.17), то справедливі умови:

$$\left\{\alpha_1^1\right\} \subset \left\{\alpha_1^2,\ \alpha_2^2\right\} \subset \ldots \subset \left\{\alpha_1^n,\ \alpha_2^n, \ldots,\ \alpha_n^n\right\} = N_n, \tag{3.19}$$

$$\sum_{t=1}^{i} x_{\alpha_t^i} = \sum_{t=1}^{i} a_t \quad \forall i \in N_n\ , \tag{3.20}$$

і навпаки, якщо виконуються умови (3.19), (3.20), то точка x – вершина загального переставного многограника $M_{nk}(A)$.

Теорема 3.2. Вершинами загального переставного многогранника $M_{nk}(A)$, суміжними з вершиною $x = \left(a_{\alpha_1}, a_{\alpha_2}, \ldots, a_{\alpha_n}\right)$, є усякі вершини, які одержані з x перестановкою компонент рівних e_i, e_{i+1} $\forall i \in N_{k-1}$ і тільки вони.

Твердження 3.1. Кількість R суміжних з довільною вершиною многогранника $M_{nk}(A)$ вершин обчислюється за формулою:

$$R = r_1 r_2 + r_2 r_3 + \ldots + r_{k-1} r_k\ . \tag{3.21}$$

Означення 3.3. Сукупність нерівностей (3.13) системи (3.12), (3.13), які мають однакове значення величини i називають i-ю спілкою нерівностей цієї системи, а верхню нерівність (3.12) системи – нерівністю нульової спілки.

Означення 3.4. Точку $x^0 = \left(x_1^0, \ldots, x_n^0\right)$ називають характеристичною точкою $(n-2)$-площини переставного многогранника $M_{nk}(A)$, що визначається довільною нерівністю (3.13) системи (3.12), (3.13), якщо координати цієї точки визначаються таким чином:

$$x_{\alpha_1}^0 = \ldots = x_{\alpha_i}^0 = \frac{a_1 + \ldots + a_i}{i},\ x_{\alpha_{i+1}}^0 = x_{\alpha_{i+2}}^0 = \ldots = x_{\alpha_n}^0 = \frac{a_{i+1} + \ldots + a_n}{n-i},$$

де $\alpha_j \in N_n,\ \alpha_j \neq \alpha_t, \forall j \neq t, \forall j, t \in N_i, \forall i \in N_n$.

Зауваження 3.1. Кількість нерівностей, які входять в систему (3.12), (3.16), дорівнює 2^n, оскільки в спілці i міститься C_n^i нерівностей, де C_n^i – число сполучень з n елементів по i.

Нехай для мультимножини $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ виконуються умови (3.10), (3.11), а кратності елементів мультимножини A рівні $\{r_1, \ldots, r_k\}$.

Теорема 3.3. Виключення з системи обмежень (3.12), (3.13), що описує загальний переставний многогранник $M_{nk}(A)$ при

$k(e_1)=r_1>1$ всіх нерівностей спілок $2,3,...,r_1$, а при $k(e_k)=r_1>1$, де $e_1,e_k\in S(A)$, усі нерівності спілок $n-r_k,n-r_k+1,...,n-2$, перетворює її в незвідну систему обмежень многогранника $M_{nk}(A)$.

Теорема 3.4. Точки множини P_{nk} лежать на сімействі $(n-1)$-сфер, що описуються системою рівнянь

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\tau)^2=r^2,\\ \sum_{i=1}^{n}x_i=c_1.\end{cases} \qquad (3.22)$$

Центром сфери найменшого радіусу, що визначається рівністю

$$r_{\min}=\sqrt{c_2-\frac{c_1^2}{n}},$$

є точка $\tau^*=(\tau,\tau,...,\tau)\in R^n$, яка задається виразом $\tau=\frac{c_1}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i$.

Надалі для визначеності розглядається сфера найменшого радіусу, оскільки координати її центру обчислюються найпростіше. Відмітимо ряд властивостей множини P_{nk}, що випливають безпосередньо з цієї теореми. Точки множини P_{nk} можна інтерпретувати як вершини опуклого $(n-1)$-многогранника Π_{nk}, вписаного в $(n-1)$-сферу W. Довжина l_{nk} якнайменшого ребра многогранника Π_{nk} рівна

$l_{nk}=\left(\min\limits_{\substack{j\le i\le k\\ i\ne j}}\{\alpha_i\}-\beta_1\right)\sqrt{2}$, $\beta_1=\alpha_j=\min\limits_{\substack{j\le i\le k\\ i\ne j}}\{\alpha_i\}$. Діаметр d_{nk} множини P_{nk} визначається з виразу $d_{nk}=\sqrt{\sum_{t=1}^{n}\left(\pi_{j_i}-\pi_{j_{n+1-t}}\right)^2}$, де послідовність π_{j_t} впорядкована за збільшенням.

Теорема 3.5. Множина P_{nk} симетрична щодо всякої гіперплощини вигляду

$$x_i-x_j=0, i,j\in N_n, i\ne j. \qquad (3.23)$$

Твердження 3.2. Точки множини P_n лежать на $(n-1)$-сфері з центром W в точці $\tau^*=(\tau_1,\tau_2,...,\tau_n)\in R^n$, $\tau_1=\tau_2=...=\tau_n=\frac{n+1}{2}$ і радіусом $r=\frac{\sqrt{3n(n+1)(n-1)}}{6}$.

Теорема 3.6. [156] Множина P_{nk} лежить на сімействі n-площин вигляду $\frac{s}{n-s}x_1+\frac{s}{n-s}x_2+...+\frac{s}{n-s}x_{n-s}-x_{n-s+1}-...-x_n+a_t^s=0$, $t=1,2,...,\gamma_s\le\frac{n}{s!(n-s)!}$, при цьому s може приймати значення 1, 2, …, $n-1$....

Розглянемо задачу (3.1) при $f(x)=\langle c,x\rangle$, $c=(c_1,c_2,...,c_n)$. Маємо

$$\Phi(x)=\underset{x\in P_{nk}(A)}{\mathrm{extr}}\sum_{i=1}^{n}c_ix_i\ , \tag{3.24}$$

Властивість 3.1. Якщо існують такі $i,j,$ що $c_i=c_j$, $i,j\in N_n$, то при заміні x_i на x_j і навпаки x_j на x_i значення цільової функції задачі (3.24), не зміниться.

При розв’язанні комбінаторних задач природно виникає необхідність скорочення використовуваних ресурсів ЕОМ: часу, об’єму пам’яті та ін. При цьому істотно використовуються будь-які можливості зменшення числа вершин многогранника Π_{nk}, кількості змінних, обмежень і т. д. В цьому значенні представляють інтерес наступні властивості.

3.2.2. Властивості загальної множини розміщень

Розглянемо множину k-розміщень без повторення, тобто A є множиною, $q=k$, $A=S(A)$. За такої умови множину всіх упорядкованих n-виборок з мультимножини A вигляду $a=(a_1,a_2,...,a_n)$ називають множиною n-розміщень без повторення з k різних дійсних чисел множини A. Позначимо цю множину розміщень $A_k^n(A)=A_q^n$.

Якщо $n=k$, то множина A_q^n є множиною $P_n(A)$ перестановок n-різних дійсних чисел, що складають A.

Розглянемо множину *n*-розміщень з повтореннями з *k* різних дійсних чисел з мультимножини *A,* в якій *q* елементів.

Розглянемо загальну множину *n*-розміщень.

Нехай $A=\{a_1,a_2,...,a_q\}$, як і раніше, – мультимножина з основою $S(A)=(e_1,e_2,...,e_k)$ та первинною специфікацією $[A]=(n_1,n_2,...,n_k)$ де $n_i \le k \; \forall i \in N_k$. Сукупність усіх упорядкованих *n*-виборок вигляду (3.8) з мультимножини *A* будемо називати загальною множиною *n*-розміщень і позначити її $A_{qk}^n(A)=A_{qk}^n$. Зазначимо, що оскільки елементи первинної специфікації мультимножини *A* задовольняють умови $n_i \le k$, то в кожному елементі множини A_{qk}^n не більше n_i елементів $e_i \in S(A) \; \forall i \in k$.

Зазначимо також, що при $k=q$, тобто при $n_i=1 \;\; \forall i \in N_k$, множина $\grave{A}_{qk}^n(A)$ збігається з множиною $A_k^n(A)=A$ розміщень без повторень: $\grave{A}_{kk}^n(A)=\grave{A}_k^n(A)$, а при $n_i=n \; \forall i \in N_k$, тобто при $q=nk$, множина $\grave{A}_{qk}^n(A)$ перетворюється на множину $\grave{A}_k(A)$ розміщень з повтореннями: $\grave{A}_{qk}^n(A)=\grave{A}_k^n(A)$.

Якщо $n=q$, то множина $\grave{A}_{qk}^n(A)$ є загальною множиною перестановок $P_{nk}(A)$ з елементів мультимножини *A*.

Як відомо з [45, 153], опуклою оболонкою точок загальної комбінаторної множини розміщень є загальний многогранник розміщень $M_{qk}^n(A)=\operatorname{conv}\grave{A}_{qk}^n(A)$. Загальний многогранник розміщень $M_{qk}^n(A)$ можна представити сукупністю всіх розв’язків такої системи нерівностей:

$$\sum_{j=1}^{|\omega|} a_{q-j+1} \le \sum_{i\in\omega} x_i \le \sum_{j=1}^{|\omega|} a_j, \; \forall \omega \subset N_n. \qquad (3.25)$$

Означення 3.5. Вектор *x* є вершиною загального многогранника розміщень $M_{qk}^n(A)$ тоді і тільки тоді, коли він представляє собою перестановку чисел, $a_1,...,a_s,...,a_{q-r+1},...,a_q$, де $s \in N_n, r \in \{N_n \cup 0\}$, $s+r=n$.

Поряд з відомими евклідовими комбінаторними множинами перестановок, розміщень, сполучень, розбиттів виділяються більш складні структури – полікомбінаторні множини. Інтерес до таких множин обумовлений різними прикладними задачами, оскільки значна їх кількість досить добре описується за допомогою полікомбінаторних конструкцій [55, 154]. Отже, розглянемо властивості загальної множини поліпереставновок та полірозміщень.

3.2.3. Властивості загальної множини поліперестановок

Розглянемо опуклу оболонку множини поліперестановок $P_{nk}^{S}\left(A,H\right), M_{nk}^{s}\left(A,H\right)=\operatorname{conv}P_{nk}^{s}\left(A,H\right)$. Якщо далі при викладі матеріалу не буде потреби підкреслювати значення параметрів n,k,s, будемо використовувати також позначення $P\left(A,H\right)=P_{nk}^{s}\left(A,H\right)$ та $M\left(A,G\right)=M_{nk}^{s}\left(A,H\right)$.

Нехай $A^{n_i}\subset A$ – n_i-елементна мультимножина, $n_i=|N_i|\ \forall i\in N_s$, що утворена елементами $a_1^{N_i},...,a_{n_i}^{N_i}$ мультимножини A з номерами з множини N_i такими, що $n_1+...+n_s=n$. Упорядкуємо, не порушуючи загальності подальших міркувань, компоненти мультимножини A^{N_i}:

$$a_1^{N_i}\ge a_2^{N_i}\ge ...\ge a_{n_i}^{N_i}.$$

Покладемо $N_i^{'}=\left\{\left(\sum_{j=1}^{i-1}n_j\right)+1,\left(\sum_{j=1}^{i-1}n_j\right)+2,...,\sum_{j=1}^{i}n_j\right\}\forall i\in N_s.$

Теорема 3.7. Множина $M\left(A,H\right)$ визначається сукупністю всіх розв’язків системи:

$$\begin{cases}\sum\limits_{j\in K_i^{'}}x_j-\sum\limits_{j=1}^{n_i}a_j^{N_i},\ \forall i\in N_s;\\ \sum\limits_{j\in\omega^i}x_j\le\sum\limits_{j=1}^{|\omega^i|}a_j^{N_i},\ \forall\omega^i\subset N_i^{'},\forall i\in N_s.\end{cases}\tag{3.26}$$

Назвемо групою $\left(i, |\omega^i|\right)$ нерівностей системи (3.26) сукупність нерівностей цієї системи з фіксованими значеннями пари чисел $i, |\omega^i| \quad \forall \omega^i \subset N_i^{'}, \forall i \in N_S$.

Нехай мультимножина $A^{N_i} = \left\{ a_1^{n_i}, ..., a_{n_i}^{N_i} \right\}$ має основу $S\left(A^{N_i}\right) = \left\{ e_1^i, ..., e_{k_i}^i \right\}$, первинну специфікацію $\left(A^{N_i}\right) = \left\{ p_1^i, ..., p_{k_i}^i \right\}$, $p_1^i + ... + p_{k_i}^i = n_i$.

Нехай $a_j^{N_i} \geq a_{j+1}^{N_i}, \forall j \in N_{n_i - 1}, i \in N_S$. Якщо $p_1^i > 1$, то очевидно, що в цьому випадку при виконанні нерівностей групи $(j,1)$ виконуються і нерівності групи $(j,2), ..., \left(j, p_j^i\right)$. Дійсно, так як $x_q \leq a_1^{N_i}$, то $x_q + x_m \leq a_1^{N_i} + a_1^{N_i}$ $\left(\forall q, m \in \omega^i \subset N_i^{'}, i \in N_S\right)$ і так далі, $\sum_{q=1}^{p_1^i} x_{\alpha_q} \leq p_1^i a_1^{N_i}, \alpha_q \in \omega^i \subset N_i^{'}, i \in N_S$. Тобто в системі (3.26), що описує $M(A, H)$, можна залишити нерівності спілок $(i,1), \left(i, p_1^i + 1\right), \left(i, p_1^i + 2\right), ..., (i, n_i - 1)$. Аналогічні міркування можна провести і у випадку, коли $p_{k_i}^i > 1$.

Многогранник $M(A, H)$ будемо називати загальним (на відміну від випадку $M\left(A^i, H\right)$, коли $\grave{A}$-множина) многогранником евклідової переставної множини з повтореннями, або загальним поліпереставним многогранником.

Нехай M_i є $d_i -$ вимірним многогранником $\forall i \in N_S$. Як відомо (див, наприклад [45]), під добутком многогранників $M_1, ..., M_S$ розуміють таку множину

$$\bigotimes_{i=1}^{S} M_i = \left\{ x \in R^{d_1 + ... + d_S} \mid x = \left(x_1, ..., x_S\right), x_i \in M_i \ \forall i \in N_S \right\}.$$

Далі сформулюємо наступну лему, що приводиться згідно [45].

Лема 3.1.

1. Добуток многогранників є многогранником.
2. $\dim\left(\bigotimes_{i=1}^{S} M_i\right)=\sum_{i=1}^{S}\dim M_i$, де $\dim A$ – вимірність множини *A*.
3. *n*-вимірні грані многогранника $\bigotimes_{i=1}^{S} M_i$ утворюють множину з елементами вигляду $\bigotimes_{i=1}^{S} F_i$, де F_i – є n_i -вимірна грань многогранника M_i та $n_1+\ldots+n_S=n$.

Позначимо n_i кількість елементів основи мультимножини $A^{N_i}=\left\{a_1^{N_1},\ldots,a_i^{N_i}\right\}$.

Теорема 3.8. $M\left(A,H\right)=\bigotimes_{i=1}^{S} M_{n_i k_i}\left(A^{N_i}\right)$.

Теорема 3.9. Множина $P\left(A,H\right)$ збігається з множиною вершин многогранника $M\left(A,H\right)$.

Теорема 3.10. Вершина $a\left(\pi\right)\in \operatorname{vert} M\left(A,H\right)$ є суміжною до вершини $a\left(\sigma\right)\in \operatorname{vert} M\left(A,H\right)$ тоді і тільки тоді, коли $a\left(\sigma\right)$ утворюється з $a\left(\pi\right)$ переставленням двох нерівних одна одній компонент – $a_i^{N_i}$ та $a_{i+1}^{N_i}$, $j\in N_{n_i-1}, i\in N_S$.

Теорема 3.11. Точки множини $M(A,H)$ належать $(n-2)$-сфері $W\subset R^n$, що описується системою рівнянь:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i=\sum_{i=1}^{n} a_i\ ,\ \sum_{i=1}^{n}\left(x_i-t^*\right)^2=r^2\ ,$$

де t^*, r обчислюються за формулами:

$$t^*=\frac{a_1+\ldots+a_n}{n}\ ,\ r=\left(\sum_{j=1}^{n}\left(a_i-\left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right)/n\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

відповідно.

Лема 3.2. Вписаний в $(n-1)$-сферу S_{k-1} k-многогранник M_k перетинається з S_{k-1} в вершинах $\operatorname{vert} M_k$ цього многогранника і тільки в них.

Теорема 3.12. Точка множини $M(A,H)$ і тільки вона задовольняють системам обмежень, що складаються з (3.6), та рівнянь сфери.

Теорема 3.13. Нехай мультимножина $A^{N_i}=\left\{a_1^{N_i},...,a_{n_i}^{N_i}\right\}$, де $a_1^{N_i}\geq ...\geq a_n^{N_i}, \forall i\in N_S$, має основу $S\left(A^{N_i}\right)=\left\{e_1^i,...,e_{k_i}^i\right\}$, де $e_1^i>...>e_{k_i}^i, \forall i\in N_S$ та первинну специфікацію $\left(A^{N_i}\right)=\left\{p_1^i,...,p_{k_i}^i\right\}$, $p_1^i+...+p_{k_i}^i=n_i$, $\forall i\in K_S$.

Нехай
$n_0^i=0, n_1^i=p_1^i,\ n_2^i=p_1^i+p_2^i,...,n_{k_i}^i=p_1^i+...+p_{k_i}^i=n_i, \forall i\in K_S$.

а) якщо F – m-грань многогранника $M(A,H)$, тоді знайдуться такі підмножини $\omega_0^i\subset\omega_1^i\subset...\subset\omega_{n_i-m_i}^i=N_i^{'}, \forall i\in N_S, m_1+...+m_S=m$, для яких нерівності з (3.16) перетворюються у рівності при будь-якому $x\in F$, тобто відповідні обмеження є жорсткими для F. При цьому F-множина розв'язків системи, одержаної з (3.16) заміною нерівностей рівностями для $\omega_{\sigma_i}^i, \forall\sigma_i\in N_{n_i-m_i}^o, \forall i\in N_S$;

б) якщо для підмножин $\varnothing=\omega_0^i\subset\omega_1^i\subset...\subset\omega_{q_i}^i=N_i^{'}, \forall i\in N_S$ в системі (3.16) нерівності замінити рівностями, то множина F розв'язків одержаної системи є m-гранню многогранника $M(A,H)$, де $m=m_1+...+m_S$, а $m_i=n_i-\left\{q_i-\sum\left(|\omega_{\sigma_i}^i|-|\omega_{\sigma_i-1}^i|-1\right)\right\}$ і підсумовування проводиться по всіх індексах $\sigma_i\in N_{q_i}$, для кожного з яких знайдеться таке $j\in N_{k_i}$, що $n_{j-1}^i\leq|\omega_{\sigma_i-1}^i|$ та $|\omega_{\sigma_i}^i|\leq n_j^i$ (вважаємо, що $\left|\omega_0^i\right|=0$), $\forall i\in N_S$.

3.2.4. Властивості загальної множини полірозміщень

Представимо множину N_q у вигляді впорядкованого розбиття на s, де $s < q$, непустих попарно непересічних підмножин $N_1,...,N_s$, тобто для них виконуються умови: $N_i \cap N_j = \varnothing$, $N_i \neq \varnothing$, $N_j \neq \varnothing$, $\forall i, j \in N_s$, а так само впорядковане розбиття числа k на s доданки $k_1, k_2, ..., k_s$, що задовольняє умова $1 \le k_i \le q_i$, $\forall i \in N_s, |N_i| = q_i$. Очевидно, що $q_1 + q_2 + ... + q_s = q$, $k_1 + k_2 + ... + k_s = k$.

Позначимо H – множину елементів вигляду: $h = \left(h(1),...,h(k)\right) = \left(h^1,...,h^s\right)$, де $h(j) \in N_n$, $j \in N_k$, а h^i – довільна перестановка елементів множини $J_i \; \forall i \in N_s$.

Нехай підмультимножина A^i мультимножини A, складається з тих елементів A, номери яких належать множині N_i: $A^i = \left\{a_1^i,...,a_{k_i}^i\right\}$, $|N_i| = k_i$.

Означення 3.6. Множину

$$A_{qk}^{ns}(A,H) = \left\{\left(a_{h(1)},...,a_{h(k)}\right) \middle| a_{h(i)} \in A \; \forall i \in N_n, \forall h \in H\right\} \subset R^k$$

називають загальною множиною полірозміщень, зазначених $A_{qk}^{ns}(A,H) = A_{qk}^{ns}$.

Не втрачаючи загальності, упорядкуємо елементи мультимножини A за неспаданням: $a_1 \le \ldots \le a_k$. Очевидно, що це впорядкування зберігається й для кожної підмультимножини A^i $i \in N_s$, з A.

Відомо [55, 154], що опуклою оболонкою множини $A_{qk}^{ns}(A,H)$ полірозміщень є многогранник $M_{qk}^{ns}(A,H)$ полірозміщень $M_{qk}^{ns}(A,H) = \operatorname{conv} \grave{A}_{qk}^{ns}(A,H)$, множина вершин якого є підмножиною множини полірозміщень: $\operatorname{vert} M_{qk}^{ns}(A,H) \subset \grave{A}_{qk}^{ns}(A,H)$.

Теорема 3.14. Множина $M_{qk}^{ns}(A,H)$ визначається сукупністю всіх розв'язків системи:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n_i} x_j \le \sum_{j=1}^{n_i} a_j^i, \, i \in N_s, & (3.27) \\ \sum_{j=1}^{m_i} x_{\alpha_j} \ge \sum_{j=1}^{m_i} a_j^i, \quad m_i \in N_{q_i - 1}, \alpha_j \in N_i, \forall i \in N_s & (3.28) \end{cases}$$

$\alpha_j \ne \alpha_t, \forall j \ne t, \forall j, t \in N_i.$

Многогранник $M_{qk}^{ns}(A, H)$ будемо називати загальним многогранником евклідової множини полірозміщень. Розглянемо деякі його властивості і його зв'язок із загальною множиною поліразміщень.

Очевидно, що із системи лінійних нерівностей (3.27)–(3.28) можна виділити s підсистем лінійних нерівностей, що описують многогранники розміщень $M_{q_i k_i}^{n_i}\left(A^i\right)$, що є опуклою комбінацією множини розміщень $a_{h^i}, i \in N_s$. Отже,

$$M_{q_i k_i}^{n_i}\left(A^i\right) = \left\{ x \in R^{n_i} \left| \sum_{j=1}^{n_i} x_j \le \sum_{j=1}^{n_i} a_{q_i - j}^i, \sum_{j=1}^{m_i} x_{\alpha_j} \ge \sum_{j=1}^{m_i} a_j^i \right. \right\},$$

$$m_i \in N_{q_i - 1}, \alpha_j \in J_i, \alpha_j \ne \alpha_t, \forall j \ne t, \forall j, t \in J_i, \forall i \in N_s.$$

Розглянемо добуток многогранників $M_1, ..., M_s$ як множину $\bigotimes_{i=1}^{s} M_i = \left\{ x \in R^{d_1 + ... + d_s} \mid x = (x_1, ..., x_s), \ x_i \in M_i \ \ \forall i \in N_s \right\}$, де M_i – d_i - вимірний многогранник та скористаємося лемою 3.1.

Зрозуміло, що кожний з многогранників $M_{q_i k_i}^{n_i}\left(A^i\right)$ є многогранником розміщень. За означенням добутку многранників і відповідно до леми 3.1 справедлива рівність $\bigotimes_{i=1}^{s} M_{q_i k_i}^{n_i}\left(A^i\right) = \left\{ x \in R^{d_1 + ... + d_s} \mid x = (x_1, ..., x_s), \ x_i \in M_{q_i k_i}^{n_i}\left(A^i\right) \ \ \forall i \in N_s \right\},$

тобто точка $x \in \bigotimes_{i=1}^{s} M_{q_i k_i}^{n_i}\left(A^i\right)$ задовольняє кожній з s підсистем системи (3.27), (3.18). Отже, можна стверджувати, що якщо a_{h^i} – вершина многогранника $M_{q_i k_i}^{n_i}\left(A^i\right)$, то $a(h)=\overset{s}{\underset{i=1}{\otimes}} a_{h^i}$. Відповідно $a(h)=\left(a_{h^1},...,a_{h^s}\right)$, де $a(h)\in P_{qk}^{ns}(A,H)$. Справедливі наступні теореми [55, 154].

Теорема 3.15. $M_{qk}^{ns}(A,H)=\overset{s}{\underset{i=1}{\otimes}} M_{q_i k_i}^{n_i}\left(A^i\right)$.

Теорема 3.16. Множина полірозміщень $A_{qk}^{ns}(A,H)$ збігається із множиною вершин многогранника $M_{qk}^{ns}(A,H)$.

Теорема 3.17. Вершина $a(h)\in \operatorname{vert} M_{qk}^{ns}(A,H)$ є суміжною з вершиною $a(z)\in \operatorname{vert}\mathrm{M}_{qk}^{ns}(A,H)$ тоді й тільки тоді, коли $a(z)$ утвориться з $a(h)$ перестановкою двох нерівних один одному компонент: a_i^i і a_j^i, $j\in N_{q_i-1}$, $i\in N_s$.

3.3. Задачі оптимізації на евклідових комбінаторних множинах

Основною задачею комбінаторної оптимізації є задача знаходження екстремуму та екстремалі, тобто пари:

$$F\left(q^*\right)=\underset{q\in Q}{\operatorname{extr}} F(q) \tag{3.29}$$

$$q^*=\arg\underset{q\in Q}{\operatorname{extr}} F(q), \tag{3.30}$$

де Q – скінчена комбінаторна множина, на якій задано деякий функціонал F.

Розв’язком задачі (3.29), (3.30) називається пара $\left(F\left(q^*\right),q^*\right)$.

Введення поняття *e*-комбінаторної множини дає можливість виокремити з сукупності задач комбінаторної оптимізації (3.29), (3.30), ті задачі, в яких $Q=E$, а саме:

$$F\left(x^*\right)=\underset{x\in E}{\operatorname{extr}} F(x); \tag{3.31}$$

$$x^* = \arg\operatorname*{extr}_{x \in E} F(x). \qquad (3.32)$$

Введення відображення f (занурення в R^k) згідно [153] дає можливість замінити розв'язок задачі (3.31), (3.32), розв'язком такої задачі знайти:

$$\Phi\left(x^*\right) = \operatorname*{extr}_{x \in E_f} \Phi(x), \qquad (3.33)$$

$$x^* = \arg\operatorname*{extr}_{x \in E_f} \Phi(x), \qquad (3.34)$$

де $\Phi(x)$ – функція k змінних, що визначається на множині E_f, $\Phi : E_f \to R^1$, яка відповідає функціоналу $F(x), x \in E$.

Під відповідністю функції Φ функціоналу $F(a)$, де $a \in E, x = f(a)$ будемо розуміти співвідношення: $F(a), \Phi\left(f(a)\right) \forall a \in E$. Функція $\Phi(x)$ може бути визначеною на множині $E_\Phi \supset E_f$.

Означення 3.7 [153]. Задача (3.33), (3.34) називається евклідовою задачею комбінаторної оптимізації, або *e*-задачею оптимізації.

Інколи зручно задачу (3.33) (3.34) представити у такий спосіб:

$$C\left(y^*\right) = \operatorname*{extr}_{x \in E_\phi} C(y), \qquad (3.35)$$

$$y^* = \arg\operatorname*{extr}_{x \in E_\phi} C(y), \qquad (3.36)$$

за обмежень

$$\phi^i(y) \le 0 \quad \forall i \in N_r, \qquad (3.37)$$

$$\phi^{r+i}(y) = 0 \quad \forall i \in N_s, \qquad (3.38)$$

де $x = (x_1, ..., x_n)$, $y = (x_1, ..., x_n, y_{n+1}, ..., y_m) \in R^m$, m – натуральна константа $(m \ge n), C(y), \varphi^i(y) \forall i \in N_{r+s}$ – функції m змінних. Обмеження (3.37), (3.38) називають додатковими обмеженнями *e*-задачі.

Означення 3.8 [136]. Задача (3.35)–(3.38) при $m = n$ називається повністю комбінаторною задачею, а при $m > n$ – частково комбінаторною. Змінні $y_{n+1},...,y_m$ називаються неперервними, а $x_1,...,x_n$ – комбінаторними. Якщо $r+s=0$, тобто додаткових обмежень немає, то *е*-задача (3.35)–(3.38) називається евклідовою безумовною задачею комбінаторної оптимізації, в іншому випадку – умовною *е*-задачею.

Якщо функції $C(y),\varphi^i(y)\forall i\in N_{r+s}$ є лінійними, то задача (3.35)–(3.38) називається лінійною задачею.

В залежності від того, який вигляд має допустима множина задачі комбінаторної оптимізації (3.31), (3.32) називають:

– задачею на перестановках без повторень $\left(E=P_k(A)\right)$;

– задачею на загальній множині перестановок $\left(E=P_{nk}(A)\right)$ і т. д.

Згідно даних вище означень задачею лінійної оптимізації на загальній множині перестановок без додаткових обмежень називається, задача знаходження пари $\left\langle \Phi\left(x^*\right),x^*\right\rangle$:

$$\Phi\left(x^*\right)=\underset{x\in P_{nk}(A)}{\text{extr}}\sum_{i=1}^{k}c_i x_i\ , \tag{3.39}$$

$$x^*=\arg\underset{x\in P_{nk}(A)}{\text{extr}}\sum_{i=1}^{n}c_i x_i\ , \tag{3.40}$$

де $a_i\in R^1\forall i\in N_k$.

Розглянемо задачу, що полягає в знаходженні x^* такого, що

$$\sum_{i=1}^{k}c_i x^*=\underset{x\in M_{nk}(A)}{\text{extr}}\ \sum_{i=1}^{n}c_i x_i\ , \tag{3.41}$$

$$x^*=\arg\underset{x\in M_{nk}(A)}{\text{extr}}\ \sum_{i=1}^{n}c_i x_i\ . \tag{3.42}$$

Якщо задача (3.41), (3.42) розв’язується методом лінійного програмування, і знаходить розвязок, що є вершиною допустимої області, то розв’язки задач (3.39), (3.40) та (3.41), (3.42) еквівалентні, оскільки як відомо:

$$P_{nk}(A)=\text{vert}\,M_{nk}(A)\,.$$

Лінійні додаткові обмеження суттєво ускладнюють розв’язок задачі.

По вигляду цільової функції або додаткових обмежень можна назвати евклідову комбінаторну задачу відповідно *е*-задачею дробово-лінійної, угнутої, нелінійної оптимізації тощо.

3.4. Фундаментальні властивості функцій, заданих на евклідових комбінаторних множинах

Результати, наведені в підрозділах 3.4 – 3.6 представлені в [170]. Наш виклад слідуватиме цій роботі.

Розглянемо скінченну множину точок $M \subset R^n$, позначимо $X = \operatorname{conv} M$, $E = \operatorname{vert} X$. Нехай $f(x)$ – довільна функція, визначена на E, тобто $f: E \to R^1$. Досліджуємо питання про існування опуклої функції $\varphi(x)$, визначеної на множині X такій, що $\varphi(x) = f(x)$ для всіх $x \in E$. Функцію $\varphi(x)$, що задовольняє зазначеній властивості, будемо називати опуклим продовженням функції $f(x)$ на X.

Теорема 3.18. Для будь-якої функції $f: E \to R^1$ існує опукла функція $\varphi: X \to R^1$, така, що $\varphi(x) = f(x)$ для всіх $x \in E$.

Розглянемо процес конструктивного опису функції $\varphi(x)$. Будь-яка точка $x \in X$ може бути представлена у вигляді опуклої комбінації точок множини E, тобто

$$x = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i; \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1; \ 0 \le \alpha_i \le 1; x_i \in E. \tag{3.43}$$

У загальному випадку розкладання точки $x \in X$ не єдине і залежить від так званих барицентричних координат. Множину значень $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_m)$, при яких при заданому $x \in X$ має місце представлення (3.43), позначимо через $\Lambda(x)$. Уведемо також у розгляд для кожного $x \in X$ множину

$$\bar{\Lambda}(x) = \left\{ (\alpha_1, ..., \alpha_m) : x = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i; \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1; \ 0 \le \alpha_i \le 1; \ x_i \in E \right\},$$

набір $(x_i : \alpha_i \ne 0)$ афінно незалежний.

Розглянемо дві функції

$$\varphi(x) = \min_{a \in \Lambda(x)} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f(x_i); \tag{3.44}$$

$$\overline{\varphi}(x) = \min_{a \in \Lambda(x)} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f(x_i). \qquad (3.45)$$

Покажемо, що функції $\varphi(x)$ і $\overline{\varphi}(x)$ задані коректно.

Спочатку розглянемо функцію $\varphi(x)$. Зафіксуємо довільну точку $x \in X$. Цій точці відповідає множина барицентричних координат

$$\Lambda(x) = \left\{ \left(\alpha_1, ..., \alpha_m\right) : \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1;\ 0 \le \alpha_i \le 1;\ x_i \in E \right\}. \qquad (3.46)$$

Покажемо, що $\Lambda(x)$ − опуклий компакт. Нехай $\alpha^1 = (\alpha_1^1, ..., \alpha_m^1)$, $\alpha^2 = (\alpha_1^2, ..., \alpha_m^2)$. Тоді для будь-якого $0 \le \lambda \le 1$ справедлива рівність

$$\left\langle \lambda\alpha^1 + \left(1-\lambda\right)\alpha^2, x \right\rangle = \lambda \left\langle \alpha^1, x \right\rangle + \left(1-\lambda\right) \left\langle \alpha^2, x \right\rangle = \lambda x + \left(1-\lambda\right) x = x,$$

тобто $\lambda\alpha^1 + \left(1-\lambda\right)\alpha^2 \in \Lambda(x)$ і, отримуємо, що $\Lambda(x)$ – опукла множина.

Обмеженість $\Lambda(x)$ очевидна, оскільки $\Lambda(x) \subset \prod_{i=1}^{m} \left[0,1\right]$. Замкнутість $\Lambda(x)$ безпосередньо випливає з неперервності операції скалярного добутку. Отже, $\Lambda(x)$ – опуклий компакт, на якому визначена неперервна функція $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i f(x_i)$, яка, як відомо, досягає на $\Lambda(x)$ мінімального значення. Отже, функція $\varphi(x)$ задана коректно. Коректність завдання $\overline{\varphi}(x)$ випливає із скінченного числа представлень точки $x \in E$ у вигляді (3.43).

Лема 3.3. Функції $\varphi(x)$ і $\overline{\varphi}(x)$, задані виразами (3.44) і (3.45), рівні на множині X.

Теорема 3.19. Нехай $f: E \to R^1$. Тоді функція $\overline{\varphi}(x)$, задана виразом (3.45), є опуклим продовженням $f(x)$ на множині X, причому E.

Дослідимо питання про існування сильно опуклого продовження функції $f(x)$, заданої на E.

Теорема 3.20. Для будь-якої функції $f: E \to R^1$ і для кожного

$\rho > 0$ існує сильно опукла з параметром не меншим ρ функція $\Psi : X \to R^1$, така, що $\Psi(x) = f(x)$ для всіх $x \in E$.

Доведення. У силу обмеженості множини X існує сфера $B_r(0) \supset X$ з центром у нулі простору R^n і радіусом $r > 0$. Позначимо через $S_r(0)$ границю сфери $B_r(0)$.

Для кожної точки $x_i \in E, i = 1,...,m$, визначимо $b_i = \mathrm{Pr}_{Sr(0)}\, x_i$, де Pr – оператор ортогонального проектування.

Відмітимо, що в силу компактності $S_r(0)$ зазначена проекція існує.

Побудуємо функції $\eta(x) = \left\| x - x_i + b_i \right\|^2 - \left\| b_i \right\|^2$, $i \in N_m$.

Очевидно, що функція $\eta(x)$ сильно опукла з параметром 1, причому $\eta_i(x) = 0$, якщо $x \in E$, $\eta_i(x) \le 0$, якщо $x \in E$.

Нехай $\eta(x) = \max\left\{ \eta(x) \,|\, 1 \le i \le m \right\}$. Функція $\eta(x)$ сильно опукла з параметром 1, недодатня на множині X, причому $\eta(x) = 0$ для всіх $x \in E$.

Відповідно до теореми 3.18 для будь-якої функції $f(x)$, визначеної на E, існує визначена на X опукла функція $\varphi(x)$, така, що $f(x) = \varphi(x)$ для всіх $x \in E$. Тоді функція $\Psi(x) = \varphi(x) + \rho\eta(x)$ сильно опукла на X, а параметр сильної опуклості не менше ρ. Крім того, $\Psi(x) = f(x)$ для всіх $x \in E$. Таким чином, $\Psi(x)$ − шукана функція.

На закінчення дослідимо питання існування диференційованого опуклого продовження на X функції $f(x)$.

Теорема 3.21. Для будь-якої функції $f : E \to R^1$ існує диференційована опукла функція $\xi : x \to R^1$, така, що $\xi(x) = f(x)$ для всіх $x \in E$.

Наведені теореми про побудову опуклих продовжень для функцій, визначених на скінчених множинах, можуть бути конкретизовані на основі специфічних властивостей цих множин.

3.5. Побудова опуклого продовження функцій на евклідових комбінаторних множинах

Теорема 3.18 дає можливість конструктивно побудувати опукле продовження для будь-якої функції, визначеної на вершинах опуклого многогранника. При цьому потрібно знати значення функції в кожній вершині. Однак число комбінаторних многогранників не поліноміальне. Тому зазначений результат з погляду розв’язання оптимізаційних задач на вершинах комбінаторних многогранників, як правило, не має широкого застосування. Викликає інтерес побудова такого опуклого продовження, при якому немає необхідності обчислювати значення функції в кожній вершині многогранника. Виявляється, що властивості комбінаторних многогранників дозволяють запропонувати конструктивні підходи побудови опуклих продовжень, що задовольняють цій вимозі.

Розглянемо питання побудови опуклого продовження для функцій, визначених на множині E_{nk}, що збігається з множиною вершин многогранника перестановок. Як і вище, покладемо, що множина E_{nk} породжується n дійсними числами $a_1 \le \ldots \le a_n$.

Структура множини E_{nk} така, що справедливо наступне твердження.

Лема 3.4. Симетричний многочлен у точках множини E_{nk} приймає постійне значення.

Позначимо

$$P_{k_1 \ldots k_n}^{(l)}(x) = x_1^{l_1} \ldots x_n^{l_n}, \tag{3.47}$$

де $l_1 + \ldots + l_n = l;\, l_i \in J_1 \cup \{0\},\, i \in J_n$.

Позначимо також $\prod(k_1, \ldots, k_n)$ множину перестановок з $\{k_1, \ldots, k_n\}$.

Покладемо $a = (a_1, \ldots, a_n)$ і обчислимо константи

$$C_{k_1 \ldots k_n}^{(l)} = \sum_{(l_1, \ldots, l_n) \in \prod(k_1, \ldots, k_n)} P_{l_1, \ldots, l_n}^{(l)}(a) \tag{3.48}$$

для кожного $a \in E_{nk}$.

Розглянемо процес побудови опуклого продовження для функції $f(x)$, що є поліномом, визначеним на множині $E_{nk} \subset R_+^n$. Не втрачаючи загальності, можна вважати, що всі коефіцієнти при добутку змінних у полінома недодатні.

Дійсно, нехай при деякому $P_{k_1, \ldots, k_n}^{(l)}(x)$ коефіцієнт $\lambda < 0$. Тоді відповідно до леми 3.4 можна скористатися співвідношенням

$$\lambda P_{k_1, \ldots, k_n}^{(l)}(x) = -\lambda \sum_{(l_1, \ldots, l_n) \in \prod(k_1, \ldots, k_n) \setminus \{k_1, \ldots, k_n\}} P_{l_1, \ldots, l_n}^{(l)}(x) + \lambda C_{k_1, \ldots, k_n}^{(l)}$$

с додатнім коефіцієнтом при $P_{l_1, \ldots, l_n}^{(l)}(x)$.

Доведемо, що для будь-якої функції $P^{(l)}_{k_1,...,k_n}(x)$ існує опукла функція $F^{(l)}_{k_1,...,k_n}(x)$, така, що

$$F^{(l)}_{k_1,...,k_n}(x) \cong P^{(l)}_{k_1,...,k_n}(x). \tag{3.49}$$

Тут і нижче, щоб відрізнити рівність функцій у просторі R^n від рівності функцій на множині E_{nk}, в останньому випадку будемо використовується знак $\approx$.

У подальших міркуваннях буде потрібна також додаткова умова

$$F^{(l)}_{k_1,...,k_n}(x) \geq 0 \tag{3.50}$$

для всіх $x \in R^n_+$.

Зауваження 3.2. При побудові опуклого продовження істотно використовувалася умова

$$E_{nk} \subset R^n_+ . \tag{3.51}$$

У той же час, оскільки множина E_{nk} є образом множини перестановок при його відображенні в R^n, завжди можна здійснити таке відображення, при якому має місце (3.51).

Побудуємо сильно опуклу функцію $\varphi^*(x)$ з параметром сильної опуклості $\Theta \geq \rho$. З огляду на те, що для точки множини $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2$, маємо $\varphi^*(x) = \varphi(x) + \rho\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)$, де $\varphi(x)$ − опукла функція, така, що $\varphi(x) = f(x)$ при $x \in E_{nk}$, а $\rho > 0$.

Запропонований конструктивний підхід побудови опуклого продовження для функцій, заданих на множині E_{nk}, допускає, що $f(x)$ − поліном. Для використання цього підходу в загальному випадку можна побудувати інтерполяційний поліном $P(x)$, що вимагає знання значень функції $f(x)$ у всіх $n!/(n-k)!$ точках множини E_{nk}. Однак для широкого класу функцій є можливість визначити $P(x)$, не обчислюючи значення $f(x)$ для всіх $x \in E_{nk}$. Наприклад, нехай

$f(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\xi(x_i, x_j)$, тоді для побудови $P(x)$ необхідно знати не більш ніж $n(n-1)/2$ значень функції (x_i, x_j).

Розглянемо побудову опуклих продовжень для функцій, заданих на множинах E_n^{n-1} і $\bar{E}_2^k$. Нехай функція $\Psi(x)$ задана на множині E_n^{n-1}. Як відомо, многогранник розміщень $\operatorname{conv} E_n^k \subset R^k$ є проекцією многогранника перестановок $\operatorname{conv} E_n \subset R^k$ на підпростір R^k. Це дозволяє запропонувати наступний спосіб побудови опуклої функції $\varphi(x)$.

Оскільки $E_n^{n-1} \subset R^{n-1}$, то $\Psi(x) = \Psi(x_1, ..., x_{n-1})$. Розглянемо множину $E_n \subset R^n$, породжену тими ж числами $a_1, a_2, ..., a_n$, що і E_n^{n-1}. На множині E_n задамо функцію $\tilde{\psi}(x) = \tilde{\psi}(x_1, ..., x_n)$, таку, що $\tilde{\Psi}(x) = \Psi(x_1, ..., x_{n-1})$ для всіх $x \in E_n$. Для функції $\tilde{\Psi}(x)$, заданої на E_n, побудуємо опукле неперервне на R_+^n продовження $\tilde{\varphi}(x)$. Для цього скористаємось, наприклад, способом, запропонованим на початку параграфа. Здійснимо обернене відображення на простір R^{n-1}. Скористаємося тим, що для всіх $x \in E_n$ виконується рівність

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Підставляючи у вираз для $\tilde{\varphi}(x)$

$$x_n = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n-1} x_i,$$

одержуємо функцію від змінних $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$. З описаного способу побудови випливає, що отримана функція є опуклою на R_+^{n-1}. Нижче описаний спосіб побудови сильно опуклого продовження для функції $\Psi(x)$, заданої на множині E_n. Шляхом побудов, аналогічних описаній вище, може бути отримане сильно опукле з довільним параметром $\rho > 0$ продовження функції $\Psi(x)$, заданої на множині R_+^{n-1}. Таким чином, шукане продовження $\varphi(x)$ побудовано.

Розглянемо множину E_2^k, породжену числами 0 і 1, позначимо її $\bar{B}_k$. Нехай на множині $\bar{B}_k$ задана функція $\Psi(x)$. Відомо, що будь-якій функції $\Psi(x)$ можна поставити у відповідність функцію $\tilde{\Psi}(x)$, співпадаючу з $\Psi(x)$ у точках $\bar{B}_k$ вигляду

$$\tilde{\Psi}(x) = \sum_{\substack{1 \le i_1 < \ldots < i_{m_p} \le k \\ 0 \le m_p \le m}} C_{i_1,\ldots,i_{m_p}} x_{i_2}, \ldots, x_{i_{mp}}, \qquad (3.52)$$

де $x \in R^k, C_{i_1,\ldots,i_{m_p}} \in R^1, m \le k.$

Побудуємо опуклу функцію $\varphi(x)$, таку, що $\varphi(x) = \tilde{\Psi}(x)$ для усіх $x \in \bar{B}_k$. Розглянемо один доданок із суми, що складається, (3.20)

$$P_{i_1,\ldots,i_{m_p}} = \alpha x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{m_p}}.$$

Позначимо

$$g^+_{i_1,\ldots,i_{m_p}}(x) = \left(\max\left\{ \sum_{j=1}^{m_p} x_{i_j} - (m_p - 1) \right\} \right)^2;$$

$$g^-_{i_1,\ldots,i_{m_p}}(x) = \left(\max\left\{ 0, 1 - x_{i_1}, 1 - x_{i_2}, \ldots, 1 - x_{i_{m_p}} \right\} \right)^2.$$

Нехай $\alpha \ge 0$. Тоді для всіх $x \in \bar{B}_k$

$$\alpha x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{m_p}} = \alpha g^+_{i_1,\ldots,i_{m_p}}(x). \qquad (3.53)$$

У правій частині співвідношення (3.53) – опукла диференційована функція. У випадку $\alpha < 0$ для всіх $x \in \bar{B}_k$ справедлива рівність

$$\alpha x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{m_p}} = -\alpha g^-_{i_1,\ldots,i_{m_p}}(x) + \alpha. \qquad (3.54)$$

У правій частині виразу (3.54) також знаходиться опукла диференційована функція. Шукана опукла диференційована функція може бути представлена у вигляді

$$\varphi(x)=\sum_{\substack{1\le i_1<i_2<\ldots<i_{m_p}\le k\\ 0\le m_p\le m,\, m\le k}} C_{i_1,\ldots,i_{m_p}}\, g_{i_1,\ldots,i_{m_p}}(x),$$

де
$$g_{i_1,\ldots,i_{m_p}}(x)=\begin{cases} g^{+}_{i_1,\ldots,i_{m_p}}(x), & \text{якщо} \quad C_{i_1,\ldots,i_{m_p}}\ge 0;\\ 1-g^{-}_{i_1,\ldots,i_{m_p}}(x), & \text{якщо} \quad C_{i_1,\ldots,i_{m_p}}<0.\end{cases}$$

Зазначимо, що для кожного $\rho>0$ може бути побудована сильно опукла з параметром ρ функція $\varphi_\rho(x)$, така, що $\varphi_\rho(x)=\Psi(x)$ для всіх $x\in B$. Дійсно, нехай $\varphi(x)$ – побудоване опукле продовження для функції $\Psi(x)$. Тоді для кожного $\rho>0$

$$\varphi_\rho(x)=\varphi(x)+\rho\sum_{i=1}^{k}(x_i^2-x_i).$$

Задана в такий спосіб функція $\varphi_\rho(x)$ і є шукане сильно опукле з параметром ρ продовження функції $\Psi(x)$.

Розглянемо тепер деякі питання трудомісткості побудови опуклого продовження для функції $\Psi(x)$, заданої на множині $\bar{B}_k$. Представимо $\tilde{\Psi}(x)$ вигляду (3.52) у такий спосіб:

$$\tilde{\Psi}(x)=\sum_{1\le i_1<\ldots<i_m\le k}\tilde{\Psi}_{i_1,\ldots,i_m}(x_{i_1},\ldots,x_{i_m})\,. \tag{3.55}$$

У такому представленні $\tilde{\Psi}(x)$ має не більш ніж C_k^m доданків вигляду $\tilde{\Psi}_{i_1\ldots i_m}(x_{i_1},\ldots,x_{i_m})$. Легко показати, що многочлен $P_{i_1,\ldots,i_m}(x_{i_1},\ldots,x_{i_m})$, що співпадає з $\tilde{\Psi}_{i_1\ldots i_m}(x_{i_1},\ldots,x_{i_m})$ у всіх точках множини $\bar{B}_k$, має не більш ніж 2^m доданків. Його коефіцієнти можуть бути обчислені при наявності не більш ніж 2^m значень функції $\Psi_{i_1,\ldots,i_m}(x_1,\ldots,x_{i_m})$ в точках множини $\bar{B}_k$, Таким чином, для одержання представлення $\tilde{\Psi}(x)$ у вигляді (3.52) необхідно обчислити значення функції $\Psi(x)$ не більш ніж в $L=2^m\cdot C_m^k$ точках множини $\bar{B}_k$, При $m<<k$ число буде значно менше числа елементів $\bar{B}_k$,

рівного 2^k. Отже, функція $\tilde{\Psi}(x)$, а значить і $\varphi(x)$, можуть бути побудовані шляхом порівняно невеликих обчислювальних витрат. Однак з ростом m число L швидко зростає і, починаючи з деякого значення $m(k)$, перевищує 2^k. Представлення функції $\Psi(x)$ у вигляді (3.55) дає можливість оцінити обчислювальні витрати на побудову многочлена вигляду (3.52) для функції $\Psi(x)$.

Таким чином, побудова опуклого неперервного продовження дозволяє звести задачу оптимізації на евклідовій комбінаторній множині E довільної функції $\Psi(x)$ до задачі оптимізації на цій множині опуклої чи сильно опуклої функції $\varphi(x)$. При цьому в ході рішення задачі виникає можливість використання властивостей опуклих і сильно опуклих функцій. Розглянемо екстремальні на E властивості функції $\varphi(x)$ на основі побудови опуклих продовжень на опуклі замкнуті множині.

3.6. Екстремальні властивості функції на евклідових комбінаторних множинах

Дослідження екстремальних властивостей функції на евклідових комбінаторних множинах почнемо з класу опуклих функцій. Розглянемо опукле неперервне продовження функції $\varphi(x)$ на опуклу замкнуту множина $X \subseteq R^k$, таке, що $E_f \subset X$.

Виділимо тепер деякі загальні екстремальні властивості опуклих функцій на множині E_f.

Лема 3.5. Нехай функція $\varphi(x)$ опукла і диференційована на опуклій замкнутій множині $X \supset E_f$. Тоді для будь-якого $x \in X$

$$\min_{y \in E_f} \varphi(y) \geq \varphi(x) - \langle \nabla\varphi(x), x \rangle + \min_{y \in E_f} \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i} y_i. \tag{3.56}$$

Лема 3.6. Для того, щоб точка $x^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_k^*) \in E_f$ була точкою мінімуму на множині E_f опуклої диференційованої на опуклій замкнутій множині $X \supset E_f$ функції $\varphi(x)$ достатньо, щоб

$$\min_{y \in E_f} \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial\varphi(x^*)}{\partial x_i} y_i - \langle \nabla\varphi(x^*), x^* \rangle = 0. \tag{3.57}$$

Лема 3.7. Нехай функція $\varphi(x)$ сильно опукла з параметром $\rho > 0$ на опуклій замкнутій множині $X \supset E_f$. Тоді

$$\min_{x \in E_f} \varphi(x) \geq \varphi(y^*) + \rho \min_{x \in E_f} \| x - y^* \|^2, \qquad (3.58)$$

де y^* визначається з (3.58).

Лема 3.8. Якщо функція $\varphi(x)$ сильно опукла з параметром $\rho > 0$ і диференційована на опуклій замкнутій множині $X \supset E_f$, та для будь-якого $x \in X$

$$\min_{y \in E_f} \varphi(y) \geq \varphi(x) - \frac{1}{4\rho} \| \nabla\varphi(x) \|^2 + \rho \min_{y \in E_f} \| y - x + \frac{1}{2\rho} \nabla\varphi(x) \|^2. \quad (3.59)$$

Отримані результати дозволяють сформулювати наступне твердження про достатню умову мінімуму на E_f сильно опуклої з параметром $\rho > 0$ диференційованої функції $\varphi(x)$.

Лема 3.9. Для того щоб $x^* = \left(\overset{*}{x}{}^1, \overset{*}{x}{}^2, ..., \overset{*}{x}{}^k \right) \in E_f$ був точкою мінімуму на множині E_f, сильно опуклої з параметром $\rho > 0$ диференційованої на опуклій замкнутій множині $X \supset E_f$ функції $\varphi(x)$, достатньо, щоб

$$\| \nabla\varphi(x^*) \|^2 = 4\rho^2 \min_{y \in E_f} \| y - x^* + \frac{1}{2\rho} \nabla\varphi(x^*) \|^2. \qquad (3.60)$$

Відзначимо, що цей період можна розглядати як універсальний для довільних дискретних множин у просторі R^k. При його застосуванні для конкретних множин E_f необхідно розв'язати задачу знаходження мінімуму в правих частинах співвідношень (3.56), (3.57), (3.58)–(3.60). Розв'язання цих задач залежить від властивостей множини E_f. Наприклад, як E_f можуть бути розглянуті множини $E_{nk}, E_n^k, \bar{E}_n^k$ та ін., а за X обрані опуклі оболонки зазначених множин (комбінаторні многогранники).

Відзначимо також, що у випадку, коли функція, що оптимізується, є опуклою але не диференційованою, то наведені вище твердження тривіально переформулюються. При цьому замість градієнта функції можна шукати субградієнт, причому для посилення оцінок доцільно в правих частинах нерівностей брати максимум по множині субдиференціалів функцій.

Запропонований підхід до дослідження екстремальних функцій проілюструємо для випадку евклідової комбінаторної множини $E_n^k, \bar{E}_n^k$. Зазначимо, що при $n = k$ виконується $E_n^k = E_{nk}$. Тому наведені нижче теореми справедливі для евклідової множини перестановок без повторень.

Для множини перестановок з повтореннями результати аналогічні.

Для відшукання мінімуму в правих частинах співвідношень (3.56), (3.57), (3.58)–(3.60) розглянемо розв'язання деяких допоміжних задач на множині E_n^k. Нехай

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{k} c_i g(x_i), \tag{3.61}$$

де $c_i \in R; i \in J_k; g : R^1 \to R^1; x = (x_1, x_2, ..., x_k) \in R^k$.

Відмітимо наступну властивість функції $\varphi(x)$. При довільному переупорядкуванні коефіцієнтів c_i вигляд функції $\varphi(x)$ не змінюється. Дійсно, оскільки $\varphi(x)$ – сепарабельна функція і всі коефіцієнти c_i відносяться до однієї і тієї ж функції $g(z)$, то вигляд $\varphi(x)$ при довільній перестановці $c_i (i \in J_k)$ не змінюється. У зв'язку з цим вважаємо далі, що функції $\varphi(x) : c_1 \geq c_2 \geq ... \geq c_k$.

Задамо послідовність попарно натуральних чисел $\{s_1, s_2, ..., s_n\}, s \in J_n, j \in J_n$, таку, що

$$g(a_{s_1}) \leq g(a_{s_2}) \leq ... \leq g(a_{s_n}). \tag{3.62}$$

Лема 3.10. Мінімум функції $\varphi(x)$ вигляду (3.58) на множині E_n^k досягається в точці $x^* = \left(x_1^*, x_2^*, ..., x_k^*\right)$,

$$x_j^* = a_1, \tag{3.63}$$

де $\{l_1, l_2, ..., l_k\}$ визначається як

$$l_j = \begin{cases} S_j, & \text{якщо} \quad c_j \geq 0; \\ S_{n-k+j}, & \text{якщо} \quad c_j < 0, j \in I_k. \end{cases} \tag{3.64}$$

Наслідок 3.4. Мінімум лінійної функції $\varphi(x)=\sum_{i=1}^{k} c_i x_i$ на множині E_n^k досягається в точці x^*, що задовольняє умові (3.63), а

$$l_j=\begin{cases} j, & \text{якщо } c_j \ge 0; \\ n-k+j, & \text{якщо } c_j<0, j\in J_k \end{cases}. \tag{3.65}$$

Розглянемо клас функцій вигляду

$$g(x)=\|x-c\|^2, \tag{3.66}$$

де $x\in R^k$, $c\in R^k$, а $\|\cdot\|$– норма евклідового простору R^k. Задача відшукання мінімуму $g(x)$ на E_n^k може бути зведена до задачі вибору в такий спосіб. Представимо $g(x)$ у вигляді

$$g(x)=\sum_{i=1}^{k}(x_i-c_i)^2=\sum_{i=1}^{k} f_i(x_i)=\sum_{i=n}^{n} f_i(x_i),$$

де $f_{k+1}(Z)\equiv f_{k+2}(Z)\equiv ...\equiv f_n(Z)\equiv 0$, а $x_{k+1},...,x_n$ приймають значення з множини $\{a_1,a_2,...,a_n\}$. Сформуємо $n\times n$-матрицю D наступного вигляду:

$$D=\left[d_{ij}\right]_{m\times n}, d_{ij}=f_i\left(a_j\right), i, j\in J_n.$$

Задача вибору полягає в тому, що з кожного рядка *i* кожного стовпця матриці *D* необхідно вибрати по одному елементу (усього *n* елементів) таким чином, щоб максимізувати функцію $\sum_{l=1}^{n} d_{ej_e}\to \max$.

Очевидно, вибравши зазначеним способом *n* елементів матриці D, тим самим укажемо *k* елементів $a_{i_1},a_{i_2},...,a_{i_k}$, що відповідають функціям $f_1, f_2,..., f_k$ і доставляють мінімум $g(x)$.

Відомо, що для розв’язання задачі вибору існують поліноміальні алгоритми, зокрема угорський метод, трудомісткість якого $0(n^3)$. Застосовуючи зазначений метод, можна знайти мінімум $g(x)=||x-c||^2$ на множині E_n^k.

Розглянемо деякі допоміжні задачі на множині $\bar{E}_n^k$. Нехай

$$g(x)=\sum_{i=1}^{k} f_i(x_i), \tag{3.67}$$

де $f_i : R^1 \to R^1, i \in J_k$.

Лема 3.11. Мінімум сепарабельної функції вигляду (3.67) на множині досягається в точці $x^* = (x_1^*, x_2^*,..., x_k^*) \in \bar{E}_n^k$, такій, що

$$x_i^* = \arg\min_{j \in I_n} f_i(a_j), \quad i \in I_k .$$

Наслідок 3.5. Мінімум лінійної функції вигляду $g(x)=\sum_{i=1}^{k} c_i x_i$ на множині $\bar{E}_n^k$ досягається в точці $x^* = (x_1^*, x_2^*,..., x_k^*)$, такій, що

$$x_i^* = \begin{cases} a_n, \text{ якщо } c_i \le 0, \\ a_1, \text{ якщо } c_i > 0, i \in I_k \end{cases} .$$

Теорема 3.22. Для того щоб точка $x^* = (x_1^*, x_2^*,..., x_k^*) \in \bar{E}_n^k$ була точкою мінімуму на множині $\bar{E}_n^k$, опуклої, диференційованої на опуклій замкнутій множині $X \supset \bar{E}_n^k$ функції $\varphi(x)$, достатньо, щоб виконувалась умова $\left\langle \nabla\varphi(x^*), x^* - y^0 \right\rangle = 0$, де y^0 задовольняє співвідношенню (3.40).

Висновки до розділу 3.

Застосування описаних властивостей евклідових комбінаторних множин та фундаментальних властивостей функцій при побудові методів та алгоритмів розв’язання багатокритеріальних задач оптимізації на комбінаторних множинах перестановок, розміщень, поліперестановок, полірозміщень та ін. дозволяє використовувати для розв’язання на ЕОМ указаних задач програмне забезпечення лінійного програмування і отримувати точні розв’язки. Отже ефективність застосування розроблених методів при розв’язанні векторних задач з лінійними та дробово-лінійними критеріями може бути підвищена за рахунок стандартного забезпечення лінійного програмування. В наступних розділах 5 та 6 монографії розглянемо застосування досліджених властивостей евклідових комбінаторних множин при побудові методів та алгоритмів розв’язання багатокритеріальних задач оптимізації на цих множинах.

РОЗДІЛ 4. МЕТОДИ І АЛГОРИТМИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ КОМБІНАТОРНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ

Дослідження моделей та методів дискретної, в тому числі комбінаторної оптимізації, становлять досить широкий напрямок розвитку математичної кібернетики, безпосередньо пов'язаний з необхідністю розв'язання різноманітних важливих практичних задач оптимального планування, управління та проектування.

Відомо, що комбінаторні оптимізаційні задачі є одними з найбільш важких з обчислювальної точки зору [10, 111, 117, 137, 141, 147]. Універсальний метод − повний перебір варіантів − застосовний практично для задач малої розмірності. Тому виникла необхідність в розробці інших методів, як точних, так і наближених, які враховували б специфіку цільової функції і обмежень задачі і були б практично застосовні до задач більшої розмірності ніж метод повного перебору.

Методи розв'язання комбінаторних задач оптимізації останнім часом розвиваються досить інтенсивно. Очевидно, що найбільш швидко поширюються методи, які краще і простіше враховують властивості і специфіку різних класів комбінаторних задач. В багатьох наукових працях розглянуто оптимізацію пріоритето-породжуючих функцій на комбінаторній множині частково упорядкованих елементів, а також функцій, які рекурентно задані на такій множині. Практично більшість задач теорії розкладів, планування, управління та проектування зводяться до задач оптимізації на різноманітних комбінаторних множинах: перестановок, розміщень, сполучень та ін.

Як відомо, опуклими оболонками комбінаторних множин є многогранники [153, 154, 156].

Дослідженням властивостей комбінаторних многогранників почали займатися досить давно. Комбінаторна теорія многогранників вивчає екстремальні властивості многогранників, розглядаючи множину граней всіх вимірностей многогранника як деякий комплекс [17, 20, 45, 164]. Початок систематичного вивчення многогранників як множин розв'язків скінченної системи лінійних нерівностей можна віднести до кінця 19-го століття, хоча окремі властивості систем лінійних нерівностей можна знайти в більш ранніх роботах Ж.Б. Фурьє, М.В. Остроградського, І. Фаркаша. Однак загальна задача вивчення геометричних властивостей многогранника як розв'язків скінченної системи лінійних нерівностей виникла, очевидно, тільки після робіт Г.Ф. Вороного. Зокрема, Г. Ф. Вороним був одержаний критерій, за допомогою якого можна визначити сумісність системи строгих нерівностей і вимірність многогранника її розв'язків. В подальшому вивчення систем лінійних нерівностей зацікавило багатьох математиків, зокрема Г. Мінковського, Г. Вейля [20] та ін. Велике значення має вивчення комбінаторних властивостей много-гранників в тісному зв'язку з задачами оптимізації, в тому числі багатокритеріальними, дуже важливими для практичних застосувань. Роль комбінаторних характеристик допустимих областей для побудови ефективних методів розв'язання задач комбінаторної оптимізації є досить суттєвою, оскільки їх використання дає можливість підвищити ефективність роботи існуючих методів та побудувати нові.

Основною ідеєю комбінаторних методів є перехід від повного перебору скінченої множини розв'язків до скороченого, направленого. Ці методи мають ряд позитивних якостей: гнучкість, універсальність, можливість застосування до різних задач комбінаторної оптимізації в будь-якій постановці. Найбільшого поширення набули методи комбінаторної оптимізації, що використовують методи гілок та меж [75, 76, 137, 141], метод послідовного аналізу варіантів [90, 93], методи побудови послідовності розв'язків [44], методи локальної оптимізації [61, 137, 141, 147], метод динамічного програмування [52], апроксимаційно-комбінаторний метод [137] та ін. Евристичні алгоритми [147], що застосовуються при розв'язанні задач комбінаторної оптимізації, хоча і досить швидко дають розв'язок, однак не гарантують його оптимальність.

Серед точних методів розв'язування задач дискретної оптимізації також широкого поширення та розвитку одержав метод відсікання [52, 137, 163], ідея якого вперше була запропонована Данцигом, а потім розвинута в в роботах Гоморі та багатьох інших авторів. Для групи методів відсікаючих площин використовується ідея регуляризації задачі. Вона полягає в зануренні початкової дискретної області допустимих розв'язків у відповідну неперервну опуклу область, тобто в тимчасовому відкиданні умов дискретності. Далі до одержаної регулярної задачі застосовуються стандартні методи оптимізації.

Слід зазначити, що ефективність методу відсікання знаходиться в прямій залежності від ефективності способу побудови відсікань. Реалізація різних підходів до побудови відсікань породила велику кількість методів цієї групи [47, 54, 75, 76, 123, 125–135,153, 154] .

В монографії поєднуються проблеми багатокритеріальності та комбінаторних властивостей розв'язків.

Багатокритеріальна задача – це задача оптимізації двох і більше критеріїв, яка має реальний економічний зміст і відіграє важливу роль в економіці, плануванні виробництва та ін. Одним з важливих застосувань такої задачі може бути задача досягнення мінімуму собівартості деякої продукції та рентабельності виробництва. Іншими прикладами можуть бути задачі про максимум рентабельності і взагалі оптимізації деяких відносних показників якості (трудомісткості, продуктивності та ін.). Такі математичні моделі відображають тенденцію постійного зниження рівня собівартості в розрахунку на одиницю продукції та підвищення якісних показників виробництва при збільшенні масштабів виробництва. Як уже було зазначено, задачі багатокритеріальної оптимізації досліджені в багатьох роботах, але без врахування комбінаторних властивостей області допустимих значень вони не зовсім адекватно описують моделі прикладних задач. Можна навести ряд прикладів, де області допустимих розв'язків таких задач мають властивості комбінаторних множин: перестановок, сполучень, розміщень, розбиттів та ін., тобто ці задачі потрібно розглядати як задачі комбінаторної оптимізації з багатьма критеріями.

Отже, дослідження та побудова математичних методів розв'язання багатокритеріальних задач на комбінаторних множинах є важливими і актуальними.

Методи дискретної, в тому числі комбінаторної, оптимізації умовно можна розділити на дві групи: точні і наближені. Умовність цього розподілу випливає з того факту, що багато точних методів можуть застосовуватися як наближені, а наближені методи за певних умов можуть використовуватися як точні або як їх складова частина. На перших етапах розвитку теорії дискретної оптимізації головна увага приділялася розробці точних методів.

Із зростанням розмірності розв'язуваних задач виникають принципові обчислювальні труднощі при знаходженні точного або наближеного розв'язку з оцінкою точності. Ці труднощі в багато разів загострюються при оперативному розв'язуванні задач, особливо великої розмірності. Традиційно вживані послідовні обчислювальні технології розв'язання задач великої розмірності, як правило, не дозволяють знайти розв'язок. По-цьому представляється природною розробка технологій розв'язання таких задач, заснованих на застосуванні паралельних обчислень. Метод гілок і меж [174] належить до основних при розв'язанні задач дискретної оптимізації. Деревовидна структура алгоритму створює хороші передумови для паралельної реалізації цього методу: обчислення по різних гілках дерева можуть проводитися незалежно різними процесорними пристроями. Чисельні експерименти показують, що хоча застосування паралельних алгоритмів в цілому дає значне збільшення продуктивності, при розпаралелюванні можуть виникати істотні складнощі, пов'язані з необхідністю балансування навантаження між процесорами. Зокрема, в роботах Сигала І.Х. [149] було показано, що ефективність паралельної реалізації виявляється чутливою до структури дерева розгалуження і вибору параметрів алгоритму. Ці параметри були встановлені експериментальним шляхом.

Розглянемо найбільш розповсюджені методи розв’язання задач комбінаторної оптимізації.

4.1. Метод гілок і меж

Перші публікації про метод гілок і меж відносяться до початку 60-х років [75, 141]. У роботі Ленд і Дойг метод гілок і меж застосований до оптимізаційних цілочислових задач. Більш повно з врахуванням інших можливостей застосування і модифікацій описано метод гілок і меж в роботі Літтла, Мурті, Суїні, Керел [188] на прикладі задачі комівояжера. Тут же вперше вживається термін “метод гілок і меж” і повідомляється про успішний числовий експеримент для задачі комівояжера з 40 містами. Ця робота, виконана в Массачустському технологічному інституті (США). Запропонований алгоритм розв’язує задачу комівояжера в такій змістовній постановці: торговець, починаючи з деякого міста, хоче відвідати кожне з інших міст один і лише один раз і повернутися в початковий пункт. У якому порядку повинен він відвідувати міста, щоб мінімізувати сумарну пройдену відстань? Під «відстанню» можна розуміти час, витрати або інший вимір за бажанням. Відстані (або витрати) між будь-якими двома містами вважаються відомими.

Отже, задача комівояжера формулюється в просторі перестановок як задача на безумовний мінімум. Маємо $(n-1)!$ (потужність простору перестановок) циклів, один або декілька з яких дають мінімальні витрати. Метод повного перебору тут явно непридатний. Метод гілок і меж дав результати, перевищуючі всі відомі методи, що і зумовило його популярність.

Метод гілок і меж є одним з основних методів, вживаних при чисельному розв’язанні задач дискретної оптимізації. Суть методу полягає в послідовному розбитті множини допустимих рішень на підмножини з подальшим відсівом підмножин, які не містять розв’язку.

Розглянемо задачу комбінаторної оптимізації вигляду

$\max\left\{ f(x) \mid x \in G \right\}$, де G − деяка комбінаторна множина.

Будемо говорити, що функція $\varphi : 2^G \to R$, є верхньою оцінкою для функції $f(x)$, якщо для будь-якої підмножини G' множини G справедливе наступне співвідношення: $\forall x \in G' \quad \varphi(G') \ge f(x)$. Правило відсіву підмножин, що не містять оптимальних розв’язків, полягає в тому, що якщо для деякого $x_0 \in G$ і $G' \subseteq G$ відомо, що $\varphi(G') < f(x_0)$, то підмножина може бути виключена з подальшого розгляду, оскільки згідно визначенню верхньої оцінки, вона не містить оптимальних розв'язків.

Для отримання оцінки розв'язується оціночна задача. На основі результатів розв'язання оціночної задачі підмножина $S \subseteq G$ виключається з подальшого розгляду, якщо для неї виконана хоча б одна з наступних властивостей:

1. S не містить допустимих розв'язків;
2. При розв'язанні оціночної задачі на підмножині S отримано допустимий розв'язок початкової задачі;
3. Підмножина S може бути відсіяна за правилом відсіву.

В процесі розв'язання підтримується список задач-кандидатів, який в початковий момент містить тільки один елемент, відповідний всій множині допустимих розв'язків, визначеній початковою задачею. На кожному кроці в методі гілок і меж проводиться розбиття (розгалуження) одного з елементів списку задач-кандидатів на декілька нових, для кожного з яких розв'язується оціночна задача. У цьому списку задача, що піддана розгалуженню, заміняється задачами, отриманими в результаті цього розгалуження.

Складність полягає у відповідному виборі функції переваги для одержання хорошого розв'язку. Іноді вибір підмножини відбувається випадковим чином: при цьому вірогідність вибору даної підмножини тим більша, чим менше значення її функції переваги (рандомізовані функції переваги).

Основна проблема в цьому методі – вибір способу визначення верхньої (або нижньої) межі. Знайти досить точне її значення не завжди легко, проте кількість даних гілок на дереві рішень в загальному випадку скорочується. Це відбувається тому, що якщо значення нижньої межі для деякої підмножини менше або рівне (у разі мінімізації більше або рівне) значенню функції одного з уже одержаних рішень, що максимізується, то відповідну гілку дерева рішень виключають з розгляду.

Трудомісткість роботи алгоритму гілок і меж в послідовному варіанті прийнято визначати числом розв'язаних оціночних задач, а загальний час роботи алгоритму вважати приблизно рівним добутку числа розв'язаних оціночних задач і середнього часу розв'язання однієї такої задачі.

Більш того, немає поліноміального алгоритму для розв'язання комбінаторних задач, вони є *NP*-повними, а такі задачі, на загальну думку, не розв'язувані за поліноміальний час. Це відповідає досвіду: розв'язання комбінаторних задач сучасними методами є дуже складним і вимагає багато часу. Великі задачі комбінаторної оптимізації практично не розв'язувані точними методами.

4.2. Послідовні алгоритми оптимізації

Метод послідовного виключення можливостей − один з найпоширеніших способів прийняття рішень. Зводиться він до наступних дій [141]:

а) множина альтернатив розбивається на підмножини шляхом введення додаткових висловлень, що характеризують кожну окрему підмножину;

б) частину цих підмножин прагнуть виключити, використовуючи умови несумісності (логічної суперечності) висловлень, що відносяться до елементів підмножини, і висловлень, що характеризують вимоги до розв'язку;

в) з множинами, що залишилися, роблять аналогічну процедуру розбиття і виключення і т. д.

На основі досвіду математичного використання принципу послідовного виключення можливостей при розв'язанні ряду оптимізаційних задач планування і проектування у 1961 р. В.С. Михалевичем разом з Н.З. Шором було запропоновано схему послідовного аналізу варіантів, яка набула подальшого розвитку при розв'язанні задач оптимального проектування шляхів, електричних та газових мереж, визначенні найкоротших шляхів на мережах та критичних шляхів у мережевих графіках, розв'язанні задач розміщення виробництва, теорії розкладів і календарного планування, а також ряду інших дискретних задач [30].

Основи схеми методу послідовного аналізу варіантів. У основі методу послідовного аналізу варіантів лежить ідея представлення процесу розв'язання у вигляді багатоступінчатої структури, що нагадує структуру складного досвіду. Кожен ступінь пов'язаний з перевіркою наявності тих або інших властивостей підмножини варіантів і веде або до безпосереднього скорочення початкової множини варіантів, або задає можливість такого скорочення в майбутньому. На основі теоретичного і практичного аналізу поставленої задачі спочатку потрібно чітко сформулювати, якими особливими властивостями повинен володіти шуканий варіант. Потім необхідно виявити по можливості більше ознак, які дозволяють встановити, що даний варіант не є шуканим. Серед цих ознак вибираються ті, що найлегше перевіряються і властиві одночасно по можливості більшому числу варіантів. Після цього побудова числової схеми розв'язання полягає у виборі раціонального порядку перевірки ознак, що дозволяє в найкоротший час зробити відсів непридатних варіантів і знайти оптимальний розв'язок.

Представлення процесу пошуку шуканого варіанту як послідовності складних дослідів нагадує формалізацію процесу прийняття рішень на основі статистичних експериментів, розроблену А. Вальдом в теорії послідовних статистичних рішень.

У багатьох задачах для організації дослідів по звуженню множини можливих варіантів до шуканої множини вдається використовувати деякі загальні властивості оптимальних варіантів, що є узагальненнями принципу Р. Беллмана в динамічному програмуванні.

Загальна схема послідовного аналізу варіантів представляється таким чином. Будується розв'язок багатоваріантної задачі як послідовний пошук шуканої множини варіантів на основі перевірки обмежень і обчислення критерію. Загальна схема такого пошуку може бути формалізована таким чином [141].

Нехай дано три множини: $W=\{\omega\}$ – множина варіантів, $\pi=\{\pi_\alpha\}$ – множина дослідів, $M=\{\alpha\}$ – множина індексів дослідів. У множині M виділена підмножина M^*, яку назвемо контрольною. Далі дана множина $I=\{\omega\}$, яку назвемо множиною результатів. Для кожного досвіду π_α визначено в I підмножину $I_\alpha=\{\omega_\alpha^1,\omega_\alpha^2,...\}$, кожен елемент якої назвемо результатом досвіду π_α. У множині I виділена підмножина $\Omega=I$, на якій визначений оператор звуження $S(\omega)$, що ставить у відповідність кожному $\omega\in\Omega$ деяку підмножину $W_\omega=S(\omega)W$ з W.

Ця відповідність природним чином розповсюджується на підмножини U з множини W:

$$S(\omega)U=U\bigcap W_\omega=U\setminus V_\omega,$$

$$\text{де}\quad V_\omega=W\setminus W_\omega^{'}.$$

На множині дослідів π визначений оператор реалізації P, що ставить у відповідність кожному $\pi_\alpha\in\Pi$ деякий елемент з $I_\alpha : P_{\pi_\alpha}=\omega_\alpha^i$, який назвемо реалізацією досвіду π_α.

Задача полягає у визначенні такої максимальної підмножини W^* з W, яка є інваріантною щодо будь-якої з контрольної множини M^*:

$$S(P_{\pi_\alpha})W^*=W^*\ \text{для кожного}\ \alpha\in M^*.$$

Вважатимемо, що множина результатів містить елемент, що має особливе значення.

4.3. Методи побудови послідовності розв'язків

Метод побудови послідовності розв'язків застосовний до задачі

$$f(x^{*}) = \min_{x \in R \subset X} f(x), \qquad (4.1)$$

якщо [141]:

а) можна знайти скінченне розширення $R^0 \supseteq R$ множини допустимих розв'язків R і функцію-міноранту $g(x)$, визначену на R^0 таку, що $g(x) \le f(x)$ для всіх $x \subset R$;

б) можна побудувати алгоритм впорядкування φ, який на k-у кроці знаходить елемент $x_k \in R^0$, що має наступну властивість

$$g(x_k) = \min\{g(x) \mid x \in R^0 \setminus \{x_1, ..., x_{k-1}\}\}. \qquad (4.2)$$

Інакше кажучи, повинен існувати ефективний метод φ побудови послідовності $\{x_i\}$ розв'язків з R^0 у порядку неспадання мінoранти $g(x)$.

Аналогічно для задачі максимізації $f(x)$ на множині R повинен існувати метод φ побудови послідовності $\{x_i\}$ розв'язків з R^0 у порядку незростання мажоранти $g(x)$, тобто такої функції, що $g(x) \ge f(x)$ для всіх $x \in R$.

Критерій оптимальності. Якщо існує таке натуральне число k, що $R_k = \{x_1, ..., x_k\} \cap R \ne \varnothing$, $f(x_k^{*}) = \min_{x \in R_k} f(x) \le g(x_k)$, то x_k^{*} – оптимальний розв'язок задачі (4.2).

Методи розв'язання конкретних задач дискретної оптимізації, побудовані, по вище зазначеній схемі, полягають в знаходженні за допомогою алгоритму φ послідовності x_i розв'язків множини R у порядку неспадання мінoранти до виконання критерію оптимальності (4.1). Ефективність таких методів залежить від вибору розширення R^0 і мінoранти $g(x)$. Якщо не існує числа k, що задовольняє критерію (4.1), то метод перетворюється на повний перебір.

Вкажемо деякі варіанти схеми.

1) Якщо $g(x) = f(x)$ для всіх $x \in R$, тобто немає необхідності апроксимувати цільову функцію, критерій (4.2) спрацьовує як тільки знайдено допустимий розв'язок $x^k \in R$.

2) Якщо $R^0 = R$, тобто множина допустимих розв'язків не розширюється, то, будуючи лише допустимі розв'язки $\{x_i\}$, завжди можна оцінити відхилення кращого з одержаних допустимих розв'язків x_k^* від оптимального x^*. Дійсно, якщо на k-у кроці умова (4.2) не виконується, то числа $g(x_k)$ і $f(x_k^*)$ є межами мінімального значення цільової функції $f(x)$ на R. При цьому з кожним кроком алгоритму межі уточнюються. Як наближений розв'язок можна взяти x_k^* − кращий допустимий розв'язок з одержаних. Оскільки $f(x_k^*) - f(x^*) \le f(x_k^*) - g(x_k)$, то максимальне відхилення наближеного розв'язку x_k^* від оптимального x^* відомо.

Модифікуючи умову б) загальної схеми методів побудови послідовності рішень, одержимо наступні схеми [141].

3. Нехай має місце припущення 1:

1) існує алгоритм, що визначає множину розв'язків

$$X = \left\{ x \mid f^- \le g(x) \le f^+, \quad x \in R^0 \right\},$$

не обов'язково впорядкованих за збільшенням міноранти. Тут f^-, f^+ − відповідно нижня і верхня межі для значень цільової функції на оптимальному розв'язку, наприклад $f^- = \min\{g(x) \mid x \in R^0\}$. Оптимальний розв'язок визначається перебором розв'язків множини X. Ефективність даного варіанту залежить від числа елементів X, а точніше, від якості меж f^-, f^+.

4. Нехай має місце припущення 2:

2) існує алгоритм, який на k-у кроці виділяє множину розв'язків

$$H_k = \{x \mid x \in R^0, \quad f_k \le g(x) \le f_{k+1}\},$$

де f_k − зростаюча послідовність дійсних чисел.

Для послідовності $\{H_i\}$ критерій оптимальності приймає наступний вигляд: якщо існує таке натуральне число k, що

$$R \cap \bigcup_{i=1}^{k} H_i \ne \varnothing,$$

$$f(x_k^*) = \min_{x_k} \left\{ f(x_k) \mid x \in R \bigcap \bigcup_{i=1}^{k} H_k \right\} \leq f_{k+1},$$

то x_k^* − оптимальний розв’язок задачі (4.1).

Особливість цього варіанту схеми полягає у тому, що на k -у кроці дописується до послідовності не один розв’язок з R^0, а ціла група розв’язків.

Розвиток і активне використання при дослідженні важливих народногосподарських проблем різних модифікацій методу послідовного аналізу варіантів сприяли виникненню й інших загальних і спеціалізованих схем розв’язування багатоваріантних задач.

4.4. Метод вектора спаду

Для задач дискретної оптимізації І.В. Сергієнко в 1964 р. запропонував загальну схему методу вектора спаду [136, 137], що надалі розроблялась як в Інституті кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, так і в інших наукових закладах країни для наближеного розв’язування багатьох типів задач дискретного програмування. Вже в 60-ті роки стало зрозуміло, що точних методів розв’язання багатоваріантних задач недостатньо для різноманітної практики, оскільки переважна більшість цих задач характеризується винятково великою складністю і для знаходження їх точного розв’язку може знадобитися надто багато невиправданих затрат різних ресурсів (машинного часу, пам’яті тощо). Понад те, нерідко знайдені точні розв’язки не становлять великої цінності, оскільки взагалі початкові дані для задач можуть бути лише наближеними, а моделі, що використовуються, у більшості випадків лише приблизно відбивають реальні ситуації. Цим і пояснюється, що в останні десятиріччя для розв’язання дискретних задач розроблено різні наближені методи, в тому числі методи локальної оптимізації [137–139, 141–142, 147].

Метод вектора спаду є сімейством алгоритмів, об’єднаних загальною схемою. Ці алгоритми призначені для розв’язання дискретних оптимізаційних задач і знаходять локальний розв’язок [137, 141].

Загальна схема методу вектора спаду. Метод вектора спаду − ітераційний метод направленого перебору, що належить до типу градієнтних методів.

Нехай X − деякий комбінаторний метричний простір з метрикою r На підмножині $R \subseteq X$ визначена функція $f(x)$. Тоді загальна задача (4.1) в таких позначеннях може бути сформульована таким чином. Визначити елемент $x \in R \subset X$, що доставляє екстремум функції $f(x)$.

У застосуванні до цієї задачі схема методу вектора спаду полягає в наступному.

1. Визначення початкового значення $x_0; x_i = x_0$.

2. Побудова множини $L_\rho(x_i) \bigcap R$, де $L_\rho(x_i)$ − окіл радіусу ρ з центром у точці x_i.

3. Розв'язання (точне або наближене) локальної задачі

$$f(x_{i+1}) = \underset{x \in L_\rho(x_i) \bigcap R}{\text{ext}} f(x).$$

4. Порівняння x_i і x_{i+1}. Якщо $x_i = x_{i+1}$, то обчислення припиняємо, приймаючи x_i за локальний розв'язок задачі; інакше переходимо до п. 2 алгоритму, замінюючи i на $i+1$ і т. д. доти, поки на деякому кроці i^* не виконається рівність $x_i^* = x_{i+1}^*$.

Ця схема є деякою сукупністю алгоритмів.

Дійсно:

1) $\rho = \rho(i)$; зокрема, можна прийняти $\rho = \text{const}$, допустима також багатозначність $\rho(i)$, що дозволяє уточнювати одержані розв'язки;

2) локальна задача (4.1) може розв'язуватися різними методами.

Відзначимо, що ця схема в застосуванні до кожної конкретної задачі або класу задач повинна враховувати її конкретні властивості або властивості класу задач, тому метод в застосуванні до вужчого класу задач вимагає спеціальних додаткових досліджень, що враховують властивості простору R, його метрики і множини, а також властивості функції $f(x)$.

Перспективним напрямком у створенні методів дискретної оптимізації є також використання в їх обчислювальних схемах певних імовірнісних механізмів. До цього напрямку належить відомий метод відпалу, для теоретичного обґрунтування якого використані ланцюги Маркова, що надало можливість довести при достатньо загальних припущеннях його збіжність до глобального розв'язку з ймовірністю, яка прямує до одиниці. Однак проведені чисельні експерименти показали, що для багатьох прикладних задач не можна досягти глобального екстремуму при прийнятному об'ємі обчислень. У зв'язку з цим були запропоновані наближені алгоритми розв'язування комбінаторних задач оптимізації, загальна обчислювальна схема яких може бути інтерпретована як певне розширення схеми методу вектора спаду [147] за рахунок включення в неї на кожній ітерації можливостей випадкового переходу не тільки до "кращих" (за значенням цільової функції), але й до "гірших" розв'язків, що властиве методу відпалу. Це дозволяє уникати "поганих" локальних оптимумів і знаходити розв'язки, близькі до глобального оптимуму. Проведені обчислювальні експерименти продемонстрували достатньо високу ефективність нових алгоритмів для задач комівояжера, квадратичних задач про призначення, ряду задач оптимального проектування та інших прикладних задачах. Слід особливо відзначити можливість створення на їх основі паралельних алгоритмів, призначених для багатопроцесорних ЕОМ, в яких досягається суттєве зменшення часу розв'язування із збільшенням кількості процесорів.

Для задач великої розмірності дискретної оптимізації з булевими змінними був запропонований та впроваджений алгоритм випадкового пошуку і знайдені умови, за яких одержання ε-оптимальних розв'язків (можливо, асимптотично точних) з імовірністю, яка прямує до одиниці при збільшенні розмірності задачі, вимагає поліноміального об'єму обчислень.

Розроблено також метод імовірнісної декомпозиції для наближеного розв'язання задач цього класу [147]. Описано та проаналізовано процедуру ймовірнісного розбиття вихідної задачі на кілька підзадач меншої розмірності, розв'язки яких потім використовуються для одержання необхідного наближеного розв'язку вхідної задачі. Встановлені умови, за яких цей розв'язок буде близьким (за значенням функції цілі) до оптимального розв'язку вихідної задачі, одержані оцінки цієї близькості. На основі ймовірнісної декомпозиції розроблено оригінальні оптимізаційні алгоритми, які показали високу ефективність при розв'язуванні реальних задач.

4.5. Один евристичний алгоритм

Особливий клас алгоритмів складають так звані евристичні алгоритми. Це пов'язане з тим, що точні методи оптимізації, потребують, як правило, дуже великого об'єму обчислень. Тому має велике практичне значення створення простих методів, що знаходять розв'язки, достатньо близькі до оптимальних. Методи, в яких не оцінюється близькість одержаних розв'язків до оптимальних, прийнято називати евристичними. Якщо ж можна оцінити відхилення розв'язків від оптимальних, то такий метод називають наближеним. Евристичний метод після його успішного теоретичного дослідження може перейти в розряд наближених.

Найчастіше в евристичних методах застосовують локальну оптимізацію.

Нехай маємо множину комбінацій $P=\{\pi_1,\pi_2,...,\pi_N\}$; ставиться задача обчислення мінімуму функції, визначеної на цій множині, і знаходження комбінацій, на яких цей мінімум досягається. Метод локальної оптимізації полягає в наступному.

Для кожної комбінації $\pi_i \in P$ визначимо множину Q_i комбінацій, які називатимемо сусідніми з π_i. В термінах теорії графів це означатиме наступне: кожній комбінації поставимо у відповідність деяку вершину графа G. Сусідні вершини π_i і π_j графа G з’єднаємо дугою (i, j) $(\pi_j \in Q_i)$. Одержаний граф називатимемо графом сусідства комбінацій. У графі G може існувати сукупність Z його вершин, в якій

$$F(\pi_i) = F(\pi_j) \text{, якщо } \pi_i, \pi_j \in Z$$

$$F(\pi_i) < F(\pi_j) \text{, якщо } \pi_i \in Z;\ \pi_j \notin Z;\ (i, j) \in U,$$

де $U-$ множина дуг графа сусідства. Таку множину Z назвемо ізольованою. Ця множина, зрозуміло, може складатися і з однієї вершини.

Перший етап локального підходу, про який йде мова, полягає в тому, щоб, вибравши довільну комбінацію, визначити для неї граф сусідства, після чого на цьому графі для всіх $\pi_j \in Q_i$ визначити значення $F(\pi_j)$.

Другий етап полягає в операції, яку прийнято називати спуском. Знаходимо $\pi_{j_o} \in Q_i$ так, щоб

$$F(\pi_{j_0}) = \min_{\pi_j \in Q_i} F(\pi_j),$$

і якщо $F(\pi_{j_0}) < F(\pi_i)$, то переходимо до комбінації π_{j_0}.

Так за скінчене число кроків дійдемо ізольованої множини. Проте навіть попадання на ізольовану множину не дає упевненості, що досягнутий не локальний екстремум (в даному випадку, мінімум), а загальний. Тому локальні “спроби” доводиться продовжувати. Одним із способів продовження пошуків може бути вибір нової допустимої комбінації і повторення операції спуску в попередньому графі сусідства. Можливі і інші способи. Визначимо, наприклад, послідовність графів сусідства $G_1, G_2, ..., G_s$ (графи 1-, 2-,... s-сусідство). Після попадання в G_1 на ізольовану множину Z вершин переходимо до графа G_2 з довільної вершини $\pi_i \in Z$. Якщо Z і в G_2 залишається ізольованим, перейдемо до G_3 і т. д. Якщо ж з вершини π_i, можливий спуск в ізольовану множину Z_1, то, перейшовши в будь-яку вершину $\pi_j \in Z_1$, повернемося до графа G_1 і повторимо процес вже з вершини G_1.

У описаному підході є багато невизначеного. Особливо неясно, як будувати графи сусідства і чим ця побудова буде кращою за випадковий вибір комбінацій. Проте досвід підказує, що одержувати сусідні комбінації іноді легше, ніж будувати випадкові послідовності. Аналіз конкретної задачі часто приводить до способу визначення сусідніх комбінацій, що забезпечує ефективний спуск до оптимального або достатньо кращого розв'язку.

Якщо допустима область R розв'язання задачі (4.1) містить декілька точок, що реалізовують екстремум (мінімум або максимум) функції $f(x)$, то можна розглядати дві задачі оптимізації: визначення локального і глобального екстремумів. Перша з цих задач простіша, але часто її розв'язок практично прийнятний. Тому в даний час методи локальної оптимізації набули широкого поширення, особливо в застосуванні до складних оптимізаційних задач, тобто до задач великої розмірності, цільові і обмежувальні функції яких не мають властивостей, що дозволяють побудувати ефективні алгоритми визначення глобального екстремуму.

Локальний алгоритм може бути охарактеризований двома параметрами: величиною околу, що вивчається на кожному кроці, і числом ознак, які запам'ятовуються про кожен елемент.

4.6. Методи відсікання для розв'язування комбінаторних задач

Серед точних методів широкого розвитку набули різні методи відсікання [54, 153, 154], ідея яких була вперше запропонована Данцигом, а потім розвинена в багатьох інших роботах, зокрема, Гоморі. Для групи методів відсікаючих площин використовується ідея регуляризації задачі. Вона полягає в зануренні початкової дискретної області допустимих розв'язків у відповідну неперервну опуклу область, тобто в тимчасовому відкиданні умов дискретності. Далі до одержаної регулярної задачі застосовуються стандартні методи оптимізації. Слід зазначити, що ефективність методу відсікання знаходиться в прямій залежності від ефективності способу побудови відсікань, а це викликає певні складнощі.

Різні підходи до побудови відсікань, і різні модифікації методу відсікань, для задач комбінаторної оптимізації розглянуто в роботах [54, 153, 154]. Зокрема, описані методи відсікання для задач евклідової комбінаторної оптимізації з лінійними цільовими функціями та додатковими лінійними обмеженнями на комбінаторних множинах E (перестановках, поліперестановках, множинах розміщень та полірозміщень і т. д.). Слід зазначити, що алгоритми побудовані на основі цих методів можуть привести до накопичення великої кількості обмежень-відсікань. Деякі з цих обмежень не відіграють після обчислень певної кількості кроків ніякої ролі в знаходженні розв'язку задачі, але займають пам'ять. А при побудові алгоритмів виникає необхідність оптимізації ресурсів, що використовуються, – часу, пам'яті тощо. При цьому важливе використання будь-яких можливостей зменшення пам'яті, що використовується програмою та часу, за який вона виконується. Тому іноді є доцільним застосування методу відкидання несуттєвих на даному етапі розв'язування задачі обмежень [85, 118] в комбінації з методом послідовного під'єднання обмежень [153], як це зроблено в роботах [53, 54, 130–135]. Перший дозволяє зменшити вимірність задачі, що розв'язується на кожному кроці, а отже і обсяг пам'яті, який використовується, а застосування другого суттєво впливає на кількість обмежень в початковій системі при розв'язуванні допоміжних задач лінійного програмування.

Метод відсікання для комбінаторної задачі з лінійною цільовою функцією на комбінаторній множині перестановок полягає в наступному:

1) здійснюємо релаксацію задачі комбінаторної оптимізації: умову дискретності (належності розв'язку комбінаторній множині) замінюємо умовою неперервності – належності опуклій оболонці комбінаторної множини;

2) задачу записуємо в вигляді:

$$F^{\tau}(x)z^{\tau}(x) = \operatorname*{extr}_{z \in D_{\tau}} \sum_{j=1}^{m} c_j z_j\,, \; z^{\tau} = \arg\operatorname*{extr}_{z \in D_{\tau}} \sum_{j=1}^{m} c_j z_j$$

при $\tau = 0$, де $z = \left(z_1^{\tau}, \ldots, z_m^{\tau}\right) \in R^{m+1}$, де $y_j^{\tau} = z_j^{\tau}$, $\forall j \in J_k$, c_j – задані дійсні числа $\forall j \in J_m$, де область $D_0 \subset R^{m+1}$ визначається системою S, в яку входять обмеження, що складаються з обмежень системи комбінаторного многогранника і додаткових лінійних обмежень;

$\tau = 1$: формуємо систему S_1 лінійних обмежень, яка містить набагато менше обмежень ніж S і визначає область D_1 таку, що $D_1 \supset D_0$, а $S_1 \subset S$, де в систему S_1 входять додаткові обмеження, та обмеження, що взяті з системи обмежень комбінаторного многогранника (перестановок, розміщень та ін.).

Зазначимо, що довільність, при виборі системи S_1, дозволяє формувати її в кожному конкретному випадку таким чином, щоб розв'язок допоміжної задачі був якомога ближче до розв'язку вихідної.

4) розв'язуємо задачу лінійного програмування на області D_{τ} при

поточному значенні індекса $\tau\,(\tau\geq 1)$ модифікованим (або двоїстим) симплекс-методом;

5) по точці $z^{\tau}=(z_1^{\tau},...,z_k^{\tau},...,z_m^{\tau})$, яку отримали, визначаємо точку $y^{\tau}=(y_1^{\tau},...,y_k^{\tau})$, де $y_j^{\tau}=z_j^{\tau}\quad\forall\, j\in J_k$, та перевіряємо виконання всіх обмежень системи комбінаторного многогранника в цій точці, тобто $y^{\tau}\in D_0$. Якщо точка задовольняє всі обмеження, то переходимо до пункту 8;

6) формуємо систему $S_{\tau+1}$, залучивши до системи обмежень S_{τ} нерівність з системи, що описує многогранник, яка в точці y^{τ} не виконується, тоді область D_{τ}, що описується системою S_{τ} замінюється на область $D_{\tau+1}$, яка задається системою обмежень $S_{\tau+1}$, $D_{\tau}\supset D_{\tau+1}$;

7) збільшуємо τ на одиницю і переходимо до пункту 4;

8) перевіряємо, чи задовольняє отриманий розв'язок умову належності комбінаторній множині E. Якщо так, то задача розв'язана, зупинка. Інакше здійснюється перехід на наступний пункт;

9) знаходимо суміжні до отриманої точки вершини многогранника, який описується системою S_{τ};

10) визначаємо напівпростір, межа якого проходить через суміжні до z^{τ} вершини, а точка z^{τ} не належить йому, та будуємо відсікання, якому знайдена точка не задовольняє, у вигляді

$$\sum_{j=1}^{s}\alpha_{m+1,j}z_j\leq b_{i+1},\quad i\in J_p,$$

11) формуємо систему $S_{\tau+1}$, яка описує область $D_{\tau+1}$: відсікання під'єднуємо до системи S_{τ}, область D_{τ} замінюємо на область $D_{\tau+1}$ $(D_{\tau}\supset D_{\tau+1})$;

12) τ збільшуємо на одиницю;

13) здійснюємо перевірку обмежень системи S_{τ}, виявляємо неактивні обмеження;

14) формуємо систему $S_{\tau+1}$: відкидаємо з S_{τ} неактивні обмеження, одержуємо область D_{τ};

15) τ збільшуємо на одиницю. Здійснюємо перехід до пункту 4.

Зауважимо, що S – скінчена множина, яка визначена обмеженнями комбінаторного многогранника, а область D_0 замкнена, отже через скінчену кількість кроків метод комбінаторного відсікання закінчує свою роботу, і таким чином знайдеться точка, яка є розв'язком вхідної задачі.

РОЗДІЛ 5. ДОСЛІДЖЕННЯ ТА РОЗВ'ЯЗАННЯ ВЕКТОРНИХ ЗАДАЧ ОПТИМІЗАЦІЇ НА КОМБІНАТОРНИХ МНОЖИНАХ

Часто при розв'язуванні прикладних задач виникає потреба формалізувати у вигляді критеріїв ряд окремих вимог, які ставляться до розв'язків, визначених на різних комбінаторних множинах. Отже, виникає необхідність в побудові та дослідженні математичних моделей та методів їх розв'язання, які об'єднують багатокритеріальність альтернатив та допустимі множини, що мають різні комбінаторні властивості розв'язків. В даному розділі сформульовані і досліджені векторні задачі дискретної оптимізації на різних комбінаторних множинах з різними властивостями функцій критеріїв. Описані множини оптимальних розв'язків, їх структурні властивості та застосування до розв'язання багатокритеріальних задач, запропоновані та обґрунтовані методи знаходження ефективних розв'язків. Існування оптимізаційних задач з багатьма критеріями на комбінаторних множинах вимагає розробки ефективних методів та алгоритмів оптимізації, які дозволяють розв'язувати як окремі задачі, так і цілі їх класи. Це робить необхідним вивчення специфіки указаних оптимізаційних задач, що в свою чергу приводить до дослідження властивостей множин їх розв'язків та областей визначення.

5.1. Загальна характеристика та формальна постановка задач векторної оптимізації на комбінаторній множині перестановок

Для математичної постановки задачі використовується поняття мультимножини $\grave{A}$, що визначається основою $S(\grave{A})$ та кратністю її елементів [1, 153, 156].

Нехай задана мультимножина $A=\{a_1,a_2,...,a_q\}$, її основа $S(\grave{A})=\{e_1,e_2,...,e_k\}$, де $e_j \in R^1$ $\forall j \in N_k$, і кратність елементів $k(e_j)=r_j$, $j \in N_k$, $r_1+r_2+...+r_k=q$.

Упорядкованою n-вибіркою з мультимножини A називається набір

$$a=\left(a_{i_1},a_{i_2},\ \dots,a_{i_n}\right), \tag{5.1}$$

де $a_{i_j} \in \grave{A}$ $\forall i_j \in N_n$, $\forall j \in N_n$, $i_s \neq i_t$, якщо $s \neq t$ $\forall s \in N_n$, $\forall t \in N_n$.

Розглянемо евклідову комбінаторну множину $E(A)$, елементами якої є n-вибірки вигляду (5.1) з мультимножини A, для довільних елементів якої $a' = (a_1', a_2', ..., a_n')$, $a'' = (a_1'', a_2'', ..., a_n'')$ виконується умова: $(a' \neq a'') \Leftrightarrow (\exists\, j \in N_n : a_j' \neq a_j'')$.

Множина $P_{nk}(A)$ перестановок з повтореннями з n дійсних чисел, серед яких k різних, називається загальною множиною перестановок, тобто множиною упорядкованих n-вибірок вигляду (5.1) із мультимножини A за умови $n = q > k$.

При $n = k = q$ маємо множину перестановок без повторень. Позначимо її $P_n(A)$. Позначимо $P(A)$ множину перестановок у випадку, коли конкретно не зазначений вигляд множини перестановок.

Розглянемо багатокритеріальну комбінаторну задачу вигляду

$$Z(\Phi, P_{nk}(A)): \quad \max\left\{\Phi(a) \mid a \in P_{nk}(A)\right\},$$

яка полягає в максимізації векторного критерію $\Phi(a)$ на евклідовій комбінаторній множині перестановок $P_{nk}(A)$, де $\Phi(a) = (\Phi_1(a), \Phi_2(a), ..., \Phi_l(a))$, $\Phi_i : E(A) \to R^1, i \in N_l$.

Існує багато різних принципів прийняття рішень за умов багатокритеріальності. У випадку, коли часткові критерії задачі рівноважливі, розглянемо деякі з найбільш традиційних принципів, зв'язані з виділенням із усієї множини $Y = \left\{y = \Phi(a) \mid a \in P_{nk}(A)\right\}$ множин, непокращуваних або оптимальних за Парето, оптимальних за Слейтером, оптимальних за Смейлом векторів. Таким чином, під розв'язанням задачі $Z(\Phi, P_{nk}(A))$ будемо розуміти знаходження елементів однієї з наступних множин: $P(\Phi, P_{nk}(A))$ − множини Парето-оптимальних (ефективних) розв'язків, $Sl(\Phi, P_{nk}(A))$ – оптимальних за Слейтером (слабко ефективних) розв'язків, $Sm(\Phi, P_{nk}(A))$ − оптимальних за Смейлом (строго ефективних) розв'язків. Задачі пошуку елементів з множин $P(\Phi, P_{nk}(A))$, $Sl(\Phi, P_{nk}(A))$ чи $Sm(\Phi, P_{nk}(A))$ позначимо відповідно $Z_P(\Phi, P_{nk}(A))$, $Z_{Sl}(\Phi, P_{nk}(A))$, $Z_{Sm}(\Phi, P_{nk}(A))$. Згідно [81, 130] для кожного $a \in P_{nk}(A)$ істинні твердження:

$$a \in Sl\big(\Phi, P_{nk}(A)\big) \Leftrightarrow \left\{y \in P_{nk}(A) \mid \Phi(y) > \Phi(a)\right\} = \varnothing, \qquad (5.2)$$

$$a \in P\big(\Phi, P_{nk}(A)\big) \Leftrightarrow \left\{y \in P_{nk}(A) \mid \Phi(y) \geq \Phi(a), \Phi(y) \neq \Phi(a)\right\} = \varnothing, \qquad (5.3)$$

$$a \in Sm\left(\Phi, P_{nk}(A)\right) \Leftrightarrow \left\{ y \in P_{nk}(A) \,|\, \Phi(y) \geq \Phi(a), y \neq a \right\} = \varnothing. \quad (5.4)$$

Очевидно, що

$$Sm\left(\Phi, P_{nk}(A)\right) \subset P\left(\Phi, P_{nk}(A)\right) \subset Sl\left(\Phi, P_{nk}(A)\right). \qquad (5.5)$$

Із скінченності допустимої області $P_{nk}(A)$ випливає, що множина $P\left(\Phi, P_{nk}(A)\right)$ не порожня і зовні стійка [113]: $\forall y \in P_{nk}(A)$ $\exists\, a \in P\left(\Phi, P_{nk}(A)\right) : \Phi(a) \geq \Phi(y)$. У випадку нескінченності множини A це питання вимагає окремого дослідження.

5.2. Властивості області допустимих розв'язків

Будемо розглядати елементи множини перестановок з повтореннями як точки арифметичного евклідового простору R^n.

Нехай вектор a вигляду (5.1) – елемент евклідової комбінаторної множини $E(A)$. Відображення $\varphi : E(A) \to E_{\varphi}(A) \subset R^n$ називається зануренням множини $E(A)$ в арифметичний евклідів простір, якщо φ задає взаємно однозначну відповідність $E_{\varphi}(A) \subset R^n$ за наступним правилом: для $a = \left(a_{i_1}, \ \ldots, a_{i_n}\right) \in E(A)$, $x = \varphi(a)$, $x = (x_1 ..., x_n) \in E_{\varphi}(A)$ маємо $x_j = a_{i_j}$ $\forall j \in N_n$.

В [45, 153, 156, 190] показано, що опуклою оболонкою множини перестановок є переставний многогранник $\Pi_{nk}(A) = \operatorname{conv} P_{nk}(A)$, множина вершин якого співпадає з множиною $P_{nk}(A)$ перестановок: $\operatorname{vert} \Pi_{nk}(A) = P_{nk}(A)$.

Не втрачаючи загальності, упорядкуємо елементи мультимножини A за неспаданням:

$$a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n, \qquad (5.6)$$

і елементи її основи − за зростанням: $e_1 < e_2 < \ldots < e_k$. Тоді опуклою оболонкою загальної множини перестановок $P_{nk}(A)$ є загальний переставний многогранник $\Pi_{nk}(A) = \operatorname{conv} P_{nk}(A)$, що описується наступною системою лінійних нерівностей:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_j \le \sum_{j=1}^{n} a_j, & (5.7) \\ \sum_{j=1}^{i} x_{\alpha_j} \ge \sum_{j=1}^{i} a_j, & (5.8) \end{cases}$$

$\alpha_j \in N_n, \alpha_j \ne \alpha_t \ \forall j \ne t, \forall j,t \in N_i, \forall i \in N_{n-1}$, а $P_{nk}(A) = \operatorname{vert}\Pi_{nk}(A)$.

Систему обмежень (5.7), (5.8) загального переставного многогранника $\Pi_{nk}(A)$ можна записати у вигляді рівносильної їй системи

$$\begin{cases} \sum_{i\in\omega_t} x_i \ge \sum_{i=1}^{|\omega_t|} a_i \quad \forall\omega_t \subset N_n; & (5.9) \\ \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{j=1}^{n} a_i, & (5.10) \end{cases}$$

де $|\omega_t|$ − кількість елементів множини індексів *ω*, визначених як $|\omega_t| = t, t \in \{1,2,...\}$.

При відображенні множини $P_{nk}(A)$ в евклідів простір R^n можна сформулювати задачу $Z(F,X)$ максимізації деякого векторного критерію $F(x)$ на множині *X*, причому кожній точці $a \in P_{nk}(A)$ буде відповідати точка $x \in X$, така, що $F(x) = \Phi(a)$.

$$Z(F,X): \max\{F(x) \mid x \in X\},$$

де $F(x) = (f_1(x), f_2(x),..., f_l(x))$, $f_i : R^n \to R^1, i \in N_l$, X – непорожня множина в R^n, що визначається таким чином $X = \operatorname{vert}\Pi_{nk}(A) = \Pi_{nk}(A) = \operatorname{conv} P_{nk}(A) = \Pi(A)$.

Задача $Z(F,X)$ може містити також додаткові лінійні обмеження, що утворюють опуклу многогранну множину $D \subset R^n$ наступного вигляду: $D = \{x \in R^n \mid Bx \le d\}$, де $d \in R^m$, $B = [b_{ij}]_{m\times n}$, $b_{ij} \in R^1$.

Таким чином, допустима множина *X* має вигляд:

$$X = \operatorname{vert}\Pi_{nk}(A) \bigcap D\,.$$

Як правило, введення додаткових обмежень ускладнює задачу, однак зменшує допустиму область, що важливо враховувати при побудові розв'язків.

5.3. Умови оптимальності і деякі властивості множини ефективних розв'язків

Позначимо множини розв'язків задачі $Z(F,X)$ в такий спосіб: $P(F,X)$ – множина Парето-оптимальних (ефективних) розв'язків, $Sl(F,X)$ – оптимальних по Слейтеру (слабко ефективних) розв'язків, $Sm(F,X)$ – оптимальних по Смейлу (строго ефективних) розв'язків. Для будь-якого $x \in X$ справедливі твердження вигляду (5.2) – (5.5), які записані стосовно до задачі $Z(F,X)$:

$$x \in Sl(F,X) \Leftrightarrow \{y \in X \mid F(y) > F(x)\} = \varnothing, \tag{5.11}$$

$$x \in P(F,X) \Leftrightarrow \{y \in X \mid F(y) \geq F(x), F(y) \neq F(x)\} = \varnothing, \tag{5.12}$$

$$x \in Sm(F,X) \Leftrightarrow \{y \in X \mid y \neq x, F(y) \geq F(x)\} = \varnothing. \tag{5.13}$$

$$Sm(F,X) \subset P(F,X) \subset Sl(F,X)\;. \tag{5.14}$$

Оскільки допустима область X обмежена, то множина $P(F,X)$ не порожня і зовні стійка.

Теорема 5.1. Елементи множини $Sm(F,X)$ – строго ефективних, $P(F,X)$ – Парето-оптимальних, $Sl(F,X)$ – слабо ефективних розв'язків багатокритеріальної комбінаторної задачі на перестановках вигляду $Z(F,X)$ знаходяться у вершинах переставного многогранника $\Pi_{nk}(A)$.

Доведення. З огляду на співвідношення (5.14) між введеними множинами ефективних розв'язків, а також відповідно до [45, 153, 156] той факт, що множина допустимих розв'язків X є підмножиною множини вершин загального переставного многогранника $\Pi_{nk}(A)$, тобто $P_{nk}(A) = \operatorname{vert}\Pi_{nk}(A)$ приходимо до справедливості ланцюжка включень: $Sm(F,X) \subset P(F,X) \subset Sl(F,X) \subset \operatorname{vert}\Pi_{\mathrm{nk}}(A)$.

Теорема доведена.

Нехай функції $f_i(x),\ i \in N_l,$ векторного критерію $F(x)$ є лінійними, тобто $f_i(x) = \langle c_i, x \rangle,\ c_i \in R^n, i \in N_l$. Важливі властивості допустимої області X і множин різних видів ефективних розв'язків, зазначені в теоремі 5.1, а також лінійність функцій векторного критерію дозволяють звести розв'язання задачі $Z(F, X)$ до розв'язання задачі $Z(F, G)$ на неперервній допустимій множині $G = \Pi_{nk}(A) \bigcap D$.

Нехай $C \in R^{n \times l}$ – матриця, c_i – її вектор рядок, $i \in N_l$.

Многогранник $\Pi_{nk}(A)$ представимо у вигляді $\Pi_{nk}(A) = \left\{ x \in R^n \mid \langle \pi_i, x \rangle \le \gamma_i, i \in N_p \right\}$, зводячи всі нерівності до одного вигляду ($\le$), і будемо позначати Π. Аналіз задачі $Z(F, X)$ будемо проводити з урахуванням властивостей конуса $K = \left\{ x \in R^n \middle| Cx \ge 0 \right\}$ перспективних напрямків [81, 142, 144] векторної задачі $Z(F, X)$ і опуклих замкнутих конусів $0^+ \Pi(y) = \left\{ x \in R^n \mid \langle \pi_i, x \rangle \le 0, i \in N(y) \right\}$, де $N(y) = \left\{ i \in N_q \mid \langle \pi_i, y \rangle = \gamma_i \right\}$, що можуть бути побудовані для всіх точок $y \in \operatorname{vert} \Pi$. Очевидно, що $N(y) \ne \varnothing$, $X \subseteq y + 0^+ \Pi(y)$. Позначимо $K_0 = \left\{ x \in R^n \middle| Cx = 0 \right\}$ – ядро лінійного відображення $C : R^n \to R^l$, $\operatorname{int} K = \left\{ x \in R^n \middle| Cx > 0 \right\}$ – внутрішність конуса K. З формул (5.11) – (5.13) випливає, що $\forall x \in X$ справедливі твердження, що встановлюють зв'язок між множинами $Sm(F, X)$, $P(F, X)$, $Sl(F, X)$ розв'язків задачі $Z(F, X)$ та конусом K перспективних напрямків чи його складовими:

$$x \in Sl(C, X) \Leftrightarrow (x + \operatorname{int} K) \bigcap X = \varnothing, \tag{5.15}$$

$$x \in P(C, X) \Leftrightarrow x + (K \setminus K_0) \bigcap X = \varnothing, \tag{5.16}$$

$$x \in Sm(C, X) \Leftrightarrow (x + K) \bigcap X \setminus \{x\} = \varnothing. \tag{5.17}$$

Твердження 5.1. Якщо ранг $r(C)$ матриці критеріїв C дорівнює *n*, то $P(C, X) = Sm(C, X)$.

Твердження 5.2. Якщо $\operatorname{int} K = \varnothing$, то $Sl(C, X) = X$.

Твердження 5.3. Якщо $\left(K \setminus K_0 \setminus \operatorname{int} K\right) = \varnothing$, то $Sl(C,X) = P(C,X)$.

Твердження 5.4. Якщо $r(C) = 1$, то $\left(K \setminus K_0 \setminus \operatorname{int} K\right) = \varnothing$ і $Sl(C,X) = P(C,X)$.

Справедливі наступні теореми.

Теорема 5.2. $P(F,G) \bigcap \operatorname{vert} \varPi \subset P(F,X)$, $Sl(F,G) \bigcap \operatorname{vert} \varPi \subset Sl(F,X)$, $Sm(F,G) \bigcap \operatorname{vert} \varPi \subset Sm(F,X)$.

Доведення. Оскільки $\operatorname{vert} \varPi \bigcap D \subset G$, то $P(F,G) \bigcap \operatorname{vert} \varPi \bigcap D \subset P(F,G \bigcap \operatorname{vert} \varPi \bigcap D) = P(F,X)$.

Співвідношення $Sl(F,X) = Sl(F, \operatorname{vert} \Pi \bigcap D \supset Sl(F,G) \bigcap \operatorname{vert} \varPi \bigcap D$, $Sm(F,X) = Sm(F, D \bigcap \operatorname{vert} \varPi) \supset Sm(F,G) \bigcap \operatorname{vert} \varPi$ доводяться аналогічно.

Теорема 5.3. Якщо допустима множина X задачі $Z\left(F,X\right)$ не містить обмежень, що описують опуклу многогранну множину D, або $\Pi \subseteq D$, тобто $X = \operatorname{vert} \Pi$, то $\forall x \in R^n$ справедливі твердження:

$$x \in Sl(F,X) \Leftrightarrow x \in Sl(F,\Pi) \bigcap \operatorname{vert} \Pi,$$

$$x \in P(F,X) \Leftrightarrow x \in P(F,\Pi) \bigcap \operatorname{vert} \Pi,$$

$$x \in Sm(F,X) \Leftrightarrow x \in Sm(F,\Pi) \bigcap \operatorname{vert} \Pi.$$

Доведення. З теореми 5.2, з урахуванням умов теореми 5.3, випливає, що $\forall\, x \in R^n$ вірні висловлення:

$$x \in Sl(F,\Pi) \bigcap \operatorname{vert} \Pi \Rightarrow x \in Sl(F,X),$$

$$x \in P(F,\Pi) \bigcap \operatorname{vert} \Pi \Rightarrow x \in P(F,X),$$

$$x \in Sm(F,\Pi) \bigcap \operatorname{vert} \Pi \Rightarrow x \in Sm(F,X).$$

Доведемо зворотні імплікації.

Нехай $x \in Sl(F,X)$, звідки відповідно до теореми 5.1 випливає, що $x \in \operatorname{vert} \Pi$. Припустимо, від супротивного, що $x \notin Sl(F,\Pi)$. З огляду на лінійність функцій $f_i(x), i \in N_l$, векторного критерію $F(x)$, за теоремою 5.1 із [81] виконується умова $\operatorname{int} K \bigcap 0^+ \Pi(x) \neq \varnothing$, тобто в конусі $(x + \operatorname{int} K)$ лежать деякі точки границі множини , отже існує точка $x^1 \in \operatorname{vert} \Pi$, що належить цьому конусу. Останнє в силу формули (5.15) означає $x \notin Sl(F,X)$, що приводить до протиріччя з умовою теореми. Інші твердження даної теореми доводяться аналогічно.

Доведення завершено.

Наслідок 5.1. За умов теореми 5.3 справедливі рівності
$P(F,\Pi)\bigcap \operatorname{vert}\Pi = P(F,X)$, $Sl(F,\Pi)\bigcap \operatorname{vert}\Pi = Sl(F,X)$,
$Sm(F,\Pi)\bigcap \operatorname{vert}\Pi = Sm(F,X)$.

Якщо в задачі $Z\left(F,X\right)$ допустима область $X = \operatorname{vert}\Pi_{nk}(A)$, то для будь-якої точки $x \in \operatorname{vert}\Pi_{nk}(\grave{A})$ справедливі необхідні і достатні умови оптимальності всіх зазначених вище видів ефективних розв'язків, отримані в роботі [81].

Якщо допустима область X задачі $Z\left(F,X\right)$ містить додаткові обмеження, що описують опуклий многогранник D, тобто $X = \operatorname{vert}\Pi\bigcap D$ і $\Pi\bigcap D \neq \Pi$, то справедливі лише достатні умови оптимальності розв'язків.

Теорема 5.4. $\forall x \in \operatorname{vert}\Pi : x \in P(F,\Pi)\bigcap D \Rightarrow x \in P(F,X)$,
$x \in Sl(F,\Pi)\bigcap D \Rightarrow x \in Sl(F,X)$, $x \in Sm(F,\Pi)\bigcap D \Rightarrow x \in Sm(F,X)$.

Доведення. Оскільки $G = \Pi\bigcap D$, то справедливі імплікації
$\forall x \in \operatorname{vert}\Pi : x \in P(F,\Pi)\bigcap D \Rightarrow x \in P(F,\Pi\bigcap D) = P(F,G) \Rightarrow x \in P(F,X)$,
$x \in Sl(F,\Pi)\bigcap D \Rightarrow x \in Sl(F,X)$, $x \in Sm(F,\Pi)\bigcap D \Rightarrow x \in Sm(F,X)$.

Таким чином, теореми 5.1 – 5.4 встановлюють взаємозв'язок між задачею $Z(F,X)$ і задачею $Z(F,G)$, визначеної на неперервні допустимій множині. Це дає можливість застосовувати класичні методи неперервної оптимізації до розв'язання векторних комбінаторних задач на перестановках і на цій основі розвивати нові оригінальні методи розв'язку, використовуючи властивості комбінаторних множин і їхніх опуклих оболонок.

При встановленні різних видів ефективності розв'язків слід враховувати, що якщо виконуються необхідні умови оптимальності розглянутого розв'язку, то гарантувати його ефективність не можна, однак, якщо ці умови не виконуються, то розв'язок не ефективний. Якщо використовуються достатні умови, то розв'язок, що задовольняє їм, ефективний, в іншому випадку питання про ефективність розв'язку залишається відкритим. Якщо ж застосовуються необхідні і достатні умови, то питання вирішується однозначно: розв'язок ефективний тоді і тільки тоді, коли він задовольняє цим умовам.

Якщо задача $Z(F,X)$ не містить лінійних обмежень, що утворюють опуклу многогранну множину $D \subset R^n$, або $\Pi \subseteq D$, тобто $X = \operatorname{vert}\Pi$, то з урахуванням необхідних і достатніх умов оптимальності (теорема 5.3) процес її розв'язання зводиться до пошуку ефективних розв'язків задачі $Z(F,G)$ на неперервній допустимій множині $G=\Pi$ з наступним вибором з них лише тих, які є вершинами переставного многогранника Π.

Аналізуючи теореми 5.2 і 5.4, приходимо до співвідношень, що існують між задачами $Z(F,X)$ і $Z(F,G)$: якщо $x\in R(F,G)\bigcap \operatorname{vert}\Pi$, то $x\in R(F,X)$; якщо $x\notin R(F,G)\bigcap \operatorname{vert}\Pi$, то із цього не випливає, що $x\notin R(F,X)$, де $R(F,X)$ означає множину $P(F,X), Sm(F,X)$ або $Sl(F,X)$.

Продовжуючи дослідження і розвиваючи результати робіт [81, 142, 143, 53, 153], запропоновано підхід до розв'язання задачі $Z\left(F,X\right)$, оснований на лінійній згортці (агрегації) часткових критеріїв задачі і подальшому зведенні пошуку розв'язку початкової задачі до розв'язку серії скалярних (однокритериальних) задач, перевірки оптимальності отриманих розв'язків. Методи розв'язання однокритеріальних задач основані на ідеях декомпозиції, відтинаючих площин Келлі, релаксації. Далі розглядається метод, при реалізації якого враховується той факт, що число обмежень досить велике. Тоді доцільним є використання процедури релаксації, тобто тимчасового відкидання деяких обмежень і розв'язання задачі на більш широкій області, тобто за обмеженнями, що залишилися.

Для побудови алгоритму, насамперед, на початковому етапі необхідно визначити початкову точку. Розглянемо однокритеріальну задачу без додаткових обмежень, тобто без обмежень, що описують многогранник *D*.

Твердження 5.5. Якщо для елементів мультимножини A і коефіцієнтів цільової функції задачі

$\operatorname{extr}\left\{ f\left(x\right)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \mid x\in \operatorname{vert}\Pi_{nk}(A)\right\}$ виконуються відповідно умови:

$$a_1 \ge a_2 \ge \ldots \ge a_n \text{ і } c_1 \ge c_2 \ge \ldots \ge c_n, \tag{5.18}$$

то максимум функції $f\left(x\right)$ на допустимій множині перестановок досягається в точці $x^*=\left(x_1^*,\ldots,x_n^*\right)\in \operatorname{vert}\Pi_{nk}(A)$, що задається наступним чином:

$$x_i^* = a_i \ \forall i\in N_n, \tag{5.19}$$

а мінімум відповідно в точці $y=\left(y_1,y_2,\ldots,y_n\right)$, де:

$$y_{i+1} = a_{n-i} \ \forall i \in N_{n-1} \bigcup \{0\}.$$

Слід зазначити, що згідно [153, 156], число q лінійних нерівностей, що входять у систему (5.7), (5.8), яка описує переставний многогранник $\Pi_{nk}(A)$, дорівнює 2^n. Сукупність нерівностей системи (5.7), (5.8), що мають однакове значення i верхньої межі суми, будемо називати i-групою нерівностей цієї системи. Зокрема, у кожну групу i входить C_n^i нерівностей. Звідси загальне число нерівностей дорівнює $\sum_{i=0}^{n} C_n^i = 2^n$. Оскільки з n координат a_j, $j \in N_n$, тільки k різні, то із системи нерівностей (5.7), (5.8) можна виключити деякі нерівності. З огляду на виконання умови повторення деяких елементів мультимножини, для кожного $j \in N_{m-1}, m \le n,$ має місце умова $a_j = a_{j+1}$. У цьому випадку при виконанні нерівностей першої групи в системі (5.7), (5.8) будуть також справедливі нерівності 2, 3, …, i_n груп. Дійсно, оскільки $x_j \ge a_1$, $j \in N_n$, то для кожного $i \in N_m$ виконується умова $\sum_{j=1}^{i} x_{\alpha_j} \ge i a_1$. Отже, із системи (5.7), (5.8) можна виключити нерівності груп 2, 3,…,m і загальне число нерівностей буде дорівнює $N = 1 + n + \sum_{j=m+1}^{n} C_n^j$. Якщо набір значень мультимножини A має властивість $a_j = a_{j+1} \ \forall j \in N_{n-1} \setminus N_{n-m}$, тоді в системі (5.7), (5.8) досить залишити тільки нерівності груп 1,2, …, $n-i-1, n-1$...

Важливо правильно організувати на першому етапі розв'язання задачі вибір активних обмежень - нерівностей. Для розв'язання задачі $Z(F,X)$ з урахуванням (5.7), (5.8) необхідно взяти на початковому етапі лише частину обмежень, що визначають область X. Оскільки одержання оптимального розв'язку задачі $Z(F,X)$ є більш важливим, ніж побудова всієї множини розв'язків, отже досить включити тільки ті обмеження множини X, що визначають область X' і дають оптимальний розв'язок цієї задачі. Але при цьому варто врахувати, що точка, яка отримана при розв'язанні задачі з обмеженнями області X', не завжди може бути перестановкою.

Введемо наступні позначення. Допустиму область задачі $Z(F,G)$

запишемо в вигляді $G=\left\{x\in R^n \mid Hx\le g\right\}$, $g=\left(g_1,g_2,...,g_q\right)$, $H\in R^{q\times n}$, $H-$ матриця, яка використовується для матрично-векторної форми запису обмежень вигляду (5.7), (5.8) і лінійних нерівностей, що описують многогранник *D*, де всі обмеження зведені до одного ($\le$) вигляду нерівностей. Позначимо N_q множину, елементи якої визначають номера обмежень системи (5.7), (5.8) і тих обмежень, що описують опуклу многогранну множину *D*: $N_q=\left\{1,2,...,2^n+m\right\}$.

Визначимо множини $G_i=\left\{x\in R^n \middle| \left\langle h_i,x\right\rangle\le g_i\right\}$, $i\in N_q$; для довільного $x^s\in R^n$ визначимо множини $N^a\left(x^s\right)=\left\{i\in N_q \middle| \left\langle h_i,x^s\right\rangle=g_i\right\}$ і $N^n\left(x^s\right)=\left\{j\in N_q \middle| \left\langle h_j,x^s\right\rangle<g_j\right\}$ – відповідно активних і неактивних обмежень в точці x^s; $h_i\in R^n, g_i\in R,\ i\in N_q$ – відповідно *i*-ий вектор-рядок матриці *H* та *i*-а компонента вектора g .

Введемо до розгляду задачу $Z\left(F,G^s\right):\max\left\{F\left(x\right)\mid x\in G^s\right\}$, яка розв'язується на *s*-му кроці алгоритму. В ній допустима множина $G^s=\left\{x\in R^n \middle| \left\langle h_i,x\right\rangle\le g_i, i\in Q_s\subset N_q\right\}$, де Q_s – множина номерів обмежень, що описують допустиму область задачі $Z\left(F,G^s\right)$, $Q_s=N_q\setminus R_s$, R_s – множина номерів обмежень, які не були включені в цю задачу на *s*-му кроці.

Означення 5.1. Величина $r_i\left(x\right)=\left\langle h_i,x\right\rangle-g_i$, $i\in N_q$, називається відхиленням точки $x\in R^n$ від границі множини G_i, а величина $r\left(x\right)=\max\left\{r_i\left(x\right)\middle|\ i\in N_q\right\}-$ відхиленням точки $x\in R^n$ від границі множини *G*.

Очевидно, що для $i\in N_p$:

$$r_i\left(x\right)=\sum_{j=1}^{i}x_{\alpha_j}-\sum_{j=1}^{i}a_j, \tag{5.20}$$

а для $i\in N_q\setminus N_p$, маємо:

$$r_i(x) = \langle b_i, x\rangle - d_i\,, \tag{5.21}$$

де b_i – i-ий вектор-рядок матриці B, $d_i \in R$.

Теорема 5.5. Ефективний (Парето-оптимальний, слабо, строго ефективний) розв'язок x_0 задачі $Z\left(F, G^S\right)$ є ефективним в тому ж розумінні розв'язком задачі $Z(F, G)$ тоді і тільки тоді, коли виконується умова $r(x) \le 0$.

Доведення. Необхідність цього твердження очевидна, оскільки допустимий розв'язок x_0 задачі $Z\left(F, G^S\right)$ є допустимим розв'язком задачі $Z(F, G)$ тоді і тільки тоді, коли виконується умова $r(x) \le 0$. Достатність твердження випливає з побудови задачі $Z(F, G)$ і означення $r(x)$.

Основна ідея методу розв'язання полягає в наступному.

1) Зводимо багатокритеріальну задачу $Z(F, X)$ до однокритеріальної задачі $Z(f, X)$ методом лінійної згортки.

2) Вибираємо обмеження початкової системи, що визначають область $G^S \subset G$, розв'язуємо задачу $Z\left(f, G^S\right)$ за допомогою симплекс-методу і знаходимо оптимальний розв'язок x^S.

3) Якщо отриманий оптимальний розв'язок є перестановкою, тобто вершиною переставного многогранника $\Pi_{nk}(A)$, то перевіряємо обмеження, що не були враховані. Якщо додаткові обмеження не виконуються, то будуємо відсікання, що проходить через суміжні вершини та відтинає вершину, яка не є допустимою. Додаємо це обмеження до обмежень релаксованої задачі.

4) Розв'язуємо задачу з доданими обмеженнями симплексом-методом. Якщо одержали оптимальний розв'язок, що є елементом множини перестановок, тобто вершиною переставного многогранника, то перевіряємо обмеження, які не були включені. Якщо знайдений розв'язок не задовольняє обмеженням, тим, що залишилися, то варто додати найбільш порушене обмеження.

5) Будуємо суміжні вершини (перестановки) переставного многогранника, перевіряємо, чи задовольняють вони новим обмеженням. Якщо задовольняють обмеженням, що залишилися не включеними, то знаходимо значення цільової функції в цій точці $f\left(x^l\right)$. Додаємо до

наших обмежень обмеження $f(x) \geq f(x^l)$.

6) Якщо $f(x^R)$ зменшується, то відкидаємо неактивні (несуттєві) обмеження в точці x^R. Та обставина, що жодне з обмежень не відкидалося, якщо $f(x^R) = \overline{f}$, гарантує, що порівнюється тільки скінчене число задач Z^l.

Загальна ідея запропонованого методу полягає в послідовному включенні обмежень задачі, що описують область допустимих розв'язків. Реалізація методу у вигляді алгоритму описана нижче.

Для перевірки належності точки множині перестановок $P_{nk}(A)$, доцільно скористатися теоремами 5.5 і 5.6.

Теорема 5.6 [153]. Якщо $x = (x_{1,} x_2 ..., x_n)$ – точка, координати якої упорядковані у такий спосіб $x_{\alpha_j} \leq x_{\alpha_{j+1}}$ $\forall j \in N_{n-1}$ і виконується обмеження:

$$x_{\alpha_1} + x_{\alpha_2} + ... + x_{\alpha_i} \geq a_1 + a_2 + ... + a_i, \tag{5.22}$$

що належать групі нерівностей *i*-ої системи (5.7)–(5.8), то виконуються в цій же точці і всі інші нерівності *i*-ої групи цієї системи.

Вище сформульована теорема дають можливість при реалізації алгоритму для розв'язання задачі $Z(F, X)$ мінімізувати витрати часу на перевірку належності знайденої точки комбінаторним обмеженням і зменшити кількість обмежень у вихідній системі.

Запропонований алгоритм складається з двох частин і дає можливість розв'язати задачу $Z(F, X)$ без врахування всіх обмежень, що визначає допустиму область розв'язків у частині 1, а також тих обмежень, що визначають допустиму область у частині 2.

Перейдемо до викладу алгоритму розв'язання.

5.4. Алгоритм розв'язання векторної задачі на комбінаторній множині перестановок

Початковий крок

Покладемо $s = 0$. Зведемо багатокритеріальну комбінаторну задачу $Z(F,G)$ до однокритеріальної за допомогою лінійної згортки: задаємо вагові додатні коефіцієнти $\lambda_j, j \in N_l$, які визначають ступінь важливості кожного критерію, і максимізуємо лінійну комбінацію цільових функцій, тобто розв'язуємо задачу:

$$Z\left(f,G^s\right)=\left\{\max f(x)=\sum_{i=1}^{l}\lambda_i\left\langle c_i,x\right\rangle \middle|\ \lambda_i\ge 0,\ i\in N_l,\ \sum_{i=1}^{l}\lambda_i=1,\ x\in G^s\right\}.$$

У випадку, якщо який-небудь з коефіцієнтів $\lambda_i=1$ а всі інші, $\lambda_j=0,\ i\ne j,\ i,j\in N_l$, то розглядається однокритеріальна задача з i-ю цільовою функцією $f_i(x)$. При першому виконанні цього кроку покладаємо $G^s=R^n$ і $\overline{f}=\infty$.

Основна частина

1. Вибираємо початкову точку x^s довільним чином, як елемент загальної множини перестановок, або згідно твердженню 5.5, упорядкувавши коефіцієнти $\lambda_i\cdot c_i, i\in N_l$, цільової функції, $f(x)=\sum_{i=1}^{l}\lambda_i\left\langle c_i,x\right\rangle$, обчислюємо значення $\overline{f}=f\left(x^s\right)$.

2. Опишемо обмеження, що відповідають точці x^s і визначають вершину загального переставного многогранника $\Pi_{nk}(A)$ де $x^s\in\Pi_{nk}^s(A)$, $\Pi_{nk}^s(A)\supset\Pi_{nk}(A)$. Вважаємо $Q_s=N_p$.

3. Знаходимо відхилення $r_i\left(x^s\right)$ $\forall i\in R_s=N_q\setminus Q_s$ за формулами (5.20), (5.21).

4. Вибираємо, $r\left(x^s\right)=\max\left\{r_i\left(x^s\right)\mid i\in R_s\right\}$ і номер, $i\in R_s$, при якому це відхилення досягається.

5. Перевіряємо нерівності $r\left(x^s\right)\le 0$. Якщо $r\left(x^s\right)>0$, то переходимо до наступного пункту алгоритму, інакше – знаходимо ефективний розв'язок задачі $Z(F,X)$. Для знаходження наступного ефективного розв'язку переходимо на початковий крок алгоритму, задавши інші вагові коефіцієнти $\lambda_j,\ \lambda_j\ge 0,\ j\in N_l,\ \sum_{j=1}^{l}\lambda_i=1$.

6. Додаємо одержане обмеження з номером $i\in R_s$ до обмежень задачі $Z\left(f,G^s\right)$, тобто формуємо допустиму множину підзадачі

$Z\left(f, G^s\right)$ таким чином:

$$G^{s+1} = G^s \cap \left\{ x \in R^n \,\middle|\, \left\langle h_i, x \right\rangle \le g_i \right\}. \tag{5.23}$$

7. Якщо

$$f\left(x^s\right) < \overline{f},$$

то визначаємо множину $N^n\left(x^s\right) \subset Q_s$ і замінюємо множину Q_s на $Q_s = Q_s \setminus N^n\left(x^s\right)$, вважаємо $\overline{f} = f\left(x^s\right), s = s + 1$.

8. Розв'язуємо задачу

$$Z\left(f, G^s\right): \ \max\left\{ f\left(x\right) = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i \left\langle c_i, x \right\rangle \,\middle|\, x \in G^s \right\}$$

двоїстим симплекс-методом. Якщо ця задача не має розв'язку, то нерозв'язувана і задача $Z\left(F, G\right)$. Інакше одержуємо оптимальний розв'язок x^s цієї задачі. Якщо він не є елементом загальної множини перестановок $P_{nk}\left(A\right)$, то переходимо до п. 9. Інакше, вважаючи $Q_s = N_p$, переходимо до п. 3 алгоритму.

9. Знаходимо суміжні з точкою x^s вершини переставного многогранника і будуємо відсікання, що проходить через ці вершини, вигляду

$$\left\langle h_i, x \right\rangle \le g_i, \tag{5.24}$$

якому не задовольняє одержана точка x^s. Формуємо систему обмежень, що описує множину G^s, за формулою (5.23), розв'язуємо сформовану нову задачу і переходимо до п. 9.

Зауваження 5.1. (до п. 7 алгоритму) Якщо x^s є елементом загальної множини перестановок $P_{nk}(A)$, то до множини $N^n(x^s)$ неактивних обмежень, що виключаються з множини Q_s, варто віднести всі обмеження многогранника $\Pi_{nk}(A)$, крім тих, котрі визначають точку x^s.

Зауваження 5.2. (до п. 9 алгоритму) Розглянемо більш детально визначення суміжної вершини і побудови відсікання.

Відповідно до теорії лінійного програмування [32, 52], на підставі симплекс-таблиці, що визначає деяку вершину x^s многогранника розв'язків, для одержання суміжної з нею вершини необхідно взяти небазисну змінну x_j в задачі лінійного програмування, вектор P_j якої має хоча б одну додатну компоненту, вибрати t-й рядок симплекс-таблиці з умови:

$$\frac{b_t}{\alpha_{tj}} = \min_{i:\alpha_{ij}>0} \frac{b_i}{\alpha_{ij}} = \Theta_j , \tag{5.25}$$

де α_{ij} – коефіцієнти при невідомих x_j у рядку i, b_i – вільний член у відповідних обмеженнях задачі лінійного програмування $Z(F,G)$. Далі потрібно ввести в базис P_j замість P_t, одержавши симплекс-таблицю для деякої суміжної з x^0 вершини.

Побудова відсікань здійснюється згідно [54, 153]. Позначимо J – сукупність номерів небазисних змінних, для яких можна визначити співвідношення (5.25), а I – множина номерів базисних змінних. На основі останньої симплекс-таблиці задачі лінійного програмування, запишемо обмеження, що визначається базисною змінною з номером i:

$$x_i + \alpha_{i,(\beta+1)} x_{j_1} + \ldots + \alpha_{i,(\beta+\gamma)} x_{j_\gamma} = b_i ,$$

де $i \in I, \beta = |I|, \gamma = |J|, I \cup J = J_n, \beta + \gamma = n,\ j_\tau \in J\ \forall \tau \in J_\gamma$.

Нехай $x^* = \left(x_1^*, \ldots, \tilde{o}_n^*\right)$ – оптимальний розв'язок задачі лінійного програмування $Z(F,G)$, тобто розв'язок, що відповідає останній симплекс-таблиці. Як відомо з [52, 54, 153]: якщо $j_\tau \left(j_\tau \in J, \forall \tau \in J_\gamma, \gamma = |J| \right)$ – номера небазисних змінних у розв'язку задачі лінійного програмування $Z(F,G)$, а величина Θ_{j}, обчислюється за формулою (5.25), то всі суміжні з x^* вершини допустимої області задовольняють нерівність:

$$\frac{z_{j_1}}{\Theta_{j_1}} + \frac{z_{j_2}}{\Theta_{j_2}} + \ldots + \frac{z_{j_\gamma}}{\Theta_{j_\gamma}} \geq 1 , \tag{5.26}$$

як рівність, а точка x^* нерівності (5.26) не задовольняє.

Відповідно до цієї теореми, будуємо відсікання (5.24) у вигляді (5.26).

Відмітимо, що процес побудови відсікання завершується одержанням точки, що належить множині X, або здійснюється перехід на грань многогранника допустимої області задачі лінійного програмування з продовженням відсікання на цій грані. Якщо при відсіканні точки x^* за допомогою деякої нерівності-відсікання (5.24) у знайдених суміжних з нею вершинах ця нерівність виконується як рівність, то розв'язок, надалі, шукається на грані області, а нерівність-відсікання перетворюється в рівність, приєднується до системи обмежень вхідної задачі, і процес розв'язання задачі продовжується. Отже, при відсіканні кількість вершин області зменшується на одну і може залишитися лише одна, яка буде розв'язком.

Теорема 5.7. Робота алгоритму закінчується після розв'язання скінченного числа підзадач $Z\left(f, G^s\right)$ і знаходить множину ефективних розв'язків задачі $Z(F, X)$ або приводить до побудови такої множини обмежень, при якій поточна підзадача $Z\left(f, G^s\right)$ буде нерозв'язуваною.

Доведення. Оскільки X – скінченна множина, то вона має скінченне число підмножин. При зменшенні $f(x) = \max \sum_{i=1}^{l} \lambda_i \langle c_i, x \rangle$ від одного кроку до іншого жодна підмножина не може повторитися. Оскільки жодне обмеження не відкидається, якщо $f(x^s) = \bar{f}$, і в крайньому випадку одне або два обмеження додаються, то значення $f(x^s)$ можуть залишатися постійними лише протягом скінченного числа ітерацій. Отже, за скінченне число кроків процедура закінчується.

Зазначимо, що метод розв'язання задачі на перестановках не дає відповіді на питання, який розв'язок знайдено: ефективний чи строго ефективний. Це можна перевірити, користуючись співвідношеннями (5.11), (5.12) чи (5.13).

Математичні моделі деяких прикладних задач наведені в дев'ятому розділі монографії.

5.5. Задачі векторної оптимізації з дробово-лінійними функціями критеріїв на комбінаторній множині розміщень

Будь-яка складна прикладна задача описується моделями з багатьма критеріями [23–28, 31, 34, 37, 43, 46, 58–60, 63, 68–73, 87, 113, 127–137, 169, 191, 192]. Великий інтерес представляють задачі багатокритеріальної оптимізації, у яких одна або декілька цільових функцій є дробово-лінійними [54, 135, 168, 169]. Таким чином, як функції векторного критерію використовується відношення двох лінійних функцій. Такі функції застосовуються в задачах оптимізації деяких відносних показників якості, таких як собівартість, рентабельність, продуктивність, трудомісткість і т. д. Моделі, що використовують зазначені критерії, відображають тенденції постійного зниження рівня собівартості з розрахунку на одиницю продукції й підвищення якісних показників виробництва при збільшенні масштабів виробництва.

Дробово-лінійні критерії часто зустрічаються, наприклад, в області фінансової діяльності, що ілюструють наступні приклади: а) планування діяльності корпорацій, де необхідно мінімізувати відношення боргу до власних засобів, максимізувати відношення випуску продукції на одного працюючого; б) керування статтями банківського балансу, де мінімізується відношення ризикованих вкладень до капіталу, максимізується відношення реального капіталу до необхідного капіталу, відношення іноземних позичок до сумарних позичок, відношення заставних на житло до загальної суми закладних і ін.

Звичайно, дробово-лінійні цільові функції зустрічаються і в інших областях. Розглянемо, наприклад, морський транспорт. Замість максимізації доходу від деякого одиничного рейсу доцільніше максимізувати відношення доходу до тривалості рейсу. В області водних ресурсів, наприклад, ми можемо забажати мінімізувати підвищення температури води в річці, що відбувається за рахунок охолоджування енергетичного устаткування в річковому басейні. Метою тоді може бути мінімізація відношення дисипативної енергії до потоку. В охороні здоров’я критеріями можуть бути відношення витрат до лікарняних ліжок, числа санітарок до лікарів, числа лікарів до хворих. При плануванні університетської освіти нас може цікавити відношення числа студентів до викладачів, відношення тих, що мають посади до тих, що їх не мають серед професорсько-викладацького складу і тому подібне.

У цьому розділі розглядаються задачі дробово-лінійного програмування, вивчається поняття слабкої ефективності, обговорюються труднощі, що виникають при розв’язанні багатокритеріальних задач з дробово-лінійними функціями критеріїв, пропонується і обґрунтовується алгоритм знаходження всіх слабо ефективних вершин багатокритеріальних задач дробово-лінійного програмування.

Закономірним є підвищений інтерес дослідників останнім часом до різних питань теорії векторної оптимізації, побудови методів розв’язання складних багатокритеріальних прикладних задач на різних комбінаторних множинах, Як відомо, задачі комбінаторної оптимізації, у тому числі багатокритеріальні, можуть бути зведені до задач цілочислового програмування. Однак таке формулювання цих задач не може бути ефективно використано на практиці. Поряд із цим подання дискретних оптимізаційних задач у комбінаторній формі дозволило розвинути клас комбінаторних методів, що враховують специфіку задачі, її комбінаторні властивості [141]. Методи розв'язання й аналізу багатьох комбінаторних задач в основі своїй спираються на властивості комбінаторних множин і їх опуклих оболонок, що є опуклими многогранниками, вершини яких визначає задана комбінаторна множина точок. Застосування властивостей многогранників дає можливість розробляти ефективні алгоритми розв'язання різних комбінаторних задач оптимізації.

В роботі [135] досліджена задача багатокритеріальної оптимізації із дробово-лінійними функціями критеріїв на комбінаторній множині розміщень, побудовано і обґрунтовано метод її розв'язання. При цьому враховується, що опуклою оболонкою множини розміщень є загальний многогранник розміщень, множиною вершин якого є підмножина розміщень [45, 153]. Властивості многогранника розміщень дають можливість звести розв'язок багатокритеріальної задачі на дискретній комбінаторній множині до розв'язку задачі на неперервній допустимій множині.

5.6. Постановка задачі й основні означення

Розглядається задача векторної оптимізації із дробово-лінійними функціями критеріїв наступного вигляду:

$$Z(\Phi, A(B)): \min\left\{\Phi\left(b\right)\middle| b \in A(B)\right\},$$

яка полягає в мінімізації векторного критерію $\hat{O}\left(b\right)$ на евклідовій множині розміщень. Тут $\Phi\left(b\right)=\left(\Phi_1\left(b\right),...,\Phi_l\left(b\right)\right)$ – векторний критерій, заданий на множині $A(B)$ розміщень, породжуваних деякою скінченною мультимножиною $B=\left\{b_1, b_2, ..., b_q\right\}$. Серед елементів мультимножини B − k різних.

Впорядковану n-вибірку $b=(b_{i_1}, b_{i_2}, ..., b_{i_n})$ $(n \le q)$ з q елементів мультимножини B називають n-розміщенням.

Розглянемо основні властивості множини розміщень $A(B)$ як області допустимих розв'язків задачі $Z(\Phi, A(B))$. Кожний елемент множини $A(B)$ є впорядкованим набором n дійсних чисел. Не втрачаючи загальності, упорядкуємо елементи мультимножини B за неспаданням в такий спосіб: $b_1 \le b_2 \le \ldots \le b_q$.

Здійснимо взаємно однозначне відображення φ комбінаторної множини $A(B)$ на деяку підмножину X евклідового простору R^n. Кожному елементу множини $A(B)$ поставимо у відповідність елемент $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in X$ за наступним правилом: $x_j = b_{i_j}$ $\forall j \in N_n$, $i_j \in N_n$. Як відомо, опуклою оболонкою в R^n елементів множини $A(B)$ всіх n-розміщень із q елементів мультимножини B називається многогранник розміщень і позначається M .

Теорема 5.8. [45, 153] Многогранник розміщень $M = \operatorname{conv} A(B)$ є сукупністю всіх розв'язків наступної системи нерівностей:

$$M = \left\{ x \in R^n \middle| \sum_{j=1}^{|\omega|} b_j \le \sum_{i \in \omega} x_i \le \sum_{j=1}^{|\omega|} b_{q-j+1} \ \ \forall \omega \subset N_n = \{1,...,n\} \right\}.$$

Множина його вершини задовольняє співвідношення $\operatorname{vert} M \subset A(B)$.

Вектор $x \in M = \operatorname{conv} A(B)$ є вершиною многогранника розміщень M тоді і тільки, коли він є перестановкою чисел $b_1, ..., b_s, b_{q-r+1}, \ldots, b_q$, де $0 \le s \le n$, $0 \le r \le n$, $s + r = n$.

При відображенні множини $A(B)$ в евклідів простір R^n сформулюємо задачу $Z(F, X)$ мінімізації векторного критерію $F(x)$ на множині $X \subset R^n$, причому кожній точці $b \in A(B)$ відповідає точка $x \in X$, така, що $F(x) = \hat{O}(b)$:

$$Z(F, X) : \min\{F(x) \mid x \in X\},$$

де $F(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_l(x))$, $f_i : R^n \to R^1$,

$$f_i(x) = \frac{\langle c^i, x \rangle + c_0^i}{\langle d^i, x \rangle + d_0^i}, \ \ i \in N_l,$$

$c^i \in R^n$, $d^i \in R^n$, $\tilde{n}_0^i \in R$, $d_0^i \in R$, X – непорожня дискретна множина в R^n, що визначається в такий спосіб, $\operatorname{vert} M \subseteq X \subset M$, $M = \operatorname{conv} A(B)$. Допустима область задачі $Z(F,X)$ може містити також додаткові лінійні обмеження, що утворюють опуклу многогранну множину $D \subset R^n$, вигляду $D = \{x \in R^n \mid Tx \le p\}$, де $p \in R^m$, $T \in R^{m \times n}$. Таким чином, допустима множина X задовольняє співвідношення $\operatorname{vert} M \bigcap D \subseteq X \subset M \bigcap D$.

Під розв'язанням задачі $Z(F,X)$ будемо розуміти знаходження елементів однієї з наступних множин: $P(F,X)$ − ефективних (Парето-оптимальних), $Sl(F,X)$ – слабо ефективних (ефективних за Слейтером), $Sm(F,X)$ – строго ефективних (за Смейлом) розв'язків. З визначень випливає, що

$$Sm(F,X) \subset P(F,X) \subset Sl(F,X). \tag{5.27}$$

Оскільки допустима область X обмежена, то множина $P(F,X)$ є не порожньою і зовні стійкою [113].

5.7. Властивості дробово-лінійних функцій

Дробово-лінійна функція $f(x) = (\langle c,x \rangle + c_0)/(\langle d,x \rangle + d_0)$, $x \in S \subset R^n$ не є ні угнутою, ні опуклою. Однак поверхні рівня функції $f(x)$, тобто множини $L_\alpha = \{x \in R^n \mid f(x) = \alpha\}$, є гіперплощинами, отже описуються лінійними функціями.

Щоб продемонструвати це, візьмемо довільну лінію рівня, що відповідає деякому значенню цільової функції $(\langle c,x \rangle + c_0)/(\langle d,x \rangle + d_0) = z$. Перетворивши цей вираз, отримаємо $(\langle c,x \rangle + c_0) = (\langle d,x \rangle + d_0)z$. Звідки випливає, що $\langle c - zd, x \rangle = zd_0 - c_0$.

Отримаємо лінійне рівняння лінії рівня дробово-лінійної цільової функції, значення якої рівне z. Оскільки z було довільним, то видно, що будь-яка лінія рівня дробово-лінійної цільовій функції лінійна на S за умови, що знаменник ніде на S не перетворються в нуль. Таким чином якщо задача дробово-лінійного програмування має оптимальний розв'язок, то принаймні одна крайня точка з S буде оптимальною.

Не дивлячись на те, що лінії рівня цільових функцій лінійні, вони не паралельні між собою (при $c \ne 0$, $d \ne 0$, а також $c \ne \omega d$ для всіх $\omega \in R$) на відміну від звичайного лінійного програмування. Замість цього вони розходяться як промені від множини обертання розмірності $n-2$.

Множина обертання – це множина всіх точок перетину нульової лінії рівня чисельника (тобто лінії $c^T x + c_0 = 0$) з нульовою лінією рівня знаменника. В R^2 множина обертання називається точкою обертання, а в R^3 – віссю обертання. Математично, відповідно, множина обертання – це множина точок, що одночасно задовольняють двом лінійним рівнянням $c^T x = -c_0$, $d^T x = -d_0$.

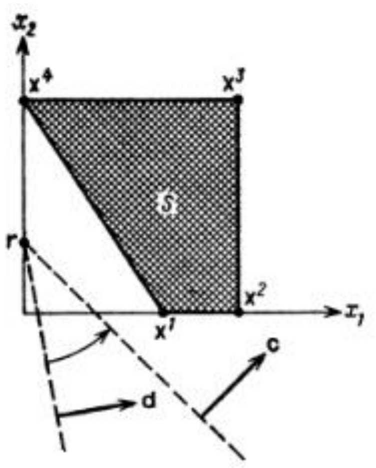
Приклад 5.1. Розглянемо наступну дробово-лінійну задачу з одним критерієм

$$\max\left\{\frac{x_1 + x_2 - 1}{5x_1 + x_2 - 1}\right\}, \text{ за умов } \begin{array}{l} 3x_1 + 2x_2 \geq 6, \\ x_1 \leq 3, \\ x_2 \leq 3, \\ x_1, x_2 \geq 0, \end{array}$$

Допустима область цієї задачі містить чотири крайні точки.

На рис. 5.1 вказані відповідні цим точкам значення критерію.

Зауважимо, що штриховими лініями відзначені нульові лінії рівня і знаменника і що точка обертання r має координати (0,1). Круглою стрілкою вказано напрямок зростання дробово-лінійної цільової функції. Таким чином, рухаючись проти годинникової стрілки, бачимо, що оптимальною є точка x_4.



$x^1 = (2;0) \quad z(x^1) = 1/9$,

$x^2 = (3;0) \quad z(x^2) = 2/14$,

$x^3 = (3;3) \quad z(x^3) = 5/17$,

$x^4 = (0;3) \quad z(x^4) = 1$.

Рис. 5.1. Ілюстрація до прикладу 5.1

Приклад 5.2. Розглянемо тривимірне завдання допустимої області

$$\max\left\{\frac{x_1 - x_2}{x_2 - 4}\right\}, \text{ за умов } \begin{array}{l} x_1 \le 8, \\ x_2 \le 2, \\ x_3 \le 2, \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{array}$$

Для того, щоб знаменник був додатнім на *S*, помножимо чисельник і знаменник на – 1. Тепер цільова функція має вигляд

$$\max\left\{\frac{-x_1 + x_2}{-x_2 + 4} = z\right\}$$

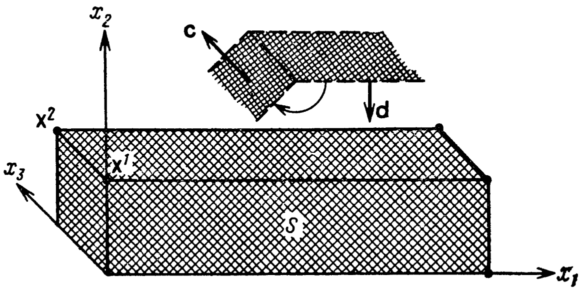


Рис. 5.2. Ілюстрація до прикладу 5.2

Зображаючи цю задачу з $c = (-1,1,0)$ і $d = (0,-1,0)$, отримуємо рис. 5.2, в якому вісь обертання – це множина $\{x \in R^3 \mid x_1 = x_2 = 4\}$.

Оптимальна множина тут – це $x^0 = (0,2)$, а оптимальне значення критерію $z^* = z\left(x^0\right) = 1$.

У роботах [168, 169] доведено, що будь-який локальний мінімум задачі дробово-лінійного програмування є в той же час глобальним, і якщо оптимальний розв'язок скінченний, то існує крайня точка многогранника $G = M \bigcap D$, що є оптимальною. Це твердження виконується, якщо чисельник і знаменник дробово-лінійної функції не перетворюються одночасно в нуль $\forall x \in X$.

Припустимо, що $\langle d, x\rangle + d_0 > 0 \; \forall x \in G$. Відомо, що на будь-якому прямолінійному відрізку, що належить многограннику M, дробово-лінійна функція $f(x)$ змінюється монотонно.

Теорема 5.9. Дробово-лінійна функція $f(x)$, досягає мінімуму (максимуму) тільки у вершинах многогранника G. Якщо мінімум (максимум) досягається в декількох крайніх точках, то він досягається і на їх опуклій оболонці.

Означення 5.3. Неперервна функція $f(x)$ є квазіопуклою функцією на опуклій множині G, якщо виконується кожна з наступних еквівалентних умов:

(a) множина $\{x \in R^n \mid f(x) \le q, x \in G\}$ – опукла для всіх q, $G \subset R^n$;

(b) $x_1, x_2 \in G, f(x_2) < f(x_1) \Rightarrow f(\lambda x_2 + (1-\lambda)x_1) \le f(x_1)$, $0 \le \lambda \le 1$.

Означення 5.4. Функція $f(x)$ є строго квазіопуклою на множині G, якщо в умові *(b)* фігурують строгі нерівності.

Теорема 5.9. Будь-який локальний мінімум строго квазіопуклої функції є глобальним.

Оскільки множина $\left\{x \in R^n \middle| \left(\left\langle c \;\; ,x \right\rangle + c_0\right) \Big/ \left\langle d \;\; ,x \right\rangle + d_0 \le q, x \in G\right\}$ опукла для всіх значень q, то функція

$f(x) = \left(\left\langle c,x \right\rangle + c_0\right) / \left(\left\langle d,x \right\rangle + d_0\right) -$ квазіопукла на множині G. Неважко показати, що функція $\left\langle c,x \right\rangle \big/ \left\langle d,x \right\rangle$ є строго квазіопуклою на G. Очевидно, що функція $f(x)$ є квазіопуклою на опуклій множині S, якщо функція ($-f(x)$) квазіопукла.

Якщо зробити заміну: $f_i(x)$ на $-f_i(x)$, то умова (b) для квазіопуклих функцій можна записати в наступному вигляді:

$$f_i(x_2) > f_i(x_1) \Rightarrow f_i(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \ge f_i(x_1) ,$$

або

$$f_i(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \ge \min\left[f_i(x_1), f_i(x_2)\right],$$

для будь-яких $x_1, x_2 \in S$ і $0 \le \lambda \le 1$. Для угнутих і квазіугнутих функцій з точністю до зміни знаків зберігаються властивості опуклих і квазіопуклих функцій.

5.8. Особливості багатокритеріальної задачі із дробово-лінійними функціями критеріїв

Як відомо [168, 169], для розв’язання однокритеріальних задач із дробово-лінійною функцією цілі існує велика кількість методів, які умовно розподіляються на методи лінеаризації, параметричні методи, модифікації симплексів-методів, серед яких відомими є метод Чарнса й Купера, алгоритм Гілморі й Гоморі та інші.

Як відзначається в [168], всі ці методи мають близьку обчислювальну складність, а пріоритет віддається методу, що дозволяє ефективніше вирішувати дробово-лінійну задачу в конкретних практичних умовах (розмірність задачі, структура системи обмежень, наявність програмного забезпечення тощо). Найбільш кращими є методи, що зводяться до розв’язання серії задач лінійного програмування, для яких розроблене ефективне програмне забезпечення для різних типів ЕОМ.

Що стосується розробки методів розв’язання задач багатокритеріального дробово-лінійного програмування, то успіхи тут досить скромні. Єдиний опублікований алгоритм наведений у роботі Корнблута й Штойєра [169]. Цей алгоритм знаходить всі слабо ефективні вершини за умови, що множина допустимих розв’язків скінченна. Алгоритм шукає ефективні ребра, що проходять через точки розриву, а потім, що відтинають площини, які теж проходять через точки розриву. Таким чином, у модифікованій задачі точки розриву стають вершинами. Проте, такі методи не враховують наявність комбінаторних умов дискретної допустимої множини, а тому не придатні для розв’язання зазначених класів задач. Доцільно з’ясувати, за яких умов можна використовувати такий алгоритм на випадок задач багатокритеріальної дробово-лінійної оптимізації, допустима область яких є комбінаторною множиною розміщень.

Виконаємо заміну змінних $y_j = x_j y_0 \ \forall j \in N_n$, $y_0 \ge 0$, тоді $\left\langle d^i, y \right\rangle + d_0^i y_0 = z_i$, $z_i \in R$, $i \in N_l$, і розглянемо наступну задачу:

$$Z(F_1, Y): \min\left\{F_1(y) \middle| y \in Y\right\},$$

де $F_1(y) = \left(f_1^1(y), \dots, f_l^1(y)\right)$, $f_i^1(y) = \left\langle c^i, y \right\rangle + \left\langle c_0^i, y_0 \right\rangle$, $i \in N_l$,

$$Y = \left\{(y, y_0) \in R^{n+1} \mid Ty - py_0 \le 0, \left\langle d^i, y \right\rangle + d_0^i y_0 = z_i,\ i \in N_l\right\}.$$

Лема 5.1. Якщо (y, y_0) − допустимий розв’язок задачі $Z\left(F_1, Y\right)$, то $y_0 > 0$.

Доведення. Задача $Z\left(F_1, Y\right)$ отримана з вхідної задачі $Z(F, X)$ в результаті множення обмежень, які описують многогранну множину D, і чисельників $\left\langle c^i, x \right\rangle + c_0^i$ дробово-лінійних функцій $f_i(x)$, $i \in N_l$, на y_0 і прирівнювання знаменників $\left\langle d^i, x \right\rangle + d_0^i$ кожної дробово-лінійної функції $f_i(x)$ деякому числу z_i, $i \in N_l$. Задача набуває наступних властивостей: для будь-якої пари $(y, y_0) \in Y$ виконується умова $y_0 > 0$. Дійсно, якщо це не так, то існує деякий $y \in Y$, що задовольняє умови $Ty \le 0$, $y \ge 0$. З рівності $\left\langle d^i, y \right\rangle + d_0^i y_0 = z_i$, $i \in N_l$, треба, щоб $y \ne 0$. Тоді, якщо $x \in X$, то $x + \alpha y$ теж належить множині X для будь-яких $\alpha \ge 0$, що суперечить обмеженості множини X.

Теорема 5.10. Якщо (y^*, y_0^*) − ефективний розв’язок багатокритеріальної задачі $Z\left(F_1, Y\right)$, то y^* / y_0^* − ефективний розв’язок задачі $Z(F, X)$.

Доведення. Очевидно, що y^* / y_0^* − допустимий розв’язок задачі $Z\left(F, X\right)$. Припустимо, від супротивного, що y^* / y_0^* не є ефективним розв’язком цієї задачі. Тоді $\exists x' : F(x') \le F(y^* / y_0^*)$ і $F(x') \ne F(y^* / y_0^*)$, тобто $\exists\, r \in N_l$, для якого виконуються нерівності $f_r(x') < f_r(y^* / y_0^*)$ і $f_i(x') \le f_i(y^* / y_0^*), \quad i \in N_l \setminus \{r\}$. Отже,

$$\frac{\left\langle c^r, x' \right\rangle + c_0^r}{\left\langle d^r, x' \right\rangle + d_0^r} < \frac{\left\langle c^r, (y^* / y_0^*) \right\rangle + c_0^r}{\left\langle d^r, (y^* / y_0^*) \right\rangle + d_0^r} ,$$

$$\frac{\left\langle c^i, x' \right\rangle + c_0^i}{\left\langle d^i, x' \right\rangle + d_0^i} \le \frac{\left\langle c^i, (y^* / y_0^*) \right\rangle + c_0^i}{\left\langle d^i, (y^* / y_0^*) \right\rangle + d_0^i}, \ i \in N_l \setminus \{r\}.$$

Нехай $y_0 = z_r / \left(d^r x' + d_0^r\right)$ і $y = y_0 x'$. Очевидно, що $\left(y, y_0\right)$ − допустимий розв’язок задачі $Z\left(F_1, Y\right)$ і відповідно до леми 5.1 $y_0 > 0$. Отже, справедливі наступні нерівності

$$\frac{\left\langle c^r, y \right\rangle + c_0^r y_0}{\left\langle d^r, y \right\rangle + d_0^r y_0} < \frac{\left\langle c^r, y^* \right\rangle + c_0^r y_0^*}{\left\langle d^r, y^* \right\rangle + d_0^r y_0^*} , \ \frac{\left\langle c^i, y \right\rangle + c_0^i y_0}{\left\langle d^i, y \right\rangle + d_0^i y_0} \le \frac{\left\langle c^i, y^* \right\rangle + c_0^i y_0^*}{\left\langle d^i, y^* \right\rangle + d_0^i y_0^*} ,$$

$$\forall i \in N_l \setminus \{r\} ,$$

що суперечить тому факту, що $(y^*, y_0{}^*)$ є ефективним розв'язком задачі $Z(F_1, Y)$.

Дана теорема дає можливість одержати ефективні розв'язки задачі $Z(F, X)$ в результаті розв'язання багатокритеріальної задачі $Z(F_1, Y)$ з лінійними критеріями $f_i^1(y), i \in N_l$.

Після зведення задачі $Z(F, X)$ до векторної задачі $Z(F_1, Y)$ з лінійними критеріями можна використовувати достатні умови оптимальності зазначених видів ефективних розв'язків, справедливі $\forall\, y \in \operatorname{vert} M$, отримані в роботах [81, 128, 130, 135].

Слід зазначити, що специфіка задач векторної оптимізації передбачає знаходження різних видів розв'язків. Розглянемо ряд теорем, які характеризують структурні властивості розв'язків векторної комбінаторної задачі $Z(F, X)$.

Теорема 5.11. При виконанні умови $q-1 \le n \le q$ справедливі включення

$$Sm(F,X) \subset P(F,X) \subset Sl(F,X) \subset \operatorname{vert} M .$$

Доведення. З огляду на співвідношення (5.14) між введеними множинами ефективних розв'язків і той факт, що множина допустимих розв'язків X є підмножиною множини розміщень $A(B)$, справедливі наступні співвідношення: $Sm(F,X) \subset P(F,X) \subset Sl(F,X) \subset A(B)$.

Як відомо [172], при виконанні умови теореми підмножина розміщень $A(B)$ збігається із множиною вершин загального многогранника розміщень $\operatorname{vert} M$, тобто $A(B) = \operatorname{vert} M$. Таким чином, справедливе наступне включення множин:

$Sm(F,X) \subset P(F,X) \subset Sl(F,X) \subset \operatorname{vert} M$. Теорема доведена.

На основі властивостей допустимої області X і різних видів множин $Sm(F,X), P(F,X), Sl(F,X)$ ефективних розв'язків, розв'язання задачі $Z(F, \mathrm{X})$ можна звести до розв'язання задачі $Z(F, G)$ на неперервній множині G, де $G = M \bigcap D$.

Справедливі наступні теореми.

Теорема 5.12.

$Sl(F,G) \bigcap \operatorname{vert} M \subset Sl(F,X), P(F,G) \bigcap \operatorname{vert} M \subset P(F,X),$

$Sm(F,G) \bigcap \operatorname{vert} \mathrm{M} \subset Sm(F,X).$

Доведення. Оскільки $\operatorname{vert} M \bigcap D \subset G,$ то

$P(F,G) \bigcap \operatorname{vert} M \bigcap D \subset P(F,G \bigcap \operatorname{vert} M \bigcap D) \subseteq P(F,X)$.

Співвідношення
$Sl(F,X) \supseteq Sl(F, \operatorname{vert} M \bigcap D) \supset Sl(F,G) \bigcap \operatorname{vert} M \bigcap D$,

$Sm(F,X) \supseteq Sm(F, D \bigcap \operatorname{vert} M) \supset Sm(F,G) \bigcap \operatorname{vert} M$ доводиться аналогічно.

Теорема 5.13. $\forall x \in \operatorname{vert} M : x \in P(F,M) \bigcap D \Rightarrow x \in P(F,X)$, $x \in Sl(F,M) \bigcap D \Rightarrow x \in Sl(F,X)$, $x \in Sm(F,M) \bigcap D \Rightarrow x \in Sm(F,X)$.

Доведення. Оскільки $G = M \bigcap D$, то справедливі імплікації $\forall x \in \operatorname{vert} M$:

$x \in P(F,M) \bigcap D \Rightarrow x \in P(F, M \bigcap D) = P(F,G) \Rightarrow x \in P(F,X)$,

$x \in Sl(F,M) \bigcap D \Rightarrow x \in Sl(F,X)$, $x \in Sm(F,M) \bigcap D \Rightarrow x \in Sm(F,X)$.

Як відомо, дробово-лінійні функції є строго квазіопуклими на опуклій множині, тому для множин $Sm\left(F,G\right)$, $P\left(F,G\right)$, $Sl\left(F,G\right)$ розв'язків задачі $Z\left(F,G\right)$ справедливі теореми.

Теорема 5.14. Якщо множина G – опукла, а всі функції $f_i(x)$, $i \in N_l$, строго квазіопуклі, то множини $Sm\left(F,G\right)$, $P\left(F,G\right)$, $Sl\left(F,G\right)$ збігаються, тобто справедлива рівність

$$Sm\left(F,G\right) = P\left(F,G\right) = Sl\left(F,G\right) .$$

Доведення. Оскільки справедливе співвідношення $Sm(F,G) \subset Sl(F,G)$, то доведемо включення $Sl\left(F,G\right) \subset Sm\left(F,G\right)$. Покажемо, від супротивного, що $x \in Sl\left(F,G\right)$, але $x \notin Sm\left(F,G\right)$. Це значить, що $\exists\, y \in G : y \neq x$ і $F(y) \leq F(x)$. В силу строгої квазіопуклості функцій $f_i(x)$, $i \in N_l$ векторного критерію, для будь-якої точки $z = \lambda x + (1-\lambda) y \in G$ виконуються нерівності $f_i(z) < f_i(x) \forall i \in N_l$, що суперечить включенню $x \in Sl(F,G)$.

Теорема 5.15. [186] Якщо функції $f_i(x)$, $i \in N_l$, векторного критерію є строго квазіопуклими й напівнеперервними знизу на лінійних відрізках G, то множина $Sl\left(F,G\right)$ слабо ефективних розв'язків є об'єднанням ефективних множин $P\left(F,G\right)$ підзадач $Z_I(F,G)$, $I \subset N_l, I \neq \varnothing$, тобто $Sl\left(F,G\right) = \bigcup \left\{ P_I(F,G) : I \subset N_l, |I| \leq n+1 \right\}$.

Визначимо необхідні й достатні умови (ефективності) Парето-оптимальності розв'язків задачі векторної оптимізації $Z(F,X)$.

Для цього, скориставшись [183], розглянемо лінійну задачу частково дискретної оптимізації наступного вигляду:

$$Z(g,X):\max\left\{\langle g,y\rangle \middle| (P+Q)^T x+y=Q^T x^0,\ x\in X, y\ge 0\right\},$$

де $P=(p_1,p_2,...,p_l)\in R^{n\times l}$, $Q=(q_1,q_2,...,q_l)\in R^{n\times l}$,

$$p_i=\left(\left\langle d^i,x^0\right\rangle c^i-\left\langle c^i,x^0\right\rangle d^i\right)\in R^n,\ q_i=\left(d_0^i c^i-c_0^i d^i\right)\in R^n, i\in N_l,$$

$$y\in R^l,\ g>0,\ g\in R^l.$$

Теорема 5.16. Точка $x^0\in X$ є ефективним розв'язком векторної задачі $Z(F,X)$ на комбінаторній множині розміщень $A(B)$ тоді й тільки тоді, коли лінійна частково дискретна задача оптимізації $Z(g,X)$ має оптимальний розв'язок $\left(x^*,y^*\right)$ при $y^*=0$.

Доведення. Необхідність. Нехай x^0- ефективний розв'язок задачі $Z(F,X)$, припустимо від супротивного, що $\left(x^*,y^*\right)$ – оптимальний розв'язок задачі лінійної оптимізації вигляду $Z(g,X)$ при $y^*\ge 0, y^*\ne 0$. Тоді з допустимості $\left(x^*,y^*\right)$ випливає, що $\exists r\in N_l$:

$$\frac{\left\langle c^r,x^*\right\rangle+c_0^r}{\left\langle d^r,x^*\right\rangle+d_0^r}<\frac{\left\langle c^r,x^0\right\rangle+c_0^r}{\left\langle d^r,x^0\right\rangle+d_0^r} \text{ і } \frac{\left\langle c^i,x^*\right\rangle+c_0^i}{\left\langle d^i,x^*\right\rangle+d_0^i}\le\frac{\left\langle c^i,x^0\right\rangle+c_0^i}{\left\langle d^i,x^0\right\rangle+d_0^i},$$
$$i\in N_l\setminus\{r\}.$$

Таким чином, $F(x^*)\le F(x^0)$ і $F(x^*)\ne F(x^0)$, що суперечить тому, що x^0 є ефективним розв'язком задачі $Z(F,X)$. Таким чином, $y^*=0$.

Достатність. Припустимо від супротивного, що частково дискретна задача лінійної оптимізації $Z(g,X)$ має оптимальний розв'язок (x^*,y^*) при $y^*=0$, але x^0 не є ефективним розв'язком задачі $Z(F,X)$. Тоді існують $x^1\in X$ і таке число $r\in N_l$, що $f_r(x^1)<f_r(x^0)$. Отже, виконуються нерівності:

$$\frac{\left\langle c^r,x^1\right\rangle+c_0^r}{\left\langle d^r,x^1\right\rangle+d_0^r}<\frac{\left\langle c^r,x^0\right\rangle+c_0^r}{\left\langle d^r,x^0\right\rangle+d_0^r} \text{ і } \frac{\left\langle c^i,x^1\right\rangle+c_0^i}{\left\langle d^i,x^1\right\rangle+d_0^i}\le\frac{\left\langle c^i,x^0\right\rangle+c_0^i}{\left\langle d^i,x^0\right\rangle+d_0^i},\ i\in N_l\setminus\{r\}.$$

Із цього випливає, що

$$\left[\left(\left\langle d^r, x^0\right\rangle (c^r)^T - \left\langle c^r, x^0\right\rangle (d^r)^T\right) + \left(d_0^r (c^r)^T - c_0^r (d^r)^T\right)\right] x^1 <$$
$$< \left(d_0^r (c^r)^T - c_0^r (d^r)^T\right) x^0,$$
$$\left[\left(\left\langle d^i, x^0\right\rangle (c^i)^T - \left\langle c^i, x^0\right\rangle (d^i)^T\right) + \left(d_0^i (c^i)^T - c_0^i (d^i)^T\right)\right] x^1 \leq$$
$$\leq \left(d_0^i (c^i)^T - c_0^i (d^i)^T\right) x^0, i \in N_l \setminus \{r\},$$

або $(p_r + q_r)^T x^1 < q_r^T x^0$ і $(p_i + q_i)^T x^1 \leq q_r^T x^0$ $i \in N_l$.

Тоді справедлива нерівність $(P+Q)^T x^1 \leq Q^T x^0$.

Таким чином, встановлено, що існує такий вектор $y^1 \geq 0, y^1 \neq 0$, при якому виконується рівність $(P+Q)^T x^1 + y^1 = Q^T x^0$. Оскільки $x^1 \in X$, то приходимо до висновку, що (x^1, y^1) допустимий розв'язок для задачі $Z(g, X)$ і $z = \left\langle g, y^1 \right\rangle > 0$. Але це суперечить тому, що (x^*, y^*) при $y^* = 0$ є оптимальним розв'язком задачі $Z(g, X)$. Теорема доведена.

Запропоновані необхідні і достатні умови можуть бути використані при реалізації різних методів розв'язання векторних задач оптимізації вигляду $Z(F, X)$.

В продовження і розвиток результатів, викладених в роботах [53, 54, 128, 130-135], розроблений один з можливих підходів до розв'язання задачі $Z(F, X)$.

Він полягає в оптимізації одного найбільш важливого з розглянутих часткових критеріїв за умови задоволення всіма іншими критеріями, встановлених для них відповідних обмежень (рівнів), тобто розглядається однокритеріальна задача, у якій роль введених обмежень стає вирішальною при пошуку оптимальної альтернативи.

Для визначення максимально можливих значень критеріїв справедливе наступне твердження:

Твердження 5.7. Якщо для коефіцієнтів дробово-лінійної цільової функції задачі $\max\left\{ f(x) \mid x \in \operatorname{vert} M \right\}$, де $f(x) = \dfrac{\langle c, x\rangle + c_0}{\langle d, x\rangle + d_0}$, $c, d \in R^n$,

$c_0, d_0 \in R$, виконуються умови $c_{i_1} \le c_{i_2} \le \ldots \le c_{i_n}$, $i_n \in N_n$, $d_{j_1} \le d_{j_2} \le \ldots \le d_{j_n}$, $j_n \in N_n$, то $\max\left\{\langle c, x\rangle + c_0\right\}$ чисельника функції $f(x)$ на множині $A(B)$ розміщень досягається в точці $x^u = \left(x^u_{i_1}, x^u_{i_2}, \ldots, x^u_{i_n}\right)$, де $x^u_{i_j} = b_j \ \forall\ j \in N_n$, а $\min\left\{\langle d, x\rangle + d_0\right\}$ знаменника $f(x)$ – у точці $x^l = \left(x^l_{i_1}, x^l_{i_2}, \ldots, x^l_{i_n}\right)$, де $x^l_{j_{s+1}} = b_{n-s}$ $\forall\ s \in N_{n-1} \bigcup \left\{0\right\}$. Тоді верхня t^u і нижня t^l границі функції $f(x)$ визначаються відповідно в такий спосіб:

$$t^u = \frac{\sum\limits_{i_s \in N_n} c_{i_s} x^u_{i_s} + c_0}{\sum\limits_{i_k \in N_n} d_{i_k} x^l_{i_k} + d_0}, \quad t^l = \frac{\sum\limits_{i_s \in N_n} c_{i_s} x^l_{i_s} + c_0}{\sum\limits_{i_k \in N_n} d_{i_k} x^u_{i_k} + d_0}.$$

Справедливість даного твердження очевидна, оскільки найбільше значення суми попарних добутків досягається при зіставленні неспадаючої послідовності c_i і неспадаючої послідовності елементів множини розміщень, а найменше значення суми, відповідно досягається при зіставленні неспадаючої послідовності d_i і незростаючої послідовності x_i.

Таким чином, багатокритеріальна задача зводиться до задачі оптимізації за одним критерієм $f_r(x), r \in N_l$, який є головним, за умови, що значення всіх інших критеріїв повинні бути не менше деяких установлених граничних значень $t_i, i \in N_l \setminus \{r\}$. Інші дробово-лінійні функції представляються у вигляді лінійних обмежень вигляду

$$\left\langle c^i, x\right\rangle + c^i_0 \le t_i\left(\left\langle d^i, x\right\rangle + d^i_0\right),\ i \in N_l \setminus r \ \text{ або}$$

$$\left\langle\left(t_i d^i - c^i\right), x\right\rangle + \left(t_i d^i_0 - c^i_0\right) \ge 0,\ \ i \in N_l \setminus r,$$

де r – номер критерію, що обраний як головний.

Ці обмеження додаються у вхідну систему обмежень. Таким чином, маємо задачу

$$Z(f_r, X(t_i)) : \min\left\{ f_r(x) \middle| f_i(x) \le t_i, i \in N_l \setminus \{r\}, x \in X \right\}.$$

Відзначимо, що якщо значення $t_i, i \in N_l$, замале, то задача $Z(f_r, X(t_i))$ може не мати допустимих розв'язків, якщо значення $t_i, i \in N_l$, велике, то оптимальний розв'язок цієї задачі може не бути ефективним.

Будемо говорити, що обмеження $f(x) \le t$, активне в точці x_0, якщо $f(x_0) = t$.

Теорема 5.17. Нехай x_0 – оптимальний розв'язок задачі $Z(f_r, X(t_i))$ і всі обмеження $f_i(x) \le t_i, i \in N_l$, в точці x_0 активні, тоді x_0 – ефективний розв'язок задачі $Z(F, X)$.

Доведення. Якщо x_0 – не ефективний розв'язок, то існує деякий вектор $x \in X(t_i)$, такий що $F(x) \le F(x_0)$ і $F(x) \ne F(x_0)$. Із цього випливає, що x – допустимий розв'язок $Z(f_r, X(t_i))$, і $f_r(x) = f_r(x_0)$. Іншими словами x – оптимальний розв'язок задачі $Z(f_r, X(t_i))$. Оскільки обмеження активні в точці x_0, то робимо висновок, що $F(x) = F(x_0)$ і приходимо до протиріччя.

Перетворимо дробово-лінійний критерій задачі $Z(f_r, X(t_i))$ в лінійний і одержимо наступну задачу:

$$Z(f_r^1, Y(t_i)) : \min\left\{ f_r^1(y) \middle| f_r^1(y) \le t_i, i \in N_l \setminus \{r\}, y \in Y \right\}.$$

Вибір одного із критеріїв як головного не зменшує свободи вибору оптимального розв'язку. Для визначення граничних значень $t_i,\ i \in N_l \setminus \{r\}$, можна скористатися твердженням 5.7, що дає можливість для встановлення верхніх і нижніх границь значень критеріїв $f_i(x),\ i \in N_l$, на множині розміщень. Пропонується два підходи до розв'язання вхідної задачі $Z(F, X)$. Перший полягає в призначенні порогам $t_i,\ i \in N_l \setminus \{r\}$ мінімально можливих значень критеріїв $f_i(x),\ i \in N_l$, на множині розміщень із наступним розширенням допустимої множини задачі $Z(f_r^1, Y(t_i))$, якщо вхідна задача виявиться недопустимою, а у випадку її допустимості знаходження ефективного або слабо ефективного розв'язку. Другий підхід полягає в пошуку оптимального розв'язку задачі при призначенні максимальних значень порогам $t_i,\ i \in N_l \setminus \{r\}$, з поступовим звуженням допустимої області за допомогою вибору значень порогів наступних, упорядкованих за спаданням за максимальними значеннями критеріїв. Процедура призначення серії граничних величин t_i обмежень і в першому, і в другому підході проста, оскільки використовуючи твердження 5.3, вона зводиться після впорядкування коефіцієнтів критеріїв до обчислення скалярного добутку двох векторів.

Загальна ідея запропонованого методу розв’язання задачі $Z(F, X)$ полягає в послідовному включенні обмежень задачі, що описують область допустимих розв’язків, і при виконанні деякої умови, відкиданні неактивних обмежень.

Запропонований алгоритм призначений для розв’язання векторних задач, у яких ефективні розв’язки знаходяться на вершинах загального многогранника розміщень. Якщо ефективні розв’язки містяться всередині допустимої області, то варто застосовувати метод, заснований на необхідних і достатніх умовах ефективності (теорема 5.16).

5.9. Алгоритм розв’язання векторної задачі на комбінаторній множині розміщень

1. Зводимо багатокритеріальну задачу $Z(F, X)$ до однокритеріальної задачі $Z(f_r, Y(t_i))$, вибравши за головний критерій f_r, $r \in N_l$. Інші функції векторного критерію $F(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_l(x))$ переносимо в обмеження в такий спосіб: $\left\langle \left(t_i d^i - c^i\right), x \right\rangle + \left(t_i d_0^i - c_0^i\right) \geq 0$, $\forall\ i \in N_l \setminus r$. Вважатимемо, $\nu = 0, \mu = 0$.

2. Вибираємо обмеження, що описують допустиму область $G^\nu \supset G$, що відповідає деякому елементу множини розміщень – точці y^0.

3. Розв’язуємо задачу $Z(f_r, G^\nu)$ за допомогою симплекс-методу. Якщо вона не має розв’язку, то нерозв’язувана і задача $Z(F, G)$. Інакше знаходимо оптимальний розв’язок y^ν цієї задачі.

4. Якщо отриманий розв’язок y^ν не є елементом множини розміщень, то переходимо до пункту 5. Якщо y^ν – елемент множини розміщень, то в знайденій точці y^ν перевіряємо виконання інших обмежень задачі $Z(f_r, G)$, тобто тих, які не були враховані. Очевидно, ними можуть бути лише обмеження, що описують опуклу многогранну множину *D*, або обмеження-пороги (якщо використовується перший підхід). Якщо розв’язок y^ν не задовольняє цим обмеженням,

то варто додати до обмежень допустимої області задачі $Z(f_r, G^{\nu}(t_i))$ найбільш порушене з обмежень многогранної множини D або збільшити пороги (у випадку першого підходу) і перейти до пункту 6 алгоритму. Якщо розв'язок y^{ν} задовольняє зазначеним обмеженням, то він є ефективним розв'язком задачі $Z(f_r, G^{\nu})$ а, отже, і задачі $Z(F_1, Y)$. Для знаходження наступного ефективного розв'язку переходимо на початок алгоритму, вибравши за головний інший критерій $f_{r^{\mu+1}}$, $r^{\mu+1} \in N_l \setminus \bigcup\limits_{\mu} r^{\mu}$, вважаючи $\mu = \mu + 1$ й $r^{\mu} = r$.

5. Будуємо лінійну нерівність наступного вигляду: $\sum\limits_{r \in J} h^r x_r \le h^0$, J – множина номерів небазисних змінних, що проходять через суміжні вершини і відтинають недопустиму вершину. Додаємо це відсікання до обмежень задачі $Z(f_r, G^{\nu})$.

6. Порівнюємо значення $f_r(y^{\nu})$ зі значенням цільової функції, отриманим на попередньому кроці. Якщо воно зменшується, то відкидаємо неактивні обмеження в точці y^{ν}. Якщо значення $f_r(y^{\nu})$ не змінюється, то обмеження не відкидаємо. Заміняємо ν на $\nu + 1$ і з допустимою областю, що змінилася, задачі $Z(f_r, G^{\nu})$ переходимо до пункту 3 алгоритму для її розв'язання.

Зауваження 5.3. Та обставина, що жодне з обмежень не відкидається, якщо $f_r(y^{\nu})$ залишається рівним попередньому значенню, і одне або два обмеження додаються, гарантує, що розв'язується тільки скінченне число задач вигляду $Z(f, G^{\nu})$. Отже, якщо ефективний розв'язок задачі $Z(F, X)$ знаходиться на вершині загального многогранника розміщень, то описаний алгоритм приводить до його одержання після розв'язання скінченного числа підзадач $Z(f_r, G^{\nu})$ або до встановлення факту нерозв'язуваності задачі $Z(F, X)$.

5.10. Аналіз результатів обчислювальних експериментів

Алгоритм запропонованого методу програмно реалізовано в середовищі Delphi на ПК – Pentium IV, із частотою 3.0 Ггц, оперативною пам'яттю 1 Гб. Для розв’язання задач векторної оптимізації $Z(F,X)$ з метою дослідження ефективності запропонованого алгоритму за допомогою програми був проведений обчислювальний експеримент. Властивості і обчислювальні можливості алгоритму та методу розглянуті на різних тестових задачах, вхідні дані яких генерувалися за допомогою стандартних функцій, використовуваних для одержання псевдовипадкових чисел. Коефіцієнти матриці T і вектора $p \in R^m$ обмежень, що описують многогранник D, вектори $\left(c^i, c_0^i\right) \in R^{n+1}$, $\left(d^i, d_0^i\right) \in R^{n+1}, i \in N_l$, що містять коефіцієнти функцій векторного критерію $F(x)$, вибиралися числами, рівномірно розподіленими відповідно на інтервалах $[-10,10]$, $[0,30n]$, $[-10n,10n]$, $[-10n,10n]$, а елементи мультимножини $B-$ рівномірно розподіленими на інтервалі $\left[0, 3\cdot 10^2 n\right]$. Кількість елементів мультимножини B змінювалося від 10 до 24. Було розв’язано по 10 задач кожної розмірності.

У табл. 5.1 наведені результати обчислювальних експериментів для векторних задач на комбінаторній множині розміщень $A(B)$.

Таблиця 5.1

№ п\п	***l***	***q***	***n***	***r***	***g***	***s***	$\boldsymbol{\delta}$	***t, c***
1	5	12	5	5	7	0	0,001	6
2	6	11	9	12	37	22	0,01	167
3	4	13	10	14	35	16	0,001	70
4	3	12	11	17	29	14	0,01	102
5	4	14	11	18	17	12	0,001	108
6	5	15	12	23	24	14	0,01	280
7	2	14	13	18	9	6	0,001	190
8	8	15	14	12	12	8	0,01	160
9	6	16	14	24	31	11	0,01	315
10	7	18	15	19	22	9	0,001	236
11	7	17	15	12	47	19	0,01	120
12	10	18	16	17	170	71	0,001	227
13	9	18	16	12	137	106	0,001	118
14	7	19	16	11	13	4	0,001	103
15	8	20	18	10	31	17	0,001	203
16	2	22	18	20	70	68	0,01	107

Продовж. табл. 5.1

№ п\п	*l*	*q*	*n*	*r*	*g*	*s*	*δ*	*t, c*
17	8	22	18	15	174	102	0,01	299
18	10	21	19	12	184	108	0,01	223
19	6	21	19	12	128	107	0,001	128
20	4	22	19	13	179	107	0,01	286
21	10	23	19	18	246	180	0,001	357
22	3	21	20	16	15	6	0,01	170
23	9	21	20	20	46	38	0,001	273
24	8	24	20	14	104	48	0,01	198
25	9	23	22	28	103	47	0,01	206

У табл. 5.1 використовуються такі позначення: l − розмірність векторного критерію $F(x)$; B − мультимножина, що визначає множину $A(B)$ розміщень; q – потужність мультимножини B; n − кількість елементів вибірки з мультимножини B; r − кількість обмежень, що описують многогранник D задачі; g − кількість приєднаних обмежень у процесі розв’язання задачі; s − кількість відкинутих обмежень; t − час розв’язання задачі (у сек.); δ − параметр, що задає точність при визначенні обмежень, що відкидаються.

Аналізуючи результати обчислювального експерименту, описані в табл. 5.1, можна помітити, що кількість r обмежень, що описують многогранник D, є істотним чинником, що впливає на час розв’язання задач. Наявність таких обмежень зменшує область допустимих розв’язків, а тому в деяких задачах час розв’язання менший, ніж у задачах такої ж розмірності з меншим числом обмежень. Варто відзначити, що вибір інтервалу b для елементів мультимножини B теж впливає на час розв’язання. Потрібно відзначити, що в більшості прикладів з табл. 5.1 при збільшенні параметрів q і n збільшується кількість побудованих відсікань.

Використовуючи Пакет аналізу даних, вбудований в Microsoft Excel, були проаналізовані результати обчисювальних експериментів, наведені в табл. 5.1. Представлено графіки залежностей деяких основних показників: на рис. 5.1 − часу обчислень від кількості елементів вибірки, на рис. 5.2 – кількості побудованих обмежень від кількості елементів мультимножини B. Пунктирною лінією представлені графіки, побудовані на підставі даних табл. 5.1, а суцільною лінією – графіки, побудовані за допомогою апроксимації і згладжування.

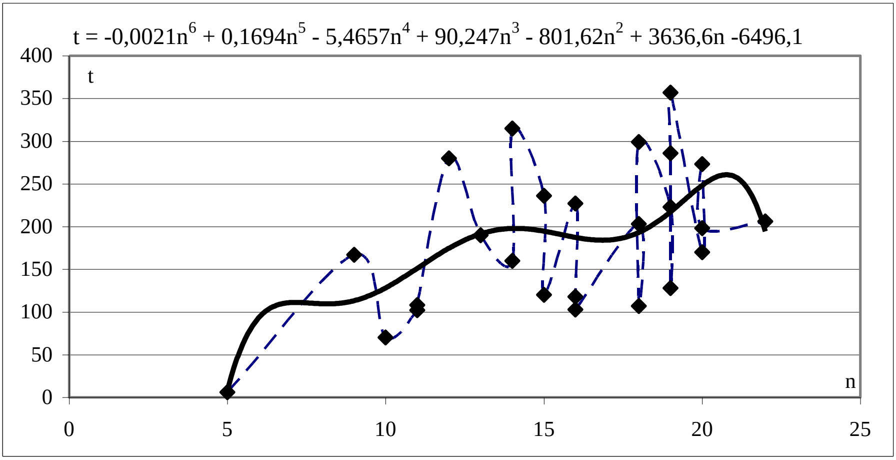


Рис. 5.1. Графік залежності часу обчислень від кількості елементів вибірки

При побудові апроксимації та згладжуванні функцій, найбільш близькими до функцій, побудованим за даними, наведеним у табл. 5.1, виявилися поліноміальні функції, графіки яких наведений на рис. 5.1, 5.2.

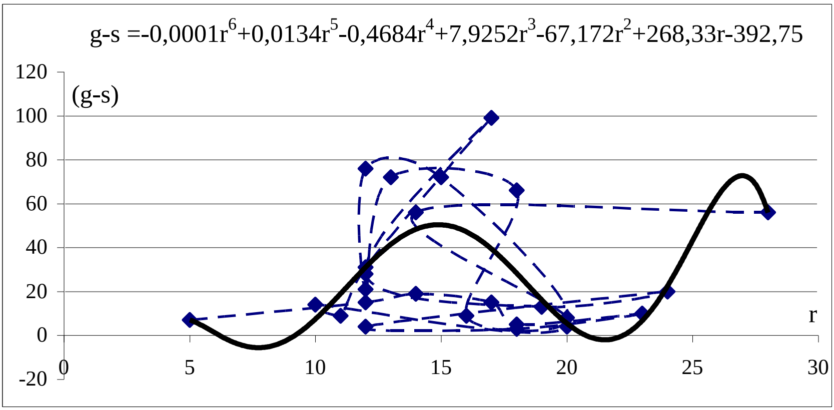


Рис. 5.2. Графік залежності обмежень, що описують область D, від кількості елементів мультимножини B.

Приклад 5.3. Для ілюстрації запропонованого підходу розв'яжемо наступну задачу. Знайти максимум векторного критерію

$F(x) = (f_1(x), f_2(x))$, функції якого $f_1(x) = \dfrac{x_1 + x_2}{5x_1 + x_2}$, $f_2(x) = -x_1 + x_2$, визначені на допустимій множені розміщень, породжуваних деякою мультимножиною $G = \{3,5,8,12\}$, що є множиною, за обмеженням $3x_1 + 2x_2 \ge 24$. Многогранник M розміщень задається системою лінійних нерівностей: $M = \{3 \le x_1 \le 12, 3 \le x_2 \le 12, 8 \le x_1 + x_2 \le 20\}$.

Роз'язання. Перший підхід. За головний вибираємо перший критерій (задача 1)

$\max f_1 = \dfrac{x_1 + x_2}{5x_1 + x_2}$ за обмежень $x \in M, -x_1 + x_2 \ge t_{\max}, 3x_1 + 2x_2 \ge 24$.

Знайдемо $\max\{-x_1 + x_2 \mid x \in M\}$, її розв'язок $(x_1 = 3, x_2 = 12)$, $t_{\max} = 9$, отже розв'язуємо задачу

$$\max\left\{ f_1 = \frac{x_1 + x_2}{5x_1 + x_2} \mid x \in M, -x_1 + x_2 \ge 9, 3x_1 + 2x_2 \ge 24 \right\}.$$

Отримали її оптимальний розв'язок: $(x_1, x_2) = (3,12)$, $f_1(x_1, x_2) = 5/9, \quad f_2(x_1, x_2) = 9, \quad F(x^*) = \begin{pmatrix} 5/9 \\ 9 \end{pmatrix}$.

Другий підхід. Знайдемо $\min\{-x_1 + x_2 \mid x \in M\}$, розв'язок $(x_1, x_2) = (12,3)$, $t_{\min} = -9$. Розглянемо наступну задачу $\max f_1 = \dfrac{x_1 + x_2}{5x_1 + x_2}$, за обмежень $x \in M, -x_1 + x_2 \ge -9$, $3x_1 + 2x_2 \ge 24$. Її оптимальний розв'язок $x_1 = 3, x_2 = 12$, $f_1(x_1, x_2) = 5/9$, $f_2(x_1, x_2) = 9$, $F(x^*) = \begin{pmatrix} 5/9 \\ 9 \end{pmatrix}$.

Задача 2. Розглянемо задачу $\max f_2 = -x_1 + x_2$, за обмежень $x \in M$, $\dfrac{x_1 + x_2}{5x_1 + x_2} \ge t_{\min}$, $3x_1 + 2x_2 \ge 24$. Оскільки $t_{\min} = \dfrac{5}{17}$ в точці $x_1 = 12, x_2 = 8$, то отримаємо обмеження $\dfrac{x_1 + x_2}{5x_1 + x_2} \ge \dfrac{5}{17}$. Очевидно, що знаменник $5x_1 + x_2 > 0$. Зробивши перетворення, отримаємо наступне обмеження $-2x_1 + 3x_2 \ge 0$. Розв'язавши цю задачу знайшли розв'язок

$$x_1^* = 3, x_2^* = 12,\ \ f_1(x_1^*, x_2^*) = 5/9,\ \ f_2(x_1^*, x_2^*) = 9, F(x_1^*, x_2^*) = \begin{pmatrix} 5/9 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Отже в обох випадках одержали один і той же ефективний розв’язок.

Висновки до розділу 5

Моделі багатокритеріальних задач з урахуванням комбінаторних властивостей області допустимих розв’язків і дробово-лінійних функцій критеріїв можуть бути успішно застосовані при розв’язанні різних практичних задач. Встановлено взаємозв’язок між багатокритеріальними задачами на комбінаторних множинах розміщень, перестановок і багатокритеріальною задачею на неперервній допустимій множині. На підставі доведених теорем, продовжуючи дослідження й розвиваючи результати попередніх робіт авторів, запропонований підхід до розв’язання векторної задачі із дробово-лінійними критеріями на допустимій множині розміщень, що полягає у зведенні пошуку розв’язків вхідної задачі до розв’язання серії скалярних (однокритеріальних) задач, перевірці оптимальності отриманих розв’язків. Методи розв’язання однокритеріальних задач ґрунтуються на ідеях декомпозиції, відтинаючих площин Келлі, релаксації. Слід зазначити, що запропоновані алгоритми є точним і їх з успіхом можна використовувати для розв’язання практичних задач, які описуються багатокритеріальними дробово-лінійними моделями на комбінаторних множинах, про що свідчить проведений обчислювальний експеримент.

РОЗДІЛ 6. ВЕКТОРНІ ЗАДАЧІ ОПТИМІЗАЦІЇ НА ПОЛІКОМБІНАТОРНИХ МНОЖИНАХ: ПОЛІЕДРАЛЬНИЙ ПІДХІД ДО ЇХ РОЗВ'ЯЗАННЯ

Інтерес до дослідження багатокритеріальних моделей дискретної оптимізації обумовлений їх широким застосуванням при розв'язанні важливих задач геометричного проектування, економіки, управління процесом обробки даних, проектування і розміщення об'єктів, планування експерименту, аналізу й оптимізації функціонування систем масового обслуговування, прийняття рішень та ін. Останнім часом в області дослідження різних класів комбінаторних моделей, розробки нових методів їх розв'язання велика увага приділяється методам, заснованим на використанні структурнх властивостей комбінаторних множин [53–55, 130–137, 141, 153–156].

Систематичне вивчення властивостей евклідових комбінаторних множин та їх дослідження описані в багатьох роботах. Поряд з добре відомими евклідовими комбінаторними множинами перестановок, розміщень, сполучень, розбиттів виділяються більш складні структури – полікомбінаторні множини [55, 154]. Підвищений інтерес до комбінаторних та полікомбінаторних конфігурацій обумовлений дослідженнями останніх років в області комп'ютерних технологій при створенні сучасних алгоритмів і програм для розв'язування оптимізаційних задач. Слід зазначити, що задачі евклідової комбінаторної оптимізації на полікомбінаторних множинах невід'ємно пов'язані з комбінаторними многогранниками, що є опуклими оболонками таких множин, і їх властивостями. Властивості поліпереставного многогранника дають можливість, як в випадку переставного многогранника, звести розв'язання задач на дискретних комбінаторних множинах до їх розв'язання на неперервній допустимій множині, отже виникає можливість застосовувати класичні методи неперервної оптимізації до розв'язання векторних комбінаторних задач на різних полікомбінаторних множинах, а також розвивати нові оригінальні методи їх розв'язання, використовуючи властивості полікомбінаторних множин і їх опуклих оболонок.

В даному розділі представлені дослідження багатокритеріальних задач на полікомбінаторних множинах перестановок, розміщень, відображені в роботах [132–134]. На підставі встановленого взаємозв'язку між багатокритеріальними задачами на полікомбінаторних множинах і оптимізаційними задачами на неперервній допустимій множині, встановлено деякі структурні властивості допустимої області, множин різних видів ефективних розв'язків, а також сформульовано і доведено ряд теорем про умови оптимальності ефективних розв'язків розглянутих задач. Для векторних задач на полікомбінаторних допустимих множинах запропоновані підходи до їх розв'язання.

Задамо мультимножину $A=\left\{a_1,a_2,...,a_q\right\}$, що визначається основою $S(A)=\left\{e_1,e_2,...,e_k\right\}$ і кратністю її елементів $k(e_j)=r_j,\ j\in N_k=\left\{1,2,...,k\right\},\ r_1+r_2+...+r_k=q$.

Представимо деяку множину натуральних чисел N_n у вигляді упорядкованого розбиття на s непорожніх підмножин $N_1,...,N_s$, які не перетинаються, а отже для яких виконуються умови: $N_i\cap N_j=\varnothing$, $N_i\neq\varnothing$, $N_j\neq\varnothing$, $\forall i,j\in N_s$. Позначимо H – множину всіх елементів вигляду: $\pi=(\pi(1),...,\pi(n))=(\pi^1,...,\pi^s)$, де π^i – довільна перестановка елементів множини $N_i\ \forall i\in N_s$.

Нехай підмультимножина A^{N_i} мультимножини A, складається з тих елементів A, номери яких належать множині N_i: $A^{N_i}=\{a_1^{N_i},...,a_{k_i}^{N_i}\},\left|N_i\right|=n_i$.

Означення 6.1. Множину
$P_{nk}^s(A,H)=\left\{(a_{\pi(1)},...,a_{\pi(n)})\middle|a_{\pi(i)}\in A\ \forall i\in N_n,\ \forall\pi\in H\right\}$ називають загальною множиною поліперестановок.

Не втрачаючи загальності, упорядкуємо елементи мультимножини A за неспаданням: $a_1\leq a_2\leq\ldots\leq a_n$, що буде справедливим і для підмультимножин з A.

6.1. Структурні властивості множини ефективних розв'язків

Як відомо, комбінаторні множини набувають цікавих властивостей при зануренні в арифметичний евклідів простір. Ці властивості, з одного боку дозволяють запропонувати оригінальні підходи до розв'язання відповідних оптимізаційних задач. З іншого боку, використання властивостей занурених комбінаторних множин можуть підвищити ефективність традиційних методів комбінаторної оптимізації. Будемо розглядати згідно [153], елементи множини поліперестановок як точки арифметичного евклідового простору R^n.

У монографіях [55, 153] показано, що опуклою оболонкою множини поліперестановок є поліпереставний многогранник

$\Pi_{nk}^{s}(A,H)=\operatorname{conv}P_{nk}^{s}(A,H),$ множиною вершин якого є множина $P_{nk}^{s}(A,H)$ поліперестановок: $\operatorname{vert}\Pi_{nk}^{s}(A,H)=P_{nk}^{s}(A,H)$.

Теорема 6.1. Множина $\Pi_{nk}^{s}(A,H)$ визначається сукупністю всіх розв'язків системи

$$\begin{cases} \sum\limits_{j\in N_i'} x_j = \sum\limits_{j=1}^{k_i} a_j^{N_i}, \forall i\in N_s, & (6.1) \\ \sum\limits_{j\in\omega^i} x_j \ge \sum\limits_{j=1}^{|\omega^i|} a_j^{N_i}, \forall\omega^i\subset N_i', \forall i\in N_S, & (6.2) \end{cases}$$

де $a_j^{N_i}\in A^{N_i}$, $N_i'=\left\{\left(\sum\limits_{j=1}^{i-1}k_j\right)+1,\left(\sum\limits_{j=1}^{i-1}k_j\right)+2,\ldots,\left(\sum\limits_{j=1}^{i}k_j\right)\right\}\ \forall j\in N_S$.

Многогранник $\Pi_{nk}^{s}(A,H)$ будемо називати загальним многогранником евклідової множини поліперестановок. Розглянемо деякі його властивості та його зв'язок з загальною множиною поліперестановок.

Означення 6.2. Під добутком многогранників $M_1,\ldots,M_S$ розуміють множину $\bigotimes\limits_{i=1}^{S} M_i=\left\{x\in R^{d_1+\ldots+d_S}\mid x=(x_1,\ldots,x_S),\ x_i\in M_i\ \ \forall i\in N_S\right\}$, де M_i є d_i– вимірним многогранником $\forall i\in N_S$.

Скористаємося наступною лемою [45].

Лема 6.1. Добутком многогранників є многогранник.

2. $\dim(\bigotimes\limits_{i=1}^{S} M_i)=\sum\limits_{i=1}^{S}\dim M_i$, де $\dim A$ – вимірність множини A.

3. k-вимірні грані многогранника $\bigotimes\limits_{i=1}^{S} M_i$ утворюють множину з елементами вигляду $\bigotimes\limits_{i=1}^{S} F_i$, де F_i – k_i-вимірна грань многогранника M_i та $k_1+\ldots+k_S=k$.

Справедливі наступні теореми [153].

Теорема 6.2. $\varPi_{nk}^{s}(A,H)=\overset{S}{\underset{i=1}{\otimes}}\varPi_{n_i k_i}(A^{N_i})$.

Теорема 6.3. Множина $P_{nk}^{s}(A,H)$ збігається з множиною вершин многогранника $\varPi_{nk}^{s}(A,H)$.

Теорема 6.4. Вершина $f_4(x)$ є суміжною до вершини $(x_1,\mu_1(x_1))$ тоді і тільки тоді, коли $a(\sigma)$ утворюється з $a(\pi)$ переставленням двох нерівних одна одній компонент – $a_i^{N_i}$ та $a_{i+1}^{N_i}$, $j\in N_{n_i-1}$, $i\in N_S$.

6.2. Постановка задачі та умови оптимальності множин ефективних розв'язків

Розглядаються багатокритеріальні комбінаторні задачі вигляду:

$$Z(\Phi,P_{nk}^{s}(A,H)):\quad \max\left\{\Phi(a)\,|\,a\in P_{nk}^{s}(A,H)\right\},$$

що полягають в максимізації векторного критерію $\Phi(a)$ на евклідовій комбінаторній множині поліперестановок $P_{nk}^{s}(A,H)$, де $\Phi(a)=(\Phi_1(a),\Phi_2(a),...,\Phi_l(a))$, $\Phi_i:R^n\to R^1, i\in N_l$.

При відображенні φ множини поліперестановок $P_{nk}^{s}(A,H)$ в евклідів простір R^n сформулюємо задачу $Z(F,X)$ максимізації деякого векторного критерію $F(x)$ на множині X, причому кожній точці $a\in P_{nk}^{s}(A,H)$ буде відповідати точка $x\in X$, така, що $F(x)=\Phi(a)$.

$$Z(F,X):\max\left\{F(x)\,|\,x\in X\right\},$$

де $F(x)=(f_1(x),f_2(x),...,f_l(x))$, відповідає функціоналу $\Phi_i(a)$, $f_i:R^n\to R^1, i\in N_l$, $X-$ непорожня множина в R^n, що визначається наступним чином: $X=\operatorname{vert}\Pi_{nk}^{s}(A,H)$, $\Pi_{nk}^{s}(A,H)=\operatorname{conv}P_{nk}^{s}(A,H)$. Під відповідністю векторної функції F вектору функціоналів Φ будемо розуміти співвідношення: $\Phi(a)=F(\varphi(a))\quad\forall a\in P_{nk}^{s}(A,H)$.

Задача $Z(F,X)$ може містити також додаткові лінійні обмеження, що утворюють опуклу многогранну множину $D\subset R^n$ вигляду:

$D = \{x \in R^n \mid B\tilde{o} \le d\}$, де $d \in R^m$, $B \in R^{m \times n}$. Отже, допустима множина має вигляд: $X = \mathrm{vert}\, \Pi_{nk}^{s}(A,H) \bigcap D$.

Векторний критерій $F(x)$, що упорядковує допустиму множину, використовується для вибору оптимальних розв'язків. Уточнення принципів вибору у разі рівноважливості критеріїв приводить до понять Парето-оптимальності, слабої та строгої ефективності.

Таким чином, під розв'язанням задачі $Z(F,X)$ будемо розуміти знаходження деякої підмножини множини $Sl(F,X)$ – оптимальних за Слейтером (слабо ефективних) розв'язків. Як завжди мова йтиме про пошук елементів наступних множин: $P(F,X)$ – множини Парето-оптимальних (ефективних розв'язків), $Sm(F,X)$ – оптимальних за Смейлом (строго ефективних) розв'язків.

Згідно означень різних типів оптимальних розв'язків [81, 144] для будь-якого $x \in X$ справедливі твердження:

$$x \in Sl(F,X) \Leftrightarrow \{y \in X \mid F(y) > F(x)\} = \varnothing, \tag{6.3}$$

$$x \in P(F,X) \Leftrightarrow \{y \in X \mid F(y) \ge F(x), F(y) \ne F(x)\} = \varnothing, \tag{6.4}$$

$$x \in Sm(F,X) \Leftrightarrow \{y \in X \mid y \ne x, F(y) \ge F(x)\} = \varnothing, \tag{6.5}$$

$$Sm(F,X) \subset P(F,X) \subset Sl(F,X). \tag{6.6}$$

Непорожність і зовнішня стійкість множини $P(F,X)$ Парето-оптимальних розв'язків забезпечується обмеженістю допустимої області X. Отже $\forall y \in X \quad \exists\, x \in P(F,X) : F(x) \ge F(y)$. У випадку нескінченності мультимножини A питання про існування елементів множини $P(F,X)$ вимагає окремого дослідження.

Теорема 6.5. Елементи множин строго ефективних, Парето-оптимальних, слабо ефективних розв'язків багатокритеріальної комбінаторної задачі вигляду $Z(F,X)$, визначеній на допустимій множині поліперестановок, знаходяться у вершинах поліпереставного многогранника $\Pi_{nk}^{s}(A,H)$.

Доведення. Враховуючи співвідношення (6.6) між множинами ефективних розв'язків, а також згідно з теоремою 6.3 і того факту, що множина допустимих розв'язків X є підмножиною множини вершин загального поліпереставного многогранника $\Pi^s_{nk}(A,H)$, тобто $P^s_{nk}(A,H) = \operatorname{vert}\Pi^s_{nk}(A,H)$, приходимо до справедливості включень: $Sm(F,X) \subset P(F,X) \subset Sl(F,X) \subset \operatorname{vert}\Pi^s_{nk}(A,H)$. Теорему доведено.

Розглянемо випадок лінійності функцій $f_i(x), i \in N_l$, векторного критерію $F(x)$, $f_i(x) = \langle c_i, x\rangle, i \in N_l$. Структурні властивості допустимої області X і множин різних видів ефективних розв'язків, зазначені в теоремі 6.5, а також лінійність функцій векторного критерію дозволяють звести розв'язання задачі $Z(F,X)$ до знаходження розв'язків на неперервній допустимій множині $G = \Pi^s_{nk}(A,H) \cap D$ задачі $Z(F,G)$.

Многогранник $\Pi^s_{nk}(A,H)$ представимо в вигляді системи лінійних нерівностей $\Pi^s_{nk}(A,H) = \{x \in R^n \,|\, \langle \pi_i, x\rangle \le \gamma_i, i \in N_p\}$, звівши всі нерівності, що його описують, до одного вигляду $(\le)$. Позначимо $C \in R^{n\times l}$ матрицю, вектор-рядки c_i, $i \in N_l$, якої містять коефіцієнти лінійних векторних критеріїв $f_i(x), i \in N_l$. Введемо до розгляду конус $K = \left\{x \in R^n \,\middle|\, Cx \ge 0\right\}$ перспективних напрямків [144] задачі $Z(F,X)$, а також опуклі замкнуті конуси $0^+\Pi(y) = \left\{x \in R^n \mid \pi_i x \le 0, i \in N(y)\right\}$, які можуть бути побудовані в будь-якій вершині $y \in \operatorname{vert}\Pi^s_{nk}(A,H)$. Тут $N(y) = \left\{i \in N_q \mid \pi_i y = \gamma_i\right\}$ – множина номерів активни обмежень в точці y. Очевидно, що $N(y) \ne \varnothing$, $X \subseteq y + 0^+\Pi(y)$. Позначимо $K_0 = \left\{x \in R^n \,\middle|\, Cx = 0\right\}$ – ядро лінійного відображення $C : R^n \to R^l$, $\operatorname{int} K = \left\{x \in R^n \,\middle|\, Cx > 0\right\}$ – внутрішність конуса K. Згідно [81] з формул (6.3) – (6.5) випливає $\forall x \in X$ справедливість тверджень

$$x \in Sl(C,X) \Leftrightarrow (x + \operatorname{int} K) \cap X = \varnothing, \tag{6.7}$$

$$x \in P(C,X) \Leftrightarrow x + (K \setminus K_0) \cap X = \varnothing, \tag{6.8}$$

$$x \in Sm(C,X) \Leftrightarrow (x + K) \bigcap X \setminus \{x\} = \varnothing. \tag{6.9}$$

Справедливі наступні теореми.

Теорема 6.6. $P(F,G)\bigcap \operatorname{vert}\Pi_{nk}^{s}(A,H)\subset P(F,X)$,

$Sl(F,G)\bigcap \operatorname{vert}\Pi_{nk}^{s}(A,H)\subset Sl(F,X)$,

$Sm(F,G)\bigcap \operatorname{vert}\Pi_{nk}^{s}(A,H)\subset Sm(F,X)$.

Доведення. Оскільки $\operatorname{vert}\Pi_{nk}^{s}(A,H)\bigcap D\subset G$, то

$$P(F,G)\bigcap \operatorname{vert}\Pi_{nk}^{s}(A,H)\bigcap D\subset P(F,G\bigcap \operatorname{vert}\Pi_{nk}^{s}(A,H)\bigcap D)=P(F,X).$$

Аналогічно можна довести співвідношення

$$Sl(F,X)=Sl(F,\operatorname{vert}\Pi_{nk}^{s}(A,H)\bigcap D)\supset Sl(F,G)\bigcap \operatorname{vert}\Pi_{nk}^{s}(A,H)\bigcap D,$$

$$Sm(F,X)=Sm(F,D\bigcap \operatorname{vert}\Pi_{nk}^{s}(A,H))\supset Sm(F,G)\bigcap \operatorname{vert}\Pi_{nk}^{s}(A,H).$$

Теорема 6.7. Якщо допустима множина X задачі $Z(F,X)$ не містить обмежень, що описують опуклу многогранну множину D, або $\Pi_{nk}^{s}(A,H)\subseteq D$, тобто $X=\Pi_{nk}^{s}(A,H)$, то $\forall x\in R^{n}$ справедливі твердження:

$x\in Sl(F,X)\Leftrightarrow x\in Sl(F,\Pi_{nk}^{s}(A,H))\bigcap \operatorname{vert}\Pi_{nk}^{s}(A,H)$,

$x\in P(F,X)\Leftrightarrow x\in P(F,\Pi_{nk}^{s}(A,H))\bigcap \operatorname{vert}\Pi_{nk}^{s}(A,H)$,

$x\in Sm(F,X)\Leftrightarrow x\in Sm(F,\Pi_{nk}^{s}(A,H))\bigcap \operatorname{vert}\Pi_{nk}^{s}(A,H)$,

Доведення. Із умов цієї теореми і теореми 6.6, випливає, що $\forall\, x\in R^{n}$ справедливі висловлення:

$x\in Sl(F,\Pi_{nk}^{s}(A,H))\bigcap \operatorname{vert}\Pi_{nk}^{s}(A,H)\Rightarrow x\in Sl(F,X)$.

$x\in P(F,\Pi_{nk}^{s}(A,H))\bigcap \operatorname{vert}\Pi_{nk}^{s}(A,H)\Rightarrow x\in P(F,X)$,

$x\in Sm(F,\Pi_{nk}^{s}(A,H))\bigcap \operatorname{vert}\Pi_{nk}^{s}(A,H)\Rightarrow x\in Sm(F,X)$.

Доведемо зворотні імплікації. Нехай $x\in Sl(F,X)$, тоді згідно до теореми 6.5 $x\in\Pi_{nk}^{s}(A,H)$. Припустимо, від супротивного, що

$x \notin Sl(F, \Pi_{nk}^{s}(A,H))$. З огляду на лінійність функцій $f_i(x), i \in N_l$, векторного критерію $F(x)$ відповідно до теореми 5 із [81] отримаємо виконання умови $\operatorname{int} K \bigcap (\Pi(x) - x) \neq \varnothing,$ тобто в конусі $(x + \operatorname{int} K)$ лежать деякі точки границі многогранника $\Pi_{nk}^{s}(A,H)$, отже існує точка, що належить цьому конусу. Останнє в силу формули (6.7) означає, що $x \notin Sl(F, X)$, а це приводить до протиріччя з умовою теореми.

Інші твердження даної теореми доводяться аналогічно.

Наслідок 6.1. За умов теореми 6.7 справедливі рівності

$$Sl(F, \Pi_{nk}^{s}(A,H)) \bigcap \operatorname{vert} \Pi_{nk}^{s}(A,H) = Sl(F, X),$$

$$P(F, \Pi_{nk}^{s}(A,H)) \bigcap \operatorname{vert} \Pi_{nk}^{s}(A,H) = P(F, X),$$

$$Sm(F, \Pi_{nk}^{s}(A,H)) \bigcap \operatorname{vert} \Pi_{nk}^{s}(A,H) = Sm(F, X).$$

Якщо в задачі $Z(F, X)$ допустима область $X = \Pi_{nk}^{s}(A,H)$, то для будь-якої точки $x \in \operatorname{vert} \Pi_{nk}^{s}(A,H)$ справедливі необхідні і достатні умови оптимальності всіх указаних вище видів ефективних розв'язків, отримані в роботі [81]. Якщо допустима область X задачі $Z(F, X)$ містить додаткові обмеження, що описують опуклий многогранник D, тобто $X = \operatorname{vert} \Pi_{nk}^{s}(A,H) \bigcap D$ і $\Pi_{nk}^{s}(A,H) \bigcap D \neq \Pi_{nk}^{s}(A,H)$, то виконуються лише достатні умови оптимальності розв'язків.

Теорема 6.8. Для будь-якої вершини x опуклого многогранника $\Pi_{nk}^{s}(A,H)$ справедливі твердження:

$$x \in P(F, \Pi_{nk}^{s}(A,H)) \bigcap D \Rightarrow x \in P(F, X),$$

$$x \in Sl(F, \Pi_{nk}^{s}(A,H)) \bigcap D \Rightarrow x \in Sl(F, X),$$

$$x \in Sm(F, \Pi_{nk}^{s}(A,H)) \bigcap D \Rightarrow x \in Sm(F, X).$$

Доведення. Оскільки $G = \Pi_{nk}^{s}(A,H) \bigcap D$, то $\forall x \in \operatorname{vert} \Pi_{nk}^{s}(A,H)$ справедливі імплікації $x \in P(F, \Pi_{nk}^{s}(A,H)) \bigcap D \Rightarrow$

$$\Rightarrow x \in P(F, \Pi_{nk}^{s}(A,H) \bigcap D) = P(F, G) \Rightarrow x \in P(F, X),$$

$$x \in Sl(F, \Pi_{nk}^{s}(A,H)) \bigcap D \Rightarrow x \in Sl(F, X),$$

$$x \in Sm(F, \Pi_{nk}^{s}(A,H)) \bigcap D \Rightarrow x \in Sm(F, X).$$

Таким чином, теореми 6.5 – 6.8 встановлюють взаємозв'язок між задачею $Z(F, X)$ і задачею $Z(F, G)$, що визначена на неперервній допустимій множині. Це дає можливість застосовувати класичні методи неперервної оптимізації до розв'язання векторних комбінаторних задач на множинах поліперестановок.

При виконанні лише необхідних умов оптимальності розглянутого розв'язку гарантувати його ефективність не можна, однак, якщо ці умови не виконуються, то даний розв'язок не ефективний. Достатні умови встановлюють ефективність. У разі їх невиконання питання ефективності розв'язків залишається відкритим. Застосування необхідних і достатніх умов питання вирішує однозначно: розв'язок ефективний тоді і тільки тоді, коли він задовольняє цим умовам.

Аналізуючи теореми 6.6 і 6.8, приходимо до співвідношень, що існують між задачами $Z(F, X)$ і $Z(F, G)$: якщо виконується включення $x \in R(F, G) \bigcap \operatorname{vert} \Pi_{nk}^{s}(A,H)$, то $x \in R(F, X)$, якщо $x \notin R(F, G) \bigcap \operatorname{vert} \Pi_{nk}^{s}(A,H)$, то з цього не випливає, що $x \notin R(F, X)$, де $R(F, X)$ означає множину $P(F, X)$, $Sm(F, X)$ або $Sl(F, X)$.

Якщо задача $Z(F, X)$ не містить лінійних обмежень, що утворюють опуклу многогранну множину $D \subset R^{n}$, або $\Pi \subseteq D$, тобто $X = \operatorname{vert} \Pi$, то з врахування необхідних і достатніх умов оптимальності (теорема 6.7) процес її розв'язання зводиться до пошуку ефективних розв'язків задачі $Z(F, G)$ на неперервній допустимій множині $G = \Pi_{nk}^{s}(A,H)$ з наступним вибором з них лише тих, які є вершинами поліперестановного многогранника $\Pi_{nk}^{s}(A,H)$.

6.3. Загальний підхід до розв'язування векторних задач на комбінаторній множині поліперестановок

Якщо задача $Z(F, X)$ містить додаткові лінійні обмеження, то пропонується наступний підхід до її розв'язання:

1. Знаходимо ефективні розв'язки задачі $Z(F, \Pi_{nk}^{s}(A,H))$.

2. Перевіряємо їх на належність множині D. Якщо виконується включення $x \in P(F, \Pi_{nk}^{s}(A,H)) \bigcap D$, то $x \in P(F, X)$.

3. Розглянемо допустимі розв'язки $x \in X$ задачі $Z(F,X)$, які не є Парето-оптимальними, тобто $x \in X \setminus \left(P(F, \Pi_{nk}^{s}(A,H)) \bigcap D \right)$ і перевіряємо їх на ефективність. Для цього скористаємося необхідними і достатніми умовами, сформульованими в [113].

Твердження 6.1. Допустимий розв'язок x^0 ефективний тоді і тільки тоді, коли він є оптимальним розв'язком задачі

$$Z^1(F,X): \max\left\{ \sum_{i=1}^{l} f_i(x) \mid x \in X,\ f_i(x) \ge f_i(x^0), i \in N_l \right\}.$$

Якщо розв'язок x^0 не ефективний, то в результаті розв'язання цієї задачі знаходимо ефективний розв'язок x^*, який домінує над x^0, тобто $F(x^*) \ge F(x^0)$.

Розвиваючи результати попередніх робіт авторів, у даному розділі запропоновано і обґрунтовано підхід [131, 132] до розв'язання задачі $Z(F,X)$, оснований на розвитку методу головного критерію для розглядуваного класу векторних задач. Метод розв'язання однокритеріальних задач ґрунтується на ідеях декомпозиції відтинаючих площин Келлі, релаксації, при реалізації якого враховується той факт, що число обмежень досить велике.

При розробці методу на початковому етапі необхідно визначити початковий розв'язок.

Розглянемо однокритеріальну задачу без обмежень, що описують многогранник D.

Твердження 6.2. Якщо елементи мультимножини A упорядковані за неспаданням і для коефіцієнтів c_j, $j \in N_n$, цільової функції задачі

$$\operatorname{extr}\left\{ f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \mid x \in \operatorname{vert} \Pi_{nk}^{s}(A,H) \right\}$$ виконується умова

$c_{i_1} \le c_{i_2} \le \ldots \le c_{i_n}$, $i_n \in N_n$, які завжди можна упорядкувати, то максимум функції $f(x)$ на допустимій множині досягається в точці $x^* = (x_{i_1}^*, \ldots, x_{i_n}^*) \in \operatorname{vert} \Pi_{nk}^{s}(A,H)$, що визначається таким чином

$$x_{i_j}^* = a_j \ \forall\ j \in N_n, \tag{6.10}$$

а мінімум – відповідно в точці $y = (y_{i_1}, y_{i_2}, ..., y_{i_n})$, де

$$y_{i_{j+1}} = a_{n-j} \ \forall \ j \in N_{n-1} \cup \{0\}.$$

Справедливість даного твердження випливає з того факту, що найбільше значення суми попарних добутків досягається при зіставленні зростаючих послідовностей значень c_i і x_i, а найменше значення суми, відповідно досягається при зіставленні зростаючої послідовності значень c_i зі спадною послідовністю значень y_i.

При побудові методу розв'язання багатокритеріальної задачі $Z(F, X)$ варто враховувати структурні особливості її допустимої області.

Для розглянутого класу векторних задач на комбінаторній множині поліперестановок пропонується метод головного критерію. Він полягає в тому, що вхідна багатокритеріальна задача зводиться до задачі оптимізації за одним критерієм $f_r(x), r \in N_l$, що оголошується головним або основним, за умови, що значення всіх інших критеріїв повинні бути не менше деяких установлених величин (граничних значень) $t_i, i \in N_l \setminus \{r\}$. Таким чином, маємо задачу

$$Z(f_r, X(t_i)): \max\left\{ f_r(x) \middle| f_i(x) \ge t_i, i \in \left(N_l \setminus \{r\}\right), x \in X \right\}.$$

Оптимальний розв'язок x^0 цієї задачі завжди є слабо ефективним, а якщо він єдиний (з точністю до еквівалентності $\square\, f$), то є і ефективним. Якщо розв'язок x^0 ефективний, то він є єдиним (з точністю до еквівалентності $\square_f$) розв'язком задачі $Z(f_r, X(t_i))$ при будь-якому фіксованому $r \in N_l$ й $t_i = f_i(x^0)$, $i \in \left(N_l \setminus \{r\}\right)$. Для визначення граничних значень t_i, $i \in N_l \setminus \{r\}$, можна скористатися твердженням 6.2, що дає можливість для встановлення верхніх і нижніх границь значень критеріїв $f_i(x)$, $i \in N_l$, на множині поліперестановок.

Можна призначати порогам t_i, $i \in N_l \setminus \{r\}$ максимально можливі значення критеріїв $f_i(x)$, $i \in N_l$ на множині поліперестановок з наступним розширенням допустимої множини задачі $Z(f_r, X(t_i))$, якщо вхідна задача виявиться недопустимою, або ж призначати мінімальне значення критеріїв $f_i(x)$, $i \in N_l$, при яких вона буде завжди допустима, з наступним звуженням допустимої області за допомогою вибору значень порогів $t_i, i \in \left(N_l \setminus \{r\}\right)$, упорядкованих за зростанням, що випливають за мінімальними значеннями критеріїв.

Процедура призначення (визначення) серії граничних величин t_i, $i \in \left(N_l \setminus \{r\}\right)$, обмежень і у першому, і в другому випадку досить проста, оскільки, використовуючи твердження 6.2, вона зводиться після впорядкування коефіцієнтів критеріїв, до обчислення скалярного добутку двох векторів, тобто до визначення значень лінійних функцій критеріїв. При цьому, з огляду на структурні особливості множини поліперестановок, величини t_i можна обчислювати більш ефективно, використовуючи перестановки елементів кожної i-ї, $i \in N_s$, підмножини мультимножини A.

Для опису й обґрунтування методу розв'язання задачі введемо наступні позначення. Допустиму область задачі $Z(F,G)$ запишемо у вигляді $G = \{x \in R^n \mid Hx \le g\}$, $g = (g_1, g_2, ..., g_u)$, $H \in R^{u \times n}$, H – матриця, що використається для матрично-векторної форми запису обмежень виду (6.1), (6.2) і лінійних нерівностей, що описують многогранник D, де всі обмеження зведені до одному ($\le$) вигляду нерівностей. Позначимо N_u множину, елементи якої визначають номера обмежень системи (6.1), (6.2) і додаткових обмежень, що описують опуклу многогранну множину D: $N_u = \{1, 2, ..., 2^n + m\}$.

З огляду на те, що число обмежень, які описують допустиму область задачі досить велике, в запропонованому методі використовуються процедури релаксації, тобто тимчасового відкидання деяких обмежень і розв'язання задачі на більше широкій області.

Визначимо множини $G_i = \{x \in R^n \left| \langle h_i, x \rangle \le g_i\}, i \in N_u\right.$; для довільного $x^\nu \in R^n$ визначимо множини $N^a(x^\nu) = \{i \in N_u \left| \left\langle h_i, x^\nu \right\rangle = g_i \}\right.$ й $N^n(x^\nu) = \{j \in N_u \left| \left\langle h_j, x^\nu \right\rangle < g_j \}\right.$ – відповідно активних і неактивних обмежень у точці x^ν; $h_i \in R^n$, $g_i \in R$, $i \in N_u$ – відповідно i-й вектор-рядок матриці H й i-а компонента вектора g.

Розглянемо задачу

$$Z(F, G^\nu): \max\left\{F(x) \mid x \in G^\nu\right\},$$

де $G^\nu = \left\{x \in R^n \left| \langle h_i, x \rangle \le g_i, i \in Q_\nu \subset N_u \right.\right\}$, Q_ν – множина індексів обмежень, що описують допустиму область задачі $Z(F,G^{\nu})$, яка розв'язується на ν-му кроці алгоритму, $Q_{\nu}=N_u \setminus R_{\nu}$, R_{ν} – множина номерів обмежень, які не були включені в цю задачу на ν-му кроці.

Означення 6.2. Величина $r_i(x)=\langle h_i,x\rangle-g_i$, $i\in N_u$, називається відхиленням точки $x\in R^n$ від границі множини G_i, а величина $r(x)=\max\{r_i(x)\mid i\in N_u\}$ називається відхиленням точки $x\in R^n$ від границі множини G.

Очевидно, що для $i\in N_p$

$$r_i(x)=\sum_{j=1}^{i} x_{\alpha_j}-\sum_{j=1}^{i} a_j^i \ , \tag{6.11}$$

а для $i\in\left(N_u \setminus N_p\right)$

$$r_i(x)=\langle b_i,x\rangle-d_i \, , \tag{6.12}$$

де b_i – i-ий вектор-рядок матриці B, $d_i\in R$.

Із означення $r(x)$ і побудови допустимої області задачі $Z(F,X)$ випливає справедливість того, що ефективний (Парето-оптимальний, слабо, строго ефективний) розв'язок x^0 задачі $Z(F,G^{\nu})$ є ефективним у тому ж розумінні розв'язком задачі $Z(F,G)$ тоді й тільки тоді, коли виконується умова $r(x)\le 0$.

Основна ідея запропонованого методу розв'язання задачі $Z(F,X)$ полягає в наступному.

1. Виберемо головний критерій задачі $Z(F,G)$. Вважаємо що $\nu=0$.

2. Сформуємо обмеження початкової системи, що визначає область $G^{\nu}\subset G$, розв'язуємо задачу $Z(f,G^{\nu})$ за допомогою симплекс-методу і знаходимо оптимальний розв'язок x^{ν}.

3. Якщо отриманий оптимальний розв'язок є поліперестановкою, тобто вершиною поліпереставного многогранника, то в знайденій точці x^{ν} перевіряємо виконання обмежень, які не були враховані. Очевидно, ними можуть бути лише ті обмеження, які описують опуклу многогранну множину *D*. Якщо розв'язок x^{ν} не задовольняє цим обмеженням, то варто додати до обмежень допустимої області задачі

$Z(f, G^{\nu})$ найбільш порушене з обмежень многогранної множини *D*. Якщо розв'язок x^{ν} задовольняє зазначеним обмеженням, то він є ефективним розв'язком задачі $Z(F, G)$ а, отже, й задачі $Z(F, X)$.

4. Якщо отриманий розв'язок x^{ν} не є поліперестановкою, то будуємо відсікання, що проходить через суміжні вершини і відтинає цю вершину, яка недопустима. Додаємо побудоване відсікання до обмежень задачі $Z(f, G^{\nu})$.

5. Порівнюємо значення $f(x^{\nu})$ зі значенням цільової функції, знайденим на попередньому кроці. Якщо воно зменшується, то відкидаємо неактивні (несуттєві) обмеження в точці x^{ν}. Якщо значення $f(x^{\nu})$ не змінюється, то обмеження не відкидаємо. Змінивши допустиму область задачі $Z(f, G^{\nu})$ переходимо до пункту 2 для розв'язання цієї задачі.

Та обставина, що жодне з обмежень не відкидається, якщо $f(x^{\nu})$ залишається рівним попередньому значенню, гарантує, що розв'язується тільки скінченне число задач вигляду $Z(f, G^{\nu})$.

Загальна ідея запропонованого методу полягає в послідовному включенні обмежень задачі, що описують область допустимих розв'язків та відкиданні неактивних обмежень.

Для розв'язання задачі $Z(F, X)$ необхідно врахувати на початковому етапі лише частину обмежень, які визначають область X. Оскільки визначення ефективних розв'язків задачі $Z(F, X)$ є більше важливим, ніж побудова всієї множини обмежень, яка описує допустиму область G, тому досить побудувати тільки ті обмеження множини G, які визначають ефективні розв'язки даної задачі. Розглянутий тут метод призначений для одержання таких обмежень.

Реалізація методу у вигляді алгоритму описана нижче.

Для перевірки належності точок множині поліперестановок $P_{nk}^{s}(A, H)$ доцільно скористатися наступною теоремою [153].

Теорема 6.9. Якщо $x = (x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_{n_i}})$, $\forall i \in N_S$ – точка, координати якої впорядковані таким чином $x_{\alpha_j} \le x_{\alpha_{j+1}}\ \forall j \in J_i, \forall i \in N_S$, та виконується обмеження

$$x_{\alpha_1} + x_{\alpha_2} + ... + x_{\alpha_i} \ge a_1^i + a_2^i + ... + a_i^i,\ i \in N_S,$$

що належить i-й групі нерівностей системи (6.1), (6.2), то в точці x виконуються і всі інші нерівності i-ої групи цієї системи.

Теорема дає можливість в деяких випадках при реалізації алгоритму розв'язання задачі $Z(F, X)$ мінімізувати витрати часу на перевірку належності знайденої точки комбінаторним обмеженням і зменшити кількість обмежень у вхідній системі.

6.4. Алгоритм розв'язання багатокритеріальної задачі на комбінаторній множині поліперестановок

Початковий крок.

Покладаємо $\nu = 0, \mu = 0$. Вибираємо головний критерій $f_{r^\mu}(x), r^\mu \in N_l$. На підставі твердження 6.2 призначаємо величини $t_i,\ i \in \left(N_l \setminus \{r^\mu\}\right)$, для обмежень на інші критерії. Для цього визначаємо, використовуючи твердження 6.2,

$$\max\left\{ f_i(x) = \langle c_i, x\rangle \middle| x \in vert\Pi_{n_i k_i}(A^i)\right\}, i \in \left(N_l \setminus \{r^\mu\}\right),$$

і розв'язуємо задачу $Z(f_{r^\mu}, G^\nu(t_i))$:

$$\max\left\{ f_{r^\mu}(x) = \left\langle c_{r^\mu}, x\right\rangle \middle| x \in G^\nu = R^n, f_i(x) \ge t_i, i \in \left(N_l \setminus \{r^\mu\}\right)\right\}.$$

Якщо вона допустима, то знаходимо нові значення порогів $t_i, i \in \left(N_l \setminus \left\{r^\mu\right\}\right)$ обмежень, які є наступними при впорядкуванні в порядку спадання їх значень. Так продовжуємо, доки задача $Z(f_{r^\mu}, G^\nu(t_i))$ не стане допустимою.

Надалі для простоти запису замість індексу r^μ будемо писати r.

Основна частина.

1. Вибираємо початкову точку x^ν довільним чином, як елемент загальної множини поліперестановок, або відповідно до твердження 6.2, упорядковуючи елементи вектора c_r коефіцієнтів цільової функції $f_r(x) = \langle c_r, x\rangle$. Обчислюємо значення $\overline{f}_r = f_r(x^\nu)$.

2. Точці x^ν відповідають обмеження, що описують вершину загального поліпереставного многогранника $\Pi^s_{nk}(A,H)$, де

$x^{\nu} \in \Pi^{\nu}_{nk}(A,H)$, $\Pi^{s\nu}_{nk}(A,H) \supset \Pi^{s}_{nk}(A)$. Покладаємо $Q_{\nu} = N_p$.

3. Знаходимо відхилення $r_i(x^{\nu})$ $\forall\, i \in R_{\nu} = N_q \setminus Q_s$ за формулами (6.11), (6.12).

4. Вибираємо $r(x^{\nu}) = \max\left\{ r_i\left(x^{\nu}\right) \mid i \in R_{\nu} \right\}$, і номер обмеження $i \in R_{\nu}$, при якому це відхилення досягається.

5. Перевіряємо нерівності $r(x^{\nu}) \le 0$. Якщо $r(x^{\nu}) > 0$, то переходимо до наступного пункту алгоритму, інакше – знаходимо ефективний розв'язок задачі $Z(F, X)$.

Для знаходження наступного ефективного розв'язку, переходимо до початкового кроку алгоритму, вибравши за головний інший критерій $f_{r^{\mu+1}}(x)$, $r^{\mu+1} \in \left(N_l \setminus \left\{ \bigcup_{\mu} r^{\mu} \right\} \right)$. Покладаємо $\mu = \mu + 1$.

6. Додаємо отримане обмеження з номером $i \in R_{\nu}$ до обмежень задачі $Z(f, G^{\nu})$, тобто формуємо допустиму множину підзадачі $Z\left(f, G^{\nu}\right)$ наступним чином:

$$G^{\nu+1} = G^{\nu} \cap \left\{ x \in R^n \,\middle|\, \langle h_i, x \rangle \le g_i \right\}. \qquad (6.13)$$

7. Якщо x^{ν} є елементом загальної множини поліперестановок $P^{s}_{nk}(A,H)$, то до множини $N^n(x^{\nu})$ неактивних обмежень, які виключаються із множини Q_{ν}, віднесемо всі обмеження многогранника $\Pi^{s\nu}_{nk}(A,H)$, крім тих, які визначають точку x^{ν}. Перевіряємо точку

$$f_r(x^{\nu}) < \overline{f}_r, \qquad (6.14)$$

якщо вона виконується, то визначаємо множину $N^n(x^{\nu}) \subset Q_{\nu}$, заміняємо множину Q_{ν} на $Q_{\nu} = Q_{\nu} \setminus N^n(x^{\nu})$, покладаємо $\overline{f}_r = f_r(x^{\nu})$, $\nu = \nu + 1$.

8. Розв'язуємо задачу

$$Z\left(f_r, G^{\nu}(t_i)\right) : max\left\{ f_r(x) = \langle c_r, x \rangle \,\middle|\, x \in G^{\nu},\, f_i(x) \ge t_i,\, i \in \left(N_l \setminus \{r\}\right) \right\}$$

двоїстим симплекс-методом. Якщо ця задача не має розв'язків, то нерозв'язуваною є і задача $Z(F,G)$. Інакше одержуємо оптимальний розв'язок x^{ν} цієї задачі. Якщо він не є елементом загальної множини поліперестановок $P_{nk}^{s}(A,H)$, то переходимо до п. 8. Інакше, покладаємо $Q_{\nu} = N_{p}$, переходимо до п. 3 алгоритму.

9. Знаходимо суміжні з точкою x^{ν} вершини поліперестаного многогранника та будуємо відсікання, вигляду

$$\langle h_i, x\rangle \le g_i, \tag{6.15}$$

що проходить через ці вершини і якому не задовольняє отримана точка x^{ν}. Формуємо систему обмежень, що описує множину G^{ν}, за формулою (6.13) і переходимо до п. 7 алгоритму.

Знаходження суміжної вершини поліпереставного многогранника й побудова обмеження, що відсікає точку x^{ν}, здійснюємо таким же способом, як і в [54].

Алгоритм розв'язання задачі $Z(F,X)$ з використанням другого підходу відрізняється від першого початковим кроком, на якому призначаються мінімальні значення порогам $t_i,\ i \in \left(N_l \setminus \{r\}\right)$ обмежень критеріїв $f_i(x),\ i \in N_l$. Якщо ці обмеження при знаходженні ефективного розв'язку x^{ν}, не є активними, то надалі допустима область наступних задач $Z(f_r, G^{\nu}(t_i))$ звужується за допомогою вибору серед значень порогів $t_i,\ i \in \left(N_l \setminus \{r\}\right)$, наступних, упорядкованих за зростанням значень критеріїв.

Теорема 6.10. Робота алгоритму закінчується після розв'язання скінченого числа підзадач $Z\left(f_r, G^{\nu}(t_i)\right)$ і приводить до ефективного розв'язку задачі $Z(F,X)$ або до побудови такої множини обмежень, при якій поточна підзадача $Z\left(f_r, G^{\nu}(t_i)\right)$ буде нерозв'язуваною.

Справедливість теореми випливає із скінченності множини X і того факту, що при зменшенні $f_r(x) = \max\langle c_r, x\rangle$ від одного кроку до іншого жодна підмножина не може повторитися. Оскільки ні одне обмеження не відкидається, якщо $f(x^{\nu}) = \overline{f}$, і в крайньому випадку одне або два обмеження додаються, то значення $f(x^{\nu})$ можуть залишатися постійними лише протягом скінченого числа кроків. Отже, алгоритм закінчує свою роботу за скінчене число кроків.

6.5. Поліедральний підхід до розв'язання векторних задач на комбінаторній множині полірозміщень

Новим теоретичним підходом для розв'язання важливих задач економіки, проектування складних систем, прийняття рішень в умовах невизначеності й ін. є застосування моделей і методів, що об'єднують багатокритеріальність альтернатив і різні комбінаторні властивості допустимої множини. На сьогоднішній день в області дослідження різних класів дискретних і векторних оптимізаційних задач, побудови ефективних методів їх розв'язання отримані істотні результати. Високий ступінь абстракції постановок і розв'язання оптимізаційних комбінаторних задач дозволяє використовувати їх при проектуванні технічних і програмних засобів, розв'язанні важливих задач геометричного проектування, економіки, розміщення об'єктів, керування процесом обробки даних, прийняття рішень.

Для розв'язання задач комбінаторної оптимізації розроблені різні обчислювальні методи. Одні з найбільш перспективних із них виділились в окрему область − поліедральну комбінаторику [8, 12, 14, 16, 18, 19]. Загальна ідея цих методів полягає у встановленні зв'язку екстремальних комбінаторних задач з методами лінійного програмування і виглядає таким чином: елементи допустимої множини інтерпретуються як точки евклідового простору, функції критеріїв і обмежень розглядаються як неперервні. Отже, розв'язується задача знаходження екстремуму функції на опуклій оболонці заданих точок, тобто на опуклому многограннику. Дійсно, екстремум лінійної функції на многограннику досягається в одній з вершин, яка включається в множину комбінаторних елементів, що розглядаються. Особливість розв'язування комбінаторних задач при такому зведенні полягає в тому, що при знаходженні розв'язків можна обмежуватися лише вершинами многогранника.

Останнім часом в області дослідження багатьох класів комбінаторних моделей, розробки нових методів їх розв'язання велика увага приділяється методам, заснованим на застосуванні структурних властивостей комбінаторних множин [137, 141, 147, 153, 155].

Використання інформації про структуру опуклої оболонки допустимих розв'язків, що є основою для багатьох методів, – один з найефективніших на сьогоднішній день підходів до розв'язки задач комбінаторної оптимізації. Але при розв'язанні таких задач виникають проблеми, пов'язані зі складністю математичних моделей, великим обсягом інформації й ін.

В даному підрозділі продовжується дослідження багатокритеріальних задач на комбінаторних і полікомбінаторних множинах, представлених в [54, 128–135]. На підставі встановленого взаємозв'язку між багатокритеріальними задачами на комбінаторних множинах і оптимізаційними задачами на неперервній допустимій множині вивчені деякі структурні властивості допустимої області, сформульовано і доведено ряд теорем про умови оптимальності різних видів ефективних розв'язків розглянутих задач. Для векторних задач комбінаторного типу на множині полірозміщень запропонований поліедральний підхід до їх розв'язання, заснований на ідеях методів головного критерію, відтинаючих площин, релаксації.

Нагадаємо основні поняття комбінаторної оптимізації.

Розміщенням з q елементів по n називається упорядкований набір $a=\left(a_{i_1},a_{i_2},...,a_{i_n}\right)$ з n елементів, що належать мультимножині $\grave{A}=\left\{a_1,a_2,...,a_q\right\}$. Нехай $A(q,k,n)$ − загальна комбінаторна множина n-розміщень, індукована $q>n$ елементами з мультимножини $\grave{A}$, серед елементів якої k різних. Образ множини $A(q,k,n)$ при відображенні в R^n позначимо $E(q,k,n)$. Усяка точка $x\in E(q,k,n)$ має таку властивість, що її координати приймають різні значення з мультимножини $\grave{A}$ дійсних чисел, тобто $x=(x_1,x_2,...,x_n)$, де $x_j=a_{i_j}, a_{i_j} \in A \forall i,j\in N_n$.

Подамо множину N_q у вигляді упорядкованого розбиття на s, де $s<q$, непорожніх підмножин $J_1,...,J_s$, які попарно не перетинаються тобто для них виконуються умови $J_i\cap J_j=\varnothing$, $J_i\neq\varnothing$, $J_j\neq\varnothing$, $\forall i,j\in N_s$, а також упорядковане розбиття числа n на s доданків $n_1,n_2,...,n_s$, що задовольняють умову $1\le n_i\le q_i$, $\forall i\in N_s, \left|J_i\right|=q_i$. Очевидно, що $q_1+q_2+...+q_s=q$, $n_1+n_2+...+n_s=n$. Позначимо H − множину елементів вигляду $h=(h(1),...,h(n))=(h^1,...,h^s)$, де $h(j)\in N_n$, $j\in N_n$, а h^i − довільна перестановка елементів множини J_i $\forall i\in N_s$.

Нехай підмультимножина A^i мультимножини A складається з тих елементів A, номери яких належать множині J_i : $A^i=\{a_1^i,...,a_{n_i}^i\}$, $\left|J_i\right|=n_i$.

Означення 6.3. Множину

$$A(q,k,n,s)=\left\{(a_{h(1)},...,a_{h(n)})\middle| a_{h(i)}\in A\ \forall i\in N_n,\ \forall h\in H\right\}$$

називають загальною множиною полірозміщень.

Не втрачаючи загальності, упорядкуємо елементи мультимножини A за неспаданням: $a_1\le a_2\le\ldots\le a_n$. Очевидно, що це упорядкування зберігається і для кожної підмультимножини A^i, $i\in N_s$, із A.

Розглянемо векторну задачу оптимізації

$$Z(\Phi,A(q,k,n,s)):\quad \max\{\Phi(a)\,|\,a\in A(q,k,n,s)\},$$

яка полягає в максимізації векторного критерію

$$\Phi(a)=(\Phi_1(a),\Phi_2(a),...,\Phi_l(a))\text{ , де }\Phi_i:R^n\to R^1, i\in N_l$$

на комбінаторній множині полірозміщень.

6.6. Деякі властивості опуклої оболонки допустимої множини – многогранника полірозміщень

Опуклою оболонкою множини полірозміщень $A(q,k,n,s)$ є многогранник полірозміщень $M_{qk}^{ns}(A)=\operatorname{conv}A(q,k,n,s)$, множина вершин якого є підмножиною множини полірозміщень:

$$\operatorname{vert}M_{qk}^{ns}(A)=A(q,k,n,s).$$

Теорема 6.12. Многогранник полірозміщень $M_{qk}^{ns}(A)$ визначається сукупністю всіх розв'язків наступної системи нерівностей:

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n_i}x_j\le\sum_{j=1}^{n_i}a_j^i,\ i\in N_s, & (6.16)\\ \sum_{j=1}^{m_i}x_{\alpha_j}\ge\sum_{j=1}^{m_i}a_j^i,\quad m_i\in N_{q_i-1},\alpha_j\in J_i,\forall i\in N_s, & (6.17)\end{cases}$$

$\alpha_j\ne\alpha_t,\forall j\ne t,\ \forall j,t\in J_i.$

Розглянемо деякі властивості многогранника $M_{qk}^{ns}(A)$ і його зв'язок із загальною множиною полірозміщень.

Очевидно, що із системи лінійних нерівностей (6.16), (6.17) можна виділити s підсистем лінійних нерівностей, що описують многогранники розміщень $M^{n_i}_{q_i k_i}(A^i)$, які є опуклими комбінаціями множини розміщень a_{h^i}, $i \in N_s$. Отже,

$$M^{n_i}_{q_i k_i}(A^i) = \left\{ x \in R^{n_i} \left| \sum_{j=1}^{n_i} x_j \le \sum_{j=1}^{n_i} a^i_{q_i - j}, \sum_{j=1}^{m_i} x_{\alpha_j} \ge \sum_{j=1}^{m_i} a^i_j \right. \right\},$$

$$m_i \in N_{q_i - 1}, \alpha_j \in J_i, \alpha_j \ne \alpha_t, \forall j \ne t, \forall j,t \in J_i, \forall i \in N_s.$$

Як відомо, під добутком многогранників $M_1,...,M_s$ розуміють множину $\overset{S}{\underset{i=1}{\otimes}} M_i = \left\{ x \in R^{d_1+...+d_s} \mid x = (x_1,...,x_s),\ x_i \in M_i \ \ \forall i \in N_s \right\}$, де $M_i - d_i -$ вимірний многогранник.

Відповідно до твердження 3.2 [45, с. 26] справедлива рівність

$$\overset{s}{\underset{i=1}{\otimes}} M^{n_i}_{q_i k_i}(A^i) = \left\{ x \in R^{d_1+...+d_s} \mid x = (x_1,...,x_s),\ x_i \in M^{n_i}_{q_i k_i}(A^i) \ \ \forall i \in N_s \right\},$$

тобто точка $x \in \overset{s}{\underset{i=1}{\otimes}} M^{n_i}_{q_i k_i}(A^i)$ задовольняє кожній з s підсистем системи (6.16), (6.17). Отже, можна стверджувати, що якщо a_{h^i} – вершина многогранника $M^{n_i}_{q_i k_i}(A^i)$, то $a(h) = \overset{s}{\underset{i=1}{\otimes}} a_{h^i}$, $a(h) = (a_{h^1},...,a_{h^s})$, де $a(h) \in A^{ns}_{qk}(q,k,n,s)$.

Теорема 6.13. Многогранник полірозміщень $M^{ns}_{qk}(A)$ при $n_i < q_i$ комбінаторно еквівалентний многограннику поліперестановок $\Pi^s_{qk}(A)$, що має розмірність n.

Справедливість теореми випливає з того факту, що $M^{ns}_{qk}(A) = \overset{s}{\underset{i=1}{\otimes}} M^{n_i}_{q_i k_i}(A^i)$, теореми 4.8 [45, с. 193], та означення многогранника поліперестановок [131].

Наслідок 6.2. Для числа $r_i(M^{n_i}_{q_i k_i}(A^i))$ i-вимірних граней

$(0 \le i \le n_i)$ многогранника полірозміщень $M_{q_i k_i}^{n_i}(A^i)$ справедлива формула

$$r_i(M_{q_i k_i}^{n_i}(A^i)) = \sum \frac{(n_i + 1)!}{t_1^i ! t_2^i ! \ldots t_{n_i - i + 1}^i !} \qquad \forall i \in N_{n_i},$$

де підсумовування проводиться за всіма розв'язками рівняння $t_1^i + t_2^i \ldots + t_{n_i - i + 1}^i = n_i$ в цілих додатних числах.

Оскільки множина полірозміщень є підмножиною множини розміщень $A(q,k,n,s) \subset A(q,k,n)$ $\forall i \in N_s$, то кількість елементів полірозміщень не перевершує загальну кількість елементів множини розміщень.

Твердження 6.3. Потужність A_{qk}^{ns} множини полірозміщень

$A(q,k,n,s)$ визначається величиною $A_{qk}^{ns} = |A(q,k,n,s)| = \prod_{i=1}^{s} \frac{q_i !}{(q_i - n_i)!}$.

Справедливі такі теореми [154].

Теорема 6.14. $M_{qk}^{ns}(A) = \bigotimes_{i=1}^{s} M_{q_i k_i}^{n_i}(A^i)$.

Теорема 6.16. Якщо $q_i = n_i - 1,\ i \in N_s$, то множина полірозміщень $A(q,k,n,s)$ збігається з множиною вершин многогранника $M_{qk}^{ns}(A)$.

Теорема 6.16. Вершина $a(h) \in \operatorname{vert} M_{qk}^{ns}(A)$ є суміжною з вершиною $a(z) \in \operatorname{vert} \mathrm{M}_{qk}^{ns}(A)$ тоді і тільки тоді, коли $a(z)$ утворюється з $a(h)$ перестановкою двох нерівних одна одній компонент – a_i^i і $a_j^i,\ j \in J_{q_i - 1},\ i \in N_s$.

Слід зазначити, що загальне число p лінійних нерівностей, що входять у систему (6.16), (6.17), яка описує многогранник полірозміщень $M_{qk}^{ns}(A)$, досить велике. У деяких випадках його можна зменшити.

Твердження 6.4. Якщо з n координат $x_i, i \in N_n$, точки $x \in R^n$ тільки k різних, то число нерівностей системи, що описують опуклий многогранник M_{qk}^{ns}, можна зменшити, виключивши з системи

$N = \sum_{i=1}^{s} N_i$ нерівностей, де $N_i = 1 + n_i + \sum_{j=i+1}^{n_i} C_{n_i}^{j}, i \in N_s$.

Доведення. Сукупність нерівностей підсистеми для деякої підмножини $J_i, i \in N_S$ системи (6.16), (6.17), які мають однакове значення m_i верхньої межі підсумовування, назвемо m_i-ю групою нерівностей цієї підсистеми, де $i \in N_S$. У кожну m_i-у групу входить $C_{q_i}^{m_i}$ нерівностей. Отже, загальне число нерівностей, що описують многогранник $M_{q_i k_i}^{n_i}(A^i)$, дорівнює $p_i = \sum_{i=0}^{q_i} C_{q_i}^{m_i} = 2^{q_i}$, $i \in N_S$. Оскільки з q_i координат a_j^i, $j \in J_i$, k_i різних, то з i-ї підсистеми нерівностей (6.16), (6.17) можна виключити деякі нерівності. З огляду на умови $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_q$ для будь-якого $j \in N_{m_i - 1}, m_i \le q_i, i \le N_S$, справедлива рівність $a_j^i = a_{j+1}^i$. Тому при виконанні нерівностей першої групи в системі (6.16), (6.17) будуть також справедливі нерівності другої, третьої, …, m_i-ї, $i \in N_S$, груп. Дійсно, оскільки $x_j \ge a_1^i$, $j \in J_i$, $i \in N_S$, то для кожного $m_i \in N_n$ виконується умова $\sum_{j=1}^{m_i} x_{\alpha_j} \ge m_i a_1^i$. Отже, з кожної підсистеми системи (6.16), (6.17), що описує многогранник полірозміщень $M_{qk}^{ns}(A)$, можна виключити нерівності другої, третьої, …, m_i-ї, $i \in N_S$, груп і загальне число нерівностей у m_i підсистемі буде складати $N_i = 1 + q_i + \sum_{j=i+1}^{q_i} C_{q_i}^{j}$.

Аналогічні міркування можна провести, якщо набір чисел $\left(a_1^i, a_2^i, ..., a_n^i\right)$ має властивість $a_j^i = a_{j+1}^i$ $\forall j \in N_{n_i - 1} \setminus N_{n_i - m_i}$, $i \in N_S$, то в підсистемі системи (6.16), (6.17) досить залишити тільки нерівності першої, другої, …, $(m_i - j)$-ї груп. Таким чином, число нерівностей, яке можна виключити із системи (6.16), (6.17) визначається величиною $N = \sum_{i=1}^{s} N_i$.

При відображенні множини полірозміщень $A(q,k,n,s)$ в евклідів простір R^n сформулюємо задачу $Z(F,X)$ максимізації деякого векторного критерію $F(x)$ на допустимій множині X :

$$Z(F,X):\max\left\{F(x)\,|\,x\in X\right\} .$$

Кожному елементу $a\in A(q,k,n,s)$ відповідає точка $x\in X$, така, що $F(x)=\Phi(a)$, де $F(x)=(f_1(x),f_2(x),...,f_l(x))$ $f_i:R^n\to R^1, i\in N_l$, X − непорожня множина, що визначається таким чином: $\operatorname{vert} M_{qk}^{ns}(A)\subset X\subset M_{qk}^{ns}(A)=\operatorname{conv} A(q,k,n,s)$. Нехай задача $Z(F,X)$ містить також опуклі обмеження, що утворюють замкнену опуклу множину $D\subset R^n$ вигляду $D=\{x\in R^n\,|\,g_i(x)\le 0, i\in N_m\}$. Тоді допустима множина X задовольняє співвідношенням $\operatorname{vert} M_{qk}^{ns}(A)\bigcap D\subseteq X\subseteq M_{qk}^{ns}(A)\bigcap D$.

Під розв'язком задачі $Z(F,X)$ традиційно будемо розуміти елементи таких множин: $P(F,X)$ − Парето-оптимальних, $Sl(F,X)$ − слабо ефективних, $Sm(F,X)$ − строго ефективних розв'язків.

6.7. Структурні властивості та умови оптимальності різних множин ефективних розв'язків на комбінаторній множині полірозміщень

Твердження 6.6. При $n_i=q_i-1, i\in N_s$ справедливі включення множин

$$Sm(F,X)\subset P(F,X)\subset Sl(F,X)\subset \operatorname{vert} M_{qk}^{ns}(A).$$

Многогранник $M_{qk}^{ns}(A)$ представимо у вигляді $M_{qk}^{ns}(A)=\{x\in R^n\left|\langle\pi_i,x\rangle\le\gamma_i, i\in N_p\right.\}$. Введемо до розгляду множини $N(y)=\left\{i\in N_u\left|\pi_i y=\gamma_i\right.\right\}$, $0^+Q(y)=\left\{x\in R^n\left|\pi_i x\le 0, i\in N(y)\right.\right\}$ − опуклий конус, що може бути побудований для всіх точок $y\in\operatorname{vert} M_{qk}^{ns}(A)$. Очевидно, що $N(y)\ne\varnothing$, $X\subseteq y+0^+M(y)$.

Структурні властивості допустимої області X і множин різних видів ефективних рішень, а також лінійність функцій векторного критерію дозволяють звести розв'язання задачі $Z(F,X)$ до розв'язання задачі $Z(F,G)$, визначеної на неперервній допустимій множині $G = M_{qk}^{ns}(A) \cap D.$

Для многогранника полірозміщень виконується ряд теорем, які відображають властивості множини ефективних розв'язків.

Теорема 6.17. Справедливі включення

$$P(F,G) \bigcap \operatorname{vert} M_{qk}^{ns}(A) \subset P(F,X), \quad Sl(F,G) \bigcap \operatorname{vert} M_{qk}^{ns}(A) \subset Sl(F,X),$$

$$Sm(F,G) \bigcap \operatorname{vert} M_{qk}^{ns}(A) \subset Sm(F,X).$$

Доведення. Оскільки $\operatorname{vert} M_{qk}^{ns}(A) \bigcap D \subset G,$ маємо

$$P(F,G) \bigcap \operatorname{vert} M_{qk}^{ns}(A) \bigcap D \subset P(F,G \bigcap \operatorname{vert} M_{qk}^{ns}(A) \bigcap D) \subset P(F,X).$$

Аналогічно можна довести співвідношення

$$Sm(F,X) \supset Sm(F,D \bigcap \operatorname{vert} M_{qk}^{ns}(A)) \supset Sm(F,G) \bigcap \operatorname{vert} M_{qk}^{ns}(A),$$

$$Sl(F,X) \supset Sl(F, \operatorname{vert} M_{qk}^{ns}(A) \bigcap D) \supset Sl(F,G) \bigcap \operatorname{vert} M_{qk}^{ns}(A) \ .$$

Нехай функції $f_i(x), i \in N_l$, векторного критерію $F(x)$ лінійні, $f_i(x) = \langle c_i, x \rangle, i \in N_l$, $C \in R^{n \times l}$ – матриця розмірності $n \times l$. Позначимо $K = \left\{ x \in R^n \,\middle|\, Cx \geq 0 \right\}$, $K_0 = \left\{ x \in R^n \,\middle|\, Cx = 0 \right\}$, $\operatorname{int} K = \left\{ x \in R^n \,\middle|\, Cx > 0 \right\}$ – внутрішність конуса K.

З формул (6.3) – (6.5) випливає справедливість тверджень $\forall\, x \in X$ для даної полікомбінаторної множини і справджуються умови:

$$x \in Sl\big(C, X\big) \Leftrightarrow \big(x + \operatorname{int} K\big) \cap X = \varnothing,$$

$$x \in P\big(C, X\big) \Leftrightarrow x + \big(K \setminus K_0\big) \cap X = \varnothing, \tag{6.18}$$

$$x \in Sm\big(C, X\big) \Leftrightarrow \big(x + K\big) \cap X \setminus \{x\} = \varnothing.$$

Теорема 6.18. Якщо допустима множина X задачі $Z\big(F, X\big)$ не містить обмежень, що описують опуклу многогранну множина D, або $M_{qk}^{ns}(A) \subseteq D$ та $n_i = q_i - 1, \forall i \in N_s$, тобто $X = \operatorname{vert} M_{qk}^{ns}(A)$, то $\forall x \in R^n$ справедливі рівності:

$$Sl(F, M_{qk}^{ns}(A)) \cap \operatorname{vert} M_{qk}^{ns}(A) = Sl(F, X)\,,$$

$$P(F, M_{qk}^{ns}(A)) \cap \operatorname{vert} M_{qk}^{ns}(A) = P(F, X),$$

$$Sm(F, M_{qk}^{ns}(A)) \cap \operatorname{vert} M_{qk}^{ns}(A) = Sm(F, X)\,.$$

Доведення. З теореми 6.17 і умов даної теореми випливає, що $\forall\, x \in R^n$ справедливі співвідношення:

$$x \in Sl(F, M_{qk}^{ns}(A)) \cap \operatorname{vert} M_{qk}^{ns}(A) \Rightarrow x \in Sl(F, X),$$

$$x \in P(F, M_{qk}^{ns}(A)) \cap \operatorname{vert} M_{qk}^{ns}(A) \Rightarrow x \in P(F, X),$$

$$x \in Sm(F, M_{qk}^{ns}(A)) \cap \operatorname{vert} M_{qk}^{ns}(A) \Rightarrow x \in Sm(F, X).$$

Доведемо зворотні імплікації. Нехай $x \in Sl(F, X),$ тоді відповідно до твердження 6.6, що $x \in \operatorname{vert} M_{qk}^{ns}(A)$. Припустимо від супротивного, що $x \notin Sl(F, M_{qk}^{ns}(A)).$ З огляду на лінійність функцій $f_i(x), i \in N_l$, векторного критерію $F(x)$ відповідно до теореми 5 [81] виконується умова $\operatorname{int} K \cap 0^{+} \grave{I}\ (x) \neq \varnothing$, тобто в конусі $(x + \operatorname{int} K)$ лежать деякі точки границі многогранника $M_{qk}^{ns}(A)$, отже, існує вершина $M_{qk}^{ns}(A)$, що належить цьому конусу. Останнє в силу формули (6.18) означає, що $x \notin Sl(F, X)$, і приводить до протиріччя з умовою теореми. Інші твердження даної теореми доводяться аналогічно.

Наслідок 6.3. За умов теореми 6.18 $\forall\, x \in X$ справедливі твердження:

$$x \in Sl(F, X) \Leftrightarrow x \in Sl(F, M_{qk}^{ns}(A)) \cap \operatorname{vert} M_{qk}^{ns}(A),$$

$$x \in P(F, X) \Leftrightarrow x \in P(F, M_{qk}^{ns}(A)) \cap \operatorname{vert} M_{qk}^{ns}(A),$$

$$x \in Sm(F, X) \Leftrightarrow x \in Sm(F, M_{qk}^{ns}(A)) \cap \operatorname{vert} M_{qk}^{ns}(A).$$

Якщо в задачі допустима область $X = \operatorname{vert} M_{qk}^{ns}(A)$, то для будь-якої точки $x \in \operatorname{vert} M_{qk}^{ns}(A)$ задачі $Z(F, X)$ справедливі необхідні і достатні умови оптимальності всіх зазначених вище видів ефективних розв'язків, отримані в [128]. Якщо $M_{qk}^{ns}(A) \bigcap D \neq M_{qk}^{ns}(A)$, то справедливі лише достатні умови оптимальності розв'язків.

Теорема 6.19. Для довільної вершини x многогранника полірозміщень $M_{qk}^{ns}(A)$ справедлива імплікація

$$x \in P(F, M_{qk}^{ns}(A)) \bigcap D \Rightarrow x \in P(F, X),$$

$$x \in Sl(F, M_{qk}^{ns}(A)) \bigcap D \Rightarrow x \in Sl(F, X),$$

$$x \in Sm(F, M_{qk}^{ns}(A)) \bigcap D \Rightarrow x \in Sm(F, X).$$

Доведення. Оскільки $G = M \bigcap D$, то справедливі імплікації $\forall x \in \operatorname{vert} M_{qk}^{ns}(A) : x \in P(F, M_{qk}^{ns}(A)) \bigcap D$

$$\Rightarrow x \in P(F, M_{qk}^{ns}(A) \bigcap D) = P(F, G) \Rightarrow x \in P(F, X),$$

$$x \in Sl(F, M_{qk}^{ns}(A)) \bigcap D \Rightarrow x \in Sl(F, X),$$

$$x \in Sm(F, M_{qk}^{ns}(A)) \bigcap D \Rightarrow x \in Sm(F, X).$$

Продовжуючи дослідження, започатковані в [54, 128–130, 154], запропонований і обґрунтований підхід до розв'язання задачі $Z(F, X)$, що ґрунтується на зведенні векторної задачі комбінаторної оптимізації до задачі, визначеної на опуклій оболонці множини полірозміщень, методі головного критерію для розглянутого класу векторних задач і враховує той факт, що число обмежень досить велике.

Твердження 6.7. Якщо для коефіцієнтів c_j, $j \in N_n$, цільової функції задачі

$$\operatorname{extr}\left\{ f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \mid x \in \operatorname{vert} M_{qk}^{ns}(A) \right\}$$

виконується умова $c_{i_1} \leq c_{i_2} \leq \ldots \leq c_{i_n}$, i_j, $j \in N_n$, та з огляду на упорядкування елементів мультимножини A − максимум функції $f(x)$ на допустимій множині досягається в точці

$\overline{x} = (\overline{x}_{i_1},...,\overline{x}_{i_n}) \in \operatorname{vert} M_{qk}^{ns}(A)$, що визначається як $\overline{x}_{i_j} = a_j \;\forall\; j \in N_n$, а мінімум – у точці $\overline{\overline{x}} = (\overline{\overline{x}}_{i_1}, \overline{\overline{x}}_{i_2},..., \overline{\overline{x}}_{i_n})$, де $\overline{\overline{x}}_{i_{j+1}} = a_{n-j} \;\forall\; j \in N_{n-1} \cup \{0\}$.

Пропонується наступний підхід до розв'язання розглянутого класу векторних задач. Він полягає в тому, що вхідна багатокритеріальна задача зводиться до задачі оптимізації за одним критерієм $f_r(x), r \in N_l$, за умови, що значення всіх інших критеріїв повинні бути не менше деяких граничних значень $t_i, i \in N_l \setminus \{r\}$. Таким чином, маємо задачу

$$Z(f_r, X(t_i)) : \max\left\{ f_r(x) \middle| f_i(x) \geq t_i, i \in N_l \setminus \{r\}, x \in X \right\}.$$

Оптимальні розв'язки x^0 цієї задачі завжди слабо ефективні, а якщо розв'язок єдиний, то й ефективний. Якщо розв'язок x^0 ефективний, то він єдиний розв'язок задачі $Z(f_r, X(t_i))$ при будь-якому фіксованому $r \in N_l$ і $t_i = f_i(x^0),\ i \in N_l \setminus \{r\}$. Для визначення граничних значень $t_i,\ i \in N_l \setminus \{r\},$ можна скористатися твердженням 6.6, що встановлює верхні і нижні границі значень критеріїв $f_i(x),\ i \in N_l,$ на множині полірозміщень. Процедура призначення серії граничних величин t_i обмежень дуже проста. Використовуючи твердження 6.6, вона зводиться після упорядкування коефіцієнтів критеріїв до обчислення скалярного добутку двох векторів, тобто до визначення значень лінійних критеріїв. При цьому, з огляду на структурні особливості множини полірозміщень, величини t_i можна обчислювати більш ефективно, використовуючи розміщення елементів кожної $i-$ї, $i \in N_s$, підмножини мультимножини A.

Загальна ідея запропонованого методу розв'язання задачі $Z(F, X)$ полягає в послідовному включенні обмежень задачі, які описують область допустимих розв'язків, та відкиданні неактивних обмежень за певних умов.

1. Зводимо багатокритеріальну задачу $Z(F, G)$ до однокритеріальної задачі $Z(f_r, G)$ методом головного критерію. Вважаємо $\nu = 0$.

2. Вибираємо обмеження початкової системи лінійних нерівностей, що описують допустиму множина $G^\nu \subset G$ задачі $Z(f, G^\nu)$, за допомогою симплекс-методу знаходимо її оптимальні розв'язки x^ν.

3. Якщо отримано оптимальний розв'язок x^{ν}, який є елементом множини полірозміщень, то в точці x^{ν} перевіряємо виконання обмежень, що не були враховані. Очевидно, ними можуть бути лише ті обмеження, що описують опуклу замкнуту множину *D*. Якщо розв'язки x^{ν} не задовольняють деяким обмеженням, то варто додати до обмежень допустимої області задачі $Z(f_r, G^{\nu})$ найбільш порушене з обмежень опуклої замкнутої множини *D*. Якщо розв'язки x^{ν} задовольняють зазначеним обмеженням, то вони є ефективними розв'язками задачі $Z(F,G)$ а, отже і задачі $Z(F,X)$.

4. Якщо отриманий розв'язок x^{ν} не є точкою множини полірозміщень, то будуємо відсікання, що проходить через суміжні вершини і відтинає вершину, що не є допустимою (тобто полірозміщенням). Додаємо це відсікання до обмежень задачі $Z(f, G^{\nu})$.

5. Порівнюємо знайдене значення $f_r(x^{\nu})$ цільової функції з її значенням, знайденим на попередньому кроці. Якщо воно зменшується, то відкидаємо несуттєві в точці x^{ν} обмеження. Якщо значення $f_r(x^{\nu})$ не змінюється, то обмеження не відкидаємо. З допустимою областю задачі, що $Z(f_r, G^{\nu})$ змінилася, переходимо до п. 2 для її розв'язання.

Очевидно, що алгоритм приводить до ефективного розв'язку задачі $Z(F,X)$ або встановленню її нерозв'язуваності в результаті розв'язання скінченного числа підзадач вигляду $Z(f_r, X)$.

Висновки до розділу 6

Проведено дослідження складних багатокритеріальних задач на комбінаторних множинах поліперестановок та полірозміщень, що ґрунтується на використанні інформації про опуклі оболонки допустимих областей задач, вивченні властивостей многогранників, вершини яких визначають задані комбінаторні множини. Вивчено деякі структурні властивості допустимих областей векторних комбінаторних задач, занурених в арифметичний евклідів простір. Отримано необхідні й достатні умови оптимальності різних видів ефективних розв'язків. Побудовано та обґрунтовано метод розв'язання розглянутих класів векторних задач. Використання структурних особливостей комбінаторних многогранників відкриває перспективи для подальшої розробки ефективних алгоритмів розв'язання нових класів векторних задач комбінаторної оптимізації. Програмна реалізація запропонованого поліедрального підходу дає можливість досліджувати і знаходити елементи множин Парето-оптимальних, слабо ефективних (за Слейтером) та строго ефективних (за Смейлом) розв'язків багатокритеріальних комбінаторних задач з огляду й на інші комбінаторні властивості області допустимих розв'язків.

РОЗДІЛ 7. БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНИЙ ВИБІР АЛЬТЕРНАТИВ ЗА УМОВИ НЕЧІТКО ЗАДАНИХ ВХІДНИХ ДАНИХ

У реальних ситуаціях прийняття рішень цілі, обмеження, критерії вибору в більшості випадків суб'єктивні і точно не визначені. Тому при побудові моделей прийняття рішень виникає необхідність використання нечіткої логіки, нечітких множин і відношень. Нечіткі поняття дозволяють моделювати плавну, поступову зміну властивостей, а також невідомі функціональні залежності, виражені у вигляді якісних зв'язків. У багатьох прикладних задачах часто виникають ситуації, у яких вхідні дані нечітко визначені. Такі ситуації відображають недостатність інформації для постановки задачі, оскільки при нечітких умовах і критеріях прийняття рішення стає проблемним. При моделюванні реальних задач нечіткість виявляється у формі опису функцій і параметрів, від яких вони залежать. Зручним математичним інструментарієм, за допомогою якого описується і враховується подібного роду інформація, є теорія нечітких множин, запропонована Л. Заде [199]. Нечіткі множини широко використаються в різного роду застосуваннях штучного інтелекту, теорії розпізнавання образів, прийняття рішень у різних областях та ін.

У багатьох теоретичних і практичних задачах виникає необхідність прийняття рішення з урахуванням декількох критеріїв оптимальності. Досить розповсюдженими також є задачі багатокритеріального вибору із скінченною множиною альтернатив, які можуть оцінюватися як кількісно, так й якісно. Особливість багатокритеріальних задач, як способу моделювання, полягає в тому, що за умов багатокритеріальності вибір найбільш доцільного розв'язку здійснюється із множини непокращуваних альтернатив. Проблема знаходження цієї множини має велике практичне та теоретичне значення. Крім того, у реальних задачах потужність множини альтернатив може бути дуже велика, що робить проблему прийняття рішення досить складною. У роботі [189] дано математичне формулювання і наведене аксіоматичне обґрунтування відомого ще з XIX с. принципу Еджворта–Парето для випадку чіткого відношення переваги особи, що приймає рішення. Цей принцип є основним при виборі найкращих розв'язків в економіці та техніці в тих випадках, коли доводиться враховувати відразу кілька цільових функцій (критеріїв). З'ясувалося, що він не універсальний, а справедливий лише при розв'язанні певного, хоча й досить широкого, класу задач багатокритеріального вибору. За межами цього класу його застосування ризиковане або ж взагалі неможливе.

У даному розділі принцип Еджворта–Парето поширюється на більш широкий клас багатокритеріальних задач, у яких множина можливих розв'язків є нечіткою.

На сьогодні досить актуальні задачі з урахуванням нечітких границь як у цільових функціях, так і в обмеженнях, заданих на комбінаторних множинах. Задача нечіткого вибору – пряме узагальнення задачі звичайного (чіткого) вибору, а тому її дослідження представляє безсумнівний науковий інтерес. Що стосується практичної сторони, то її розв'язки (тобто нечітка множина обраних розв'язків) цілком можуть скласти певну основу для наступного остаточного вибору. Тому вивчення задачі нечіткого вибору корисно й з погляду наступних її додатків у всіляких областях.

У роботах [57–60, 98, 102, 103, 107] розглянуті задачі з багатьма критеріями з нечіткими цільовими функціями, а в [47, 53–55, 82, 127–135, 153–156] задачі на комбінаторних множинах. Очевидно, доцільно розглянути задачу, що поєднує вищеназвані. У даному розділі задача векторної оптимізації визначена на комбінаторній множині перестановок, тому варто врахувати, що опуклою оболонкою такої множини є загальний переставний многогранник, множиною вершин якого є розглянута комбінаторна множина [45, 153, 156]. Як відомо з попередніх розділів, вивчені властивості зазначеної комбінаторної множини дають можливість розглядати розв'язки задачі, що визначені на дискретній комбінаторній множині, як задачі на неперервній допустимій множині.

У даному розділі розглядається багатокритеріальна задача, що враховує комбінаторні властивості нечітко заданої області допустимих альтернатив, запропоновані підходи до її розв'язання.

7.1. Властивості нечітких комбінаторних множин

Нечіткі підмножини утворюються шляхом введення узагальненого поняття належності, тобто розширення двоелементної множини значень характеристичної функції $\{0,1\}$ до континуума $[0,1]$. Це означає, що перехід від повної належності об'єкта до повної його неналежності відбувається плавно, а не стрибкоподібно, і належність виражається числом з інтервалу $[0,1]$, а не тільки одним із двох значень елементів множини $\{0,1\}$, як у випадку індикаторів звичайних підмножин. Незалежно від того, чи використовуються – нечіткі або чіткі підмножини, визначення ступенів належності опирається на деякі суб'єктивні критерії особи, що приймає рішення. У ряді випадків визначення відповідних значень ступенів належності елементів нечітких множин приводить до значних труднощів у роботі з нечіткими поняттями.

Формально загальна задача нечіткого математичного програмування описується у такий спосіб [103].

Нехай X – універсальна множина альтернатив, $\mu_A : X \to [0, 1]$ – задана нечітка підмножина допустимих альтернатив, Y – універсальна множина оцінок результатів виборів альтернатив із множини X й $\mu_R : Y \times Y \to [0, 1]$ – задане на множині Y нечітке відношення переваги. Вибори альтернатив оцінюються нечіткими значеннями заданої нечіткої функції цілі $\varphi : X \times Y \to [0, 1]$. Задача полягає в раціональному виборі альтернатив на основі інформації, заданої в описаній вище формі.

Наступним кроком на шляху уточнення розглянутої тут моделі є опис параметрів задачі у формі нечітких множин. При цьому, крім задання множин можливих значень параметрів, у модель вводиться додаткова інформація у вигляді функцій належності цих нечітких множин. Ці функції можна розглядати як спосіб наближеного відображення експертом в агрегованому вигляді наявного в нього неформалізованого уявлення про реальну величину даного параметру. Значення функції належності суть вагові коефіцієнти, які експерт приписує можливим різним значенням цього параметра.

Безсумнівно, що врахування подібної додаткової інформації ускладнює вихідну математичну модель, проте вона може виявитися простіше (і разом з тим прийнятно точною) моделі, що враховує різноманіття додаткових факторів.

Визначимо, для подальшого викладу узагальнення понять мультимножини, n-вибірки й комбінаторної множини перестановок на випадок нечітко заданої інформації.

Означення 7.1. Нечіткою мультимножиною $\tilde{X}$, заданою на універсальній мультимножині X називається сукупність пар $\left(x, \mu_{\tilde{X}}(x)\right)$, де $x \in X$, $\mu_{\tilde{X}}(x)$ – функція: $X \to \left[0,1\right]$, що має назву функції належності мультимножині $\tilde{X}$.

Значення $\mu_{\tilde{X}}(x)$ для конкретного x називається ступенем належності цього елемента нечіткій мультимножині $\tilde{X}$.

Нагадаємо, що мультимножини відповідно до означення утворюють підклас нечітких мультимножин. Над нечіткими множинами, так само як і над звичайними множинами виконується ряд операцій, таких як об’єднання, перетин, декартовий добуток, різниця та ін. Ці ж операції мають місце і для нечітких мультимножин [56, 97, 102, 103].

Нехай задана нечітка мультимножина

$\tilde{A}=\left\{a_1,\mu_{\tilde{A}}(a_1),a_2,\mu_{\tilde{A}}(a_2)...,a_q,\mu_{\tilde{A}}\left(a_q\right)\right\}$, її основа

$S(\tilde{A})=\left\{e_1,\mu_{\tilde{A}}(e_1),e_2,\mu_{\tilde{A}}(e_2),...,e_k,\mu_{\tilde{A}}(e_k)\right\}$, де

$$\mu_{\tilde{A}}(e_i)=\min\left\{\mu_{\tilde{A}}\left(a_{i_j}\right)\middle| a_{i_j}=a_{i_t},\ j\neq t,\forall i,j,t\in N_q\right\},$$

$e_j\in R_1\ \forall j\in N_k=\{1,...,k\}$ і кратність елементів $k(e_j)=r_j,\ j\in N_k$, $r_1+r_2+...+r_k=q$.

Упорядкованою нечіткою n*-вибіркою* з нечіткої мультимножини $\tilde{A}$ називається набір

$$a=\left(a_{i_1},\mu_{\tilde{A}}\left(a_{i_1}\right),a_{i_2},\mu_{\tilde{A}}\left(a_{i_2}\right),\ldots,a_{i_n},\mu_{\tilde{A}}\left(a_{i_n}\right)\right), \tag{7.1}$$

де $a_{i_j}\in\tilde{A}\ \ \forall i_j\in N_k,\ \forall j\in N_k,\ i_s\neq i_t$, якщо $s\neq t\ \ \forall s\in N_k,\ \forall t\in N_k$.

Означення 7.2. Нечітка підмножина $P(\tilde{A})$, елементами якої є нечіткі n-вибірки вигляду (7.1) з нечіткої мультимножини $\tilde{A}$, називається нечіткою евклідовою комбінаторною множиною, якщо для довільної пари її елементів $a=(a_1,\mu_{\tilde{A}}(a_1),a_2,\mu_{\tilde{A}}(a_2),...,a_n,\mu_{\tilde{A}}(a_n))$ і $b=(b_1,\mu_{\tilde{A}}(b_1),b_2,\mu_{\tilde{A}}(b_2),...,b_n,\mu_{\tilde{A}}(b_n))$ виконуються умови: $(a\neq b)\Leftrightarrow(\exists j\in N_n:\left(a_j,\mu_{\tilde{A}}(a_j)\right)\neq\left(b_j,\mu_{\tilde{A}}(b_j)\right)$, тобто множина $P(\tilde{A})$ має таку властивість: два елементи множини $P(\tilde{A})$ відмінні один від одного, якщо вони незалежно від інших відмінностей відрізняються порядком розміщення символів, що їх утворюють і ступенем належності нечіткій підмножині $P(\tilde{A})$.

Нечітка множина перестановок з повтореннями з n дійсних чисел, серед яких k різних, називається загальною нечіткою множиною перестановок і позначається $P_{nk}(\tilde{A})$.

Означення 7.3. Опуклою комбінацією нечітких множин $A_1,A_2,...,A_n$ в R^n називається нечітка множина A з функцією належності вигляду

$$\mu_A(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_i(x), \text{ де } \lambda_i \geq 0,\ i \in N_n, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1.$$

Будемо розглядати елементи множини перестановок з повтореннями як точки арифметичного евклідового простору R^n.

Відомо, що кожен елемент множини $P_{nk}(\tilde{A})$ є впорядкованим набором *n* дійсних чисел, серед яких *k* різних. Не втрачаючи загальності, упорядкуємо елементи множини A таким чином:

$$a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n. \tag{7.2}$$

Поряд із класичним переставним многогранником, введеним Радо [190], опишемо загальний переставний многогранник $\Pi_{nk}(\tilde{A})$, що є опуклою оболонкою загальної множини перестановок $P_{nk}(\tilde{A})$ [45]:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \leq \sum_{j=1}^{n} a_j,\ \sum_{j=1}^{i} x_{\alpha_j} \geq \sum_{j=1}^{i} a_j \tag{7.3}$$

$\alpha_j \in N_n,\ \alpha_j \neq \alpha_t,\ \forall j \neq t,\ \forall j,\ t \in N_i,\ \forall i \in N_n$, а $P_{nk}(A) = \mathrm{vert} \prod_{nk}(A)$.

Нечіткий опуклий многогранник $\Pi_{nk}(\tilde{A})$ також можна представити як опуклу оболонку нечіткої комбінаторної множини перестановок: $\Pi_{nk}(\tilde{A}) = \mathrm{conv}\, P_{nk}(\tilde{A})$.

7.2. Постановка задачі на нечіткій множині альтернатив

Звичайно під задачею багатокритеріальної оптимізації розуміють задачу відшукання мінімуму або максимуму векторного критерію на допустимій множині альтернатив. За допомогою векторної цільової функції формально представляється одна з основних властивостей альтернатив: цінність, корисність, вартість й ін. Нечіткість у постановці задачі багатокритеріальной оптимізації може бути як в описі множини альтернатив, так і в описі векторної цільової функції. Різні форми опису вихідної інформації обумовлюють існування різних формулювань нечітких задач оптимізації: а) задача досягнення нечітко поставленої мети при нечітких обмеженнях; б) задача нечіткої оптимізації при нечіткій множині допустимих альтернатив; в) нечіткий варіант стандартної задачі оптимізації з «пом’якшенням» критеріїв й/або обмежень, де замість задачі оптимізації розв'язується задача задоволення мети й відповідні нерівності для цільової функції й обмежень можуть порушуватися; г) задача векторної оптимізації з нечіткими коефіцієнтами та ін.

У даному розділі задача полягає в максимізації векторної функції F на нечітко заданій евклідовій комбінаторній множині $\tilde{X}$.

Розглядається багатокритеріальна задача комбінаторної оптимізації

$$Z(F,X): \max\left\{F(x) \mid x \in X \subset R^n\right\},\ F(x) = (f_1(x), ..., f_l(x)),$$

$$f_i : R^n \to R,\ i \in N_l,\ X = \operatorname{vert}\Pi_{nk}(A) \bigcap D \neq \varnothing,\ \Pi_{nk}(A) = \operatorname{conv} P_{nk}(A),$$

де $P_{nk}(A)$ − комбінаторна множина перестановок, $D \subset R^n$ − опуклий многогранник.

На множині X задана нечітка підмножина $\tilde{X} = \left\{x, \mu_{\tilde{X}}(x)\right\}$, де $x \in X$, а $\mu_{\tilde{X}}(x) : X \to [0,1]$ − функція належності множині $\tilde{X}$, що називається нечіткою множиною альтернатив. Під максимізацією будемо розуміти вибір нечіткої підмножини R з нечіткої множини $\tilde{X}$, якій відповідає найбільше значення, як векторної функції F, так і функції належності $\mu_{\tilde{X}}(x)$ нечіткій множині альтернатив. Ці альтернативи в задачах багатокритеріальної оптимізації залежно від способу їх порівняння називаються ефективними (оптимальними за Парето), слабко ефективними (за Слейтером), строго ефективними (за Смейлом) і відповідно позначаються: $P\left(F,\tilde{X}\right), Sl\left(F,\tilde{X}\right), Sm\left(F,\tilde{X}\right)$.

Нагадаємо, що альтернатива $x^* \in \tilde{X}$ називається ефективною, якщо не існує іншої альтернативи $x \in \tilde{X}$ такої, що: $F(x) \geq F(x^*)$, $\mu_{\tilde{X}}(x) \geq \mu_{\tilde{X}}(x^*)$ і хоча б одна нерівність строга; слабо ефективною, якщо $\exists x \in \tilde{X} : F(x) > F(x^*)$, $\mu_{\tilde{X}}(x) > \mu_{\tilde{X}}(x^*)$ і строго ефективною, якщо $\exists x \in \tilde{X}$: $x \neq x^*$, $F(x) \geq F(x^*)$, $\mu_{\tilde{X}}(x) \geq \mu_{\tilde{X}}(x^*)$.

З означень випливає, що $Sm(F,\tilde{X}) \subset P(F,\tilde{X}) \subset Sl(F,\tilde{X})$.

Вхідну задачу $Z(F,X)$ представимо у вигляді $(l+1)$ – критериальної задачі: $F(x) \to \max, \mu_{\tilde{X}}(x) \to \max,\ x \in \tilde{X}$.

Під розв'язком задачі з нечіткою множиною альтернатив розуміємо нечітку множину з функцією належності:

$$\mu(x)=\left\{\mu_{\tilde{X}}(x)\middle|\, x\in P\left(F,\tilde{X}\right)\vee 0\middle|\, x\notin P\left(F,\tilde{X}\right)\right\}.$$

Таким чином, нечітка підмножина розв’язків буде містити в собі ті і тільки ті альтернативи універсальної множини X, які визначають значення векторної функції $F(x)$ й функції належності $\mu_{\tilde{X}}(x), x\in X$, що непокращуються одночасно.

Слід зазначити, що нечіткий варіант цієї задачі означає, що обмеження пом’якшуються, тобто допускається можливість їх порушення з тим або іншим ступенем.

Нехай $P(\alpha)$ − множина всіх ефективних альтернатив $(l+1)$– критеріальної задачі:

$$y_i \to \max, i\in N_l,\ \mu_D(x)\to \max,$$

$$F(x,y)\geq\alpha,\ x\in X,\ y=(y_1,...,y_l)\in Y.$$

Тоді, розв’язком векторної задачі нечіткої оптимізації з нечіткою множиною альтернатив і ступенем недомінованості альтернатив, не менше α, називається нечітка множина з функцією належності вигляду:

$$\mu_\alpha(x)=\begin{cases}\mu_{\tilde{X}}(x), x\in P_\alpha\left(F,\tilde{X}\right),\\ 0, \qquad\quad x\notin P_\alpha\left(F,\tilde{X}\right).\end{cases}$$

Таким чином, нечітка множина розв’язків вхідної задачі буде містити в собі ті і тільки ті альтернативи зі ступенем недомінованості не менше α, які будуть ефективними як за оцінками альтернатив $y_i, i\in N_l$, так і за функцією належності $\mu_{\tilde{X}}(x)$ нечіткій множині альтернатив. Вибір з них деякої конкретної альтернативи здійснюється за допомогою методів багатокритеріальної оптимізації. Більш того, замість задачі максимізації векторної цільової функції можна ставити задачу досягнення якогось наперед заданого значення векторного критерію, що відповідає задоволенню вхідної мети.

7.3. Підходи до розв’язання задачі на нечіткій множині альтернатив

Існує досить багато методів розв’язання багатокритеріальних задач, але більшість із них розроблені для розв’язання задач вибору альтернатив у чітко визначеному просторі. Невелика модифікація робить їх застосовними й в умовах нечіткості. Зокрема, на практиці нерідко точна теорія оптимізації застосовується до неточних моделей, де немає ніяких підстав задавати коефіцієнти у вигляді точно визначених чисел. Таке штучне звуження апріорної інформації може привести до перекручування отриманих результатів.

Розробка методів розв'язання поставленої задачі в умовах нечіткої визначеності потребує знання й використання результатів операцій знаходження суми, добутку, мінімуму й максимуму нечітких величин.

Під нечітким числом будемо розуміти нечітку множину з областю визначення у вигляді інтервалу дійсної осі R^1. Множину всіх нечітких чисел, визначених на R^1, позначимо $\tilde{R}^1$. Нехай x і y − два нечітких числа з носіями $S_x = (a_1, a_2)$ й $S_y = (a_1, a_2)$ відповідно: $a_2 > a_1, b_2 > b_1$; $g : R^1 \times R^1 \to R^1$ – деяка функція. Тоді відповідно до принципу узагальнення нечітке число $D = g(x, y)$ визначається функцією належності

$$\mu_D(z) = \sup_{\substack{g(a,b)=z \\ a \in S_x, \quad b \in S_y}} \min\left\{\mu_x(a), \mu_y(b)\right\} \qquad (7.4)$$

Позначимо $\otimes$ − одну із чотирьох арифметичних операцій: +, −, $\cdot$, /; $g(a,b) = a \otimes b$. Тоді формула (7.4) визначає результат арифметичної операції $\otimes$ над нечіткими числами x та y. Якщо $g(\cdot)$ − функція не двох, а n аргументів, то принцип узагальнення формулюється аналогічно формули (7.4).

При порівнянні двох нечітких величин необхідно дати означення рівності цих величин.

Означення 7.4. Дві нечіткі величини (два числа) $\left(x_1, \mu_1(x_1)\right)$ і $\left(x_2, \mu_2(x_2)\right)$ будемо вважати рівними, якщо $x_1 = x_2$ і $\mu_1(x_1) = \mu_2(x_2)$.

Означення 7.5. Якщо виконується умова $x_1 \ge x_2$, $\mu_1(x_1) \ge \mu_2(x_2)$ і одна із цих нерівностей строга, то нечітка величина $\left(x_1, \mu_1(x_1)\right)$ більше нечіткої величини $\left(x_2, \mu_2(x_2)\right)$.

Розроблено підхід, заснований на методі послідовних поступок. При розв'язанні багатокритеріальної задачі методом послідовних поступок спочатку робиться якісний аналіз відносної важливості часткових критеріїв. Особливістю даного методу є те, що критерії задачі повинні бути попередньо пронумеровані в порядку спадання їх важливості, таким чином головним є критерій $f_1(x)$, менш важливий $f_2(x)$, потім слідують інші часткові критерії $f_3(x)$, $f_4(x)$,..., $f_l(x)$. Максимізується перший за важливістю критерій $f_1(x)$ і визначається його найбільше значення f_1^*. Потім призначається величина допустимого зниження (поступки) $\Delta_1 \geq 0$ критерію $f_1(x)$ і знаходиться найбільше значення f_2^* другого критерію $f_2(x)$ за умови, що значення першого критерію повинно бути не менше, ніж $f_1^* - \Delta_1$. Знову призначається величина поступки $\Delta_2 \geq 0$, але вже за другим критерієм, що разом з першим використовується при знаходженні умовного максимуму третього критерію й т. д. Нарешті, максимізується останній за важливістю критерій $f_l(x)$ за умови, що значення кожного критерію $f_r(x)$ з $l-1$ попередніх повинно бути не менше відповідної величини $f_r^* - \Delta_r$, тоді одержувані в результаті розв'язки вважаються оптимальними.

Таким чином, вибір розв'язку задачі здійснюється шляхом виконання багатокрокової процедури і полягає в послідовному включенні обмежень задачі $Z(F, X)$ та врахуванні структурних особливостей її допустимої області. Оптимальним вважається той розв'язок, що є розв'язком останньої задачі з наступної послідовності задач:

$$f_1^* = \max\left\{ f_1(x) \middle| x \in X \right\},$$

$$f_2^* = \max\left\{ f_2(x) \middle| x \in X,\, f_1(x) \geq f_1^* - \Delta_1 \right\},...,$$

$$f_l^* = \max\left\{ f_l(x) \middle| x \in X,\, f_{r-1}(x) \geq f_{r-1}^* - \Delta_{r-1}, r \in N_l \right\}.$$

Слід зазначити, що у випадку, коли всі Δ_r − нулі, метод послідовних поступок виділяє тільки лексикографічно оптимальні стратегії; ці стратегії доставляють найбільший на множині допустимих значень розв'язок першому за важливістю критерію $f_1(x)$. Тому величини поступок, призначені для багатокритеріальної задачі, можна розглядати як своєрідну міру відхилення пріоритету (ступеня відносної важливості) часткових критеріїв від жорсткого, лексикографічного.

Поняття структур домінування й недомінованих розв'язків у багатокритеріальних задачах дозволяє розглядати загальні випадки, у яких є інформація про переваги особи, що приймає рішення. В [58] уведені поняття нечітких опуклих і нечітких полярних конусів, що узагальнюють структури, які використаються для означення понять оптимальності за Парето, Слейтером, Смейлом й ін.

Якщо відсутня інформація як про переваги на множині альтернатив, так і про переваги на множині критеріїв, то як правило, використовуються найпростіші методи: мінімаксний, максимаксний та ін. При наявності інформації тільки про порівняльну важливість оцінок за кожним із критеріїв користуються методами послідовного розгляду альтернатив за окремими критеріями (лексикографічний метод, метод перестановок, метод послідовного скорочення й ін.). Якщо переваги особи, що приймає рішення, на множинах критеріальних оцінок виражені в порядкових шкалах і задані щодо ваги критеріїв, то використовуються методи голосування, з яких найпоширенішим у прийнятті рішень є метод Б. Руа.

Якщо можуть бути отримані відносні ваги критеріїв і відносні цінності критеріальних оцінок за окремими критеріями, то застосовується багато різних методів. Тут і прості прямі методи оцінювання альтернатив з використанням заздалегідь заданих оцінюючих функцій (наприклад, адитивної зваженої згортки оцінок за всіма критеріями), і методи теорії корисності, що вимагають тривалого діалогу з особою, що приймає рішення, і підпорядкування останнього відомій аксіоматиці.

Якщо поряд з інформацією про важливість критеріїв відомі ідеальні критеріальні оцінки, можливе застосування методів оцінки досяжності цілей. Досить докладно перераховані методи викладені в [57].

Розглянемо деякі прості методи вибору альтернатив [102] і покажемо, яким чином при необхідності може бути розширена область застосування цих методів.

Нехай задані або обчислені нечіткі оцінки $f_i(x_j)$ альтернатив $x_j, j \in N_n$, за критеріями f_i, $i \in N_l$.

7.4. Метод знаходження лексикографічно оптимальних розв’язків на нечітко заданій допустимій комбінаторній множині перестановок

Застосування методу при нечіткій вихідній інформації зводиться до наступних дій:

1. Критерії упорядкувати за важливістю: $f_1(x)$, $f_2(x), \ldots, f_l(x)$.

2. За згодою ОПР призначити рівень $\alpha \in [0,1]$, для якого визначається множина кращих альтернатив відповідно до кроків 3−5:

3. Визначити нижню (l) і верхню (u) границі α-рівневих підмножин для оцінки альтернатив за розглянутим критерієм [57]:

$$l(f_{il}) = \inf_{\mu_{f_{il}}(x) \ge \alpha} x,\ u(f_{il}) = \sup_{\mu_{f_{il}}(x) \ge \alpha} x$$

4. Для кожної пари альтернатив $z, y \in X$ обчислити показники взаємного перевищення критеріальних оцінок $\zeta_{zy}(z < y)$ й $\zeta_{yz}(y < z)$:

а) якщо оцінки такі, що $f_{iy}^{\alpha} \subset f_{iz}^{\alpha}$, то;

$$\zeta_{zy} = \frac{u(f_{iz}) - u(f_{iy})}{u(f_{iz}) - l(f_{iz})},\ \zeta_{yz} = \frac{l(f_{iy}) - l(f_{iz})}{u(f_{iz}) - l(f_{iz})}, \tag{7.5}$$

де $z, y \in A$;

б) якщо оцінки перетинаються та $\exists x_0 \in S_{f_{iz}} : \forall y \in S_{f_{iy}}$ виконується $x_0 > y$, то

$$\zeta_{zy} = 1 - \frac{u(f_{iy}) - l(f_{iz})}{\max\{r(a), r(b)\}},\ \zeta_{yz} = 0, \tag{7.6}$$

де $r(z) = u(f_{iz}) - l(f_{iz})$, $r(y) = u(f_{iy}) - l(f_{iy})$;

в) якщо оцінки не перетинаються і $\forall x_0 \in S_{f_{iz}}, \forall y \in S_{f_{iy}}$ виконується $x > y$, то

$$\zeta_{zy} = 1, \zeta_{yz} = 0. \tag{7.7}$$

5. Обчислити показники $\mu_{D_{il}}$ належності j-ої альтернативи множині кращих (D-множині) за i-им критерієм
$\mu_{D_{ij}} = \max\{0, (\max\limits_{\substack{j \in X \\ y \ne j}} \zeta_{jy} - \max\limits_{\substack{y \in X \\ y \ne j}} \zeta_{yj})\}$, де ζ_{jy}, ζ_{yj} обчислені за формулами (7.5)–(7.6) для i-го критерію.

6. Якщо D-множина за розглянутим критерієм містить рівно одну альтернативу з $\mu_{D_{il}} \ge \alpha$, то вона вважається кращою. Якщо D-множина містить більш ніж одну альтернативу з $\mu_{D_{il}} \ge \alpha$, то вибирається наступний за важливістю критерій і повторюються кроки 3–5. Якщо всі критерії розглянуті і D-множина містить більше однієї альтернативи і $\alpha < 1$, то можна збільшити α й перейти до кроку 3. Якщо $\alpha = 1$, то остаточний вибір кращої альтернативи надається ОПР.

Розглянемо ще один простий метод вибору альтернатив при відсутності інформації про переваги на множині критеріїв за узагальненим критерієм песимізму (максиміна), що є розвитком методу Вальда на випадок нечітко заданих альтернатив.

7.5. Метод вибору альтернатив за узагальненим критерієм песимізму (максиміна)

1. Для кожного критерію обчислити нечітку максимальну критеріальную оцінку

$$f_{i\max} = \tilde{\max}\left\{ f_i(x_j) \mid x_j \in \tilde{X}, j \in N_n \right\}, i \in N_l .$$

2. Обчислити зведені нормалізовані оцінки альтернатив за критеріями $f_{ij^*} = f_i(x_j) / f_{i\max}, x_j \in \tilde{X}, j \in N_n, i \in N_l$.

3. Обчислити мінімальну критеріальну оцінку для кожної альтернативи $f_{j\min}$, яка визначається таким чином:

$$f_{j\min} = \tilde{\min}\left\{ f_{ij^*} \mid i \in N_l \right\},\ j \in N_n .$$

4. Визначити узагальнений максимум знайдених мінімальних оцінок $f_{0\max} = \tilde{\max}\left\{ f_{j\min} \mid j \in N_n \right\}$.

5. Оцінити ступінь подібності $f_{0\max}$ для кожної з оцінок $f_{j\min}$. Як показник подібності нечітких чисел може бути використана величина $\xi_j = \sum\limits_{z \in [0,1]} \left| \mu_{f_{0\max}}(z) - \mu_{f_{j\min}}(z) \right|,\ j \in N_n$.

6. Вибираємо альтернативу з максимальним індексом ξ_j .

Якщо альтернатива вибирається за максимаксним принципом, то на кроці 3 треба замість $f_{j\min}$ обчислити

$f_{j\max} = \tilde{\max}\left\{ f_{ij^*} \mid i \in N_l \right\},\ j \in N_n$ і в інших кроках замість $f_{j\min}$ використати значення $f_{j\max}$, $j \in N_n$.

Висновки до розділу 7

Розроблено методи розв'язання багатокритеріальних задач при нечіткій вхідній інформації. Залежно від специфіки задачі можливі застосування й інших модифікованих на випадок нечітко заданої інформації методів багатокритеріального вибору. Узагальнення чіткого методу, як правило, не представляє особливих труднощів, якщо адекватно умовам розв'язуваної задачі обрані способи подання нечітких понять, реалізації нечітких обчислень, порівняння нечітких чисел, формування нечіткої множини кращих альтернатив.

У даному розділі в результаті проведеного дослідження векторної комбінаторної задачі, що ґрунтується на використанні інформації про опуклу оболонку допустимої області, вивченні властивостей многогранника, вершини якого визначає нечітко задана комбінаторна множина перестановок, розроблено і обґрунтовано метод розв'язання складних багатокритеріальних задач на зазначеній комбінаторній множині. Використання структурних властивостей комбінаторних многогранників дає можливість розробляти ефективні алгоритми розв'язання нових класів векторних задач комбінаторної оптимізації в умовах нечітко заданих вхідних даних.

РОЗДІЛ 8. ПІДХІД ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНИХ ЗАДАЧ КОМБІНАТОРНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ ЗА ДОПОМОГОЮ ТЕОРІЇ ГРАФІВ

Розвиток теорії графів в основному зобов'язаний великій кількості всіляких додатків. У термінах теорії графів формулюється велика кількість задач, пов'язаних з дискретними об'єктами [41, 42, 86]. Такі задачі виникають під час проектування інтегральних схем, схем керування, у дослідженні автоматів, в економіці й статистиці, теорії розкладів і дискретній оптимізації. Очевидно, із всіх математичних об'єктів графи займають одне з перших місць як формальні моделі реальних систем. Графи знайшли застосування практично у всіх галузях наукових знань: фізиці, біології, хімії, математиці, історії, лінгвістиці, соціальних науках, техніці й т. п. Найбільшою популярністю теоретико-графові моделі користуються при дослідженні комунікаційних мереж, систем інформатики, хімічних і генетичних структур, електричних ланцюгів та інших систем мережної структури.

До типових задач теорії графів й їх додатків можна віднести наступні: задача про найкоротший ланцюг, заміна обладнання, складання розкладу руху транспортних засобів, розміщення пунктів швидкої допомоги, розміщення телефонних станцій, задача про максимальний потік, задача про розміщення й покриття, розфарбування в графах, зв'язність графів і мереж (проектування найкоротшої комунікаційної мережі, синтез структурно-надійної мережі циркуляційного зв'язку, аналіз надійності стохастичних мереж зв'язку), структурний синтез лінійних виборчих ланцюгів, покриття схеми заданим набором типових підсхем та ін.

Графи досить тісно пов'язані з поняттям комбінаторних множин: перестановок, розміщень, сполучень, розбиттів та ін. Опуклими оболонками таких комбінаторних конфігурацій є комбінаторні многогранники, властивості яких відіграють важливу роль для розв'язування задач оптимізації.

Графи многогранників мають багато цікавих властивостей; при їх вивченні виникають задачі, що представляють інтерес не тільки для теорії графів, комбінаторики, топології і геометрії, але і для теорії лінійного програмування.

Використання властивостей графів комбінаторних многогранників можуть послужити підвищенню ефективності традиційних і розробці нових методів комбінаторної оптимізації. Комбінаторні моделі можуть бути застосовані для представлення оптимізаційних задач, що виникають при оптимальному розміщенні на графах. Комбінаторна теорія многогранників вивчає екстремальні властивості многогранників, розглядаючи множину його граней всіх розмірностей як деякий комплекс. Але при розв'язанні таких задач виникають проблеми, пов'язані з складністю математичних моделей, великим об'ємом інформації тощо, оскільки більшість задач на комбінаторних множинах є *NP*-повними. Більшість задач на графах стосується визначення компонент зв'язності, пошуку маршрутів, відстаней та ін. Проте при розв'язанні прикладних задач відповідні їм графи досить великі, а аналіз можливий лише із залученням сучасної обчислювальної техніки.

В даному розділі досліджується багатокритеріальна задача на комбінаторній множині. На підставі встановленого взаємозв'язку між задачами на комбінаторних множинах і графами многогранників комбінаторних множин вивчаються деякі структурні властивості допустимої області, а також сформульовано ряд тверджень, що можливо застосувати для побудови методу розв'язання комбінаторної задачі з використанням графів. Для подальшого викладу матеріалу сформулюємо деякі необхідні означення і властивості.

8.1. Необхідні поняття теорії графів та комбінаторні задачі на графах

Означення 8.1. Графом G називають фігуру на площині, яка складається з непорожньої скінченної множини V точок (вершин) і скінченної множини E орієнтованих чи неорієнтованих ліній (ребер), що з'єднують деякі пари вершин.

Надалі, якщо не вказано інше, вершини позначатимемо буквою v з індексами чи без: $v, v_2, v_{2,34}$; ребра – буквою e з індексами чи без: $e, e_6, e_{8,3,97}$. Ребро, що з'єднує деяку вершину саму з собою, називають петлею. Ребра, що з'єднують одну й ту саму пару вершин, називають мультиребрами. Граф, що не містить мультиребер та петель, називають простим графом. Граф, в якому допускаються мультиребра чи петлі, називають мультиграфом.

Граф, усі ребра якого неорієнтовані, називають неорієнтованим графом; граф, усі ребра якого орієнтовані – орієнтованим графом, або орграфом; мішані графи – містять як орієнтовані, так і неорієнтовані ребра. В орграфах пари протинапрямлених мультиребер, що з'єднують одну й ту саму пару вершин, часто зображують однією лінією зі стрілками на протилежних кінцях. Надалі, якщо не вказано інше, графи вважатимемо неорієнтованими.

Вершини v_1 та v_2 називають суміжними, якщо вони з'єднані ребром e. У такому разі кажуть, що вершини v_1 та v_2 інцидентні ребру

e аналогічно, ребро e інцидентне вершинам v_1 та v_2.

Шляхом у графі, що починається у вершині v_1 і закінчується у вершині v_2, називають послідовність вершин та ребер вигляду:

$$v_1 e_{i_1} v_{i_1} e_{i_2} v_{i_2} e_{i_3} ... v_{i_{n-1}} e_{i_n} v_2,$$

де кожне ребро інцидентне обом вершинам, які є для нього сусідніми в послідовності (ребро e_{i_1} інцидентне вершинам v_1 та v_{i_1} ребро e_{i_2} інцидентне вершинам v_{i_1} та v_{i_2} і т. д.). Зазначимо, що шлях у графі однозначно визначається першою і останньою вершинами (v_1 та v_2) та послідовністю ребер, тобто проміжні вершини можна не вказувати: $v_1 e_{i_1} e_{i_2} e_{i_3} ... e_{i_n} v_2$.

Крім того, для простографів шлях однозначно визначається послідовністю вершин: $v_1 v_{i_1} v_{i_2} ... v_{i_{n-1}} v_2$.

Для орієнтованих графів шлях визначається аналогічно, але з урахуванням орієнтації ребер: ребро e_{i_1} має вести від v_1 до v_{i_1}.

Шлях, який не містить повторень вершин і ребер, крім, можливо двох крайніх вершин v_1 та v_2 називають простим шляхом. Легко перевірити, що повторення ребер у шляху веде до повторення вершин (однак можливо, що повторюватимуться лише дві крайні вершини).

Замкнений шлях $(v_1 = v_2)$ називають циклом. Простий замкнений шлях називають простим циклом.

Лема 8.1. Будь-який шлях, що з'єднує вершини містить простий шлях, що з'єднує ті ж вершини v_1 та v_2.

В графі розрізняють ейлерові та гамільтонові шляхи.

Для подальшого викладу підходу для розв'язання задачі розглянемо поняття гамільтонових та напівгамільтонових шляхів.

Означення 8.2. Гамільтоновим шляхом у графі називають простий шлях, який містить кожну вершину графа рівно один раз (проходить через кожну вершину без повторень).

Замкнений гамільтонів шлях називають гамільтоновим циклом. Граф, що допускає побудову гамільтонового циклу, називають гамільтоновим. Граф, що допускає побудову гамільтонового шляху, називають напівгамільтоновим.

Проблеми розпізнавання ейлеровості (напівейлеровості) та гамільтоновості (напівгамільтоновості) графів, незважаючи на їх зовнішню схожість, принципово різні. Для розпізнавання ейлеровості графа існує ефективний критерій (теорема Ейлера), а для практичної побудови ейлерового циклу можна скористатись простим та зручним алгоритмом Флері.

Ситуація щодо гамільтоновості набагато складніша – сьогодні не існує ефективного критерію (теореми про необхідні та достатні умови) гамільтоновості (напівгамільтоновості) графів. Проте існує ряд теорем про необхідні умови та ряд теорем про достатні умови гамільтоновості (напівгамільтоновості). Деякі з цих теорем розглянемо в цьому підрозділі.

Необхідні умови гамільтоновості графів

Наступна лема наводить два очевидних типи графів, належність до яких виключає можливість гамільтоновості.

Лема 8.2. Жоден граф, що містить точку з'єднання або міст, не є гамільтоновим.

Твердження леми випливає безпосередньо з визначення моста та точки з'єднання.

Розглянемо ще один важливий клас графів, належність до якого виключає можливість гамільтоновості.

Достатні умови гамільтоновості графів

Наведемо без доведення деякі достатні умови гамільтоновості та напівгамільтоновості графів, що будуть необхідні для подальшого викладу матеріалу.

Теорема 8.1. (О. Оре, 1960 р.). Нехай G – зв'язний граф з кількістю вершин $n = |V| \geq 3$.

1. Якщо для будь-якої пари несуміжних вершин u та v виконується нерівність $d_u + d_v \geq n$ граф G -гамільтонів.
2. Якщо для будь-якої пари несуміжних вершин и та V виконується нерівність $d_u + d_v \geq n-1$ граф G -напівгамільтонів.

Теорема 8.2. (Г. Дірак, 1953 р.). Нехай О – зв'язний граф з кількістю вершин $n = |V| \geq 3$. Якщо для будь-якої вершини $v \in V$ виконується нерівність $d_v \geq n/2$ граф G є гамільтоновим.

Зазначимо, що дані теореми дають лише достатні, але не необхідні умови гамільтоновості графу.

Розглянемо деякі прикладні задачі, що формулюються в термінах теорії графів.

Знаменита задача про комівояжера є комбінаторною задачею на множині перестановок і пов'язана із знаходженням гамільтонового циклу найкоротшої сумарної довжини. Як відомо, в цій задачі вважається, що є n міст, які неодмінно повинен відвідати комівояжер, – всі і рівно по одному разу, пройшовши загальний шлях найменшої сумарної протяжності. Якщо між містами є дороги, то вони інтерпретуються як ребра графа порядку n з вказаною довжиною. Вершини такого графа – вершини переставного многогранника, і є містами.

Задача комівояжера є приклад комбінаторної задачі на графах і має велике практичне і теоретичне значення. Через свою обчислювальну складність вона рівносильна цілому класу перебірних задач і часто використовується математиками для порівняльного аналізу і вивчення складності алгоритмів оптимізації в дискретній математиці.

Деякі прикладні задачі, що формулюються як задача комівояжера

1. N міст, між кожним містом можна побудувати дорогу, вартість будівництва дороги відома, необхідно витратити мінімум грошей і з'єднати всі міста. Задача зводиться до пошуку мінімального остового дерева. Та ж задача може бути інтерпретована, як прокладання комп'ютерної мережі, при мінімальній витраті кабелів.

2. Припустимо, необхідно найняти людей, які виконують певну роботу. Кожна людина може працювати в різний час, і брати за цю роботу різну кількість грошей. Необхідно найняти працівників так, щоб від моменту А до моменту Б хоча б один з працівників виконував цю роботу, і витратив на це мінімум грошей. Це задача на визначення найкоротшого шляху. Для її розв'язання необхідно побудувати граф. Вершини – це моменти А і Б тобто час, в який працівник може заступити на роботу і піти з неї. Необхідно відшукати мінімальний шлях із А в Б. Причому, граф орієнтований.

3. Задача про зайнятість працівників. Нехай є n працівників і m видів робіт. Кожен працівник може виконувати якусь роботу, і кожну роботу можуть виконувати різні люди. Необхідно розподілити робітників так, щоб максимальна кількість була зайнята, причому одну роботу може виконувати один робітник. Будуємо граф, де певного робітника сполучаємо з роботами, які він може виконувати, також створюємо псевдоджерело, і сполучаємо його із усіма працівниками. Всі роботи сполучаємо з псевдостоком. Вага дуг, що сполучають працівника і роботу рівна 1. Тоді максимальна кількість зайнятих людей рівна пропускній спроможності графа.

Також можуть бути сформульовані задачі складання розкладу, аналізу мереж в електротехніці, аналізу ланцюгів Маркова в теорії ймовірностей, в програмуванні, в проектуванні електронних схем, в економіці, в соціології і т. ін.

8.2. Загальна математична постановка задачі на комбінаторних множинах в термінах теорії графів та її властивості

У загальному вигляді екстремальні комбінаторні задачі можна сформулювати так: маємо n-множину елементів, на ній задається комбінаторна множина $A=\{\sigma_i\}=\{(a_1,a_2,...,a_n)\}$. У даному випадку під $\sigma_i = a_1,a_2,...,a_n$ розуміємо перестановки, розміщення, сполучення та ін. На множині A задається функція $f(x)$. Потрібно відшукати екстремум функції $f(x)$ і елементи множини A, що цей екстремум доставляють. Саме формулювання екстремальних комбінаторних задач диктує вибір операцій, застосовуваних для їх розв'язання. По-перше, треба вміти робити генерацію елементів множини $\grave{A}$ і мати у своєму розпорядженні відповідну множину значень функції $f(x)$. По-друге, треба розвинути методику порівняння цих значень і виділення з них максимального чи мінімального. Операція перебору практично рідко виявляється здійсненною, оскільки число можливих комбінацій може бути занадто велике. Труднощі, пов'язані з перебором варіантів і порівнянням значень є значними.

Отже, загальна схема зв'язку екстремальних комбінаторних задач з методами лінійного програмування виглядає приблизно так: елементи σ_i інтерпретуються, як точки евклідового простору, щоб «цільова» функція $f(x)$ стала лінійною формою. Розглядається задача знаходження екстремуму цієї функції на опуклій оболонці заданих точок (тобто на опуклому многограннику). Справді, екстремум лінійної форми на многограннику досягається в одній з вершин, що входять у множину розглянутих елементів. Задача знаходження екстремуму лінійної форми і є задачею лінійного програмування. Особливістю комбінаторних задач при такому зведенні залишиться те, що при визначенні розв'язку варто обмежуватися лише вершинами.

Також можна інтерпретувати загальну задачу комбінаторної оптимізації, як задачу, що полягає у відшуканні екстремуму лінійної цільової функції на деякому комбінаторному многограннику за наявності додаткових лінійних обмежень. Як правило, при розв'язанні класу таких задач досліджується можливість їх лінеаризації, тобто побудови опуклої оболонки допустимих розв'язків задачі. Перехід від параметричної форми задання опуклого многогранника до аналітичної має велике значення для задач дискретної оптимізації, оскільки дозволяє сформулювати їх в термінах лінійного програмування, але як показує практика, це не завжди виправдано. Підзадачею вище сформульованої задачі може бути визначення гамільтонового шляху, який визначає зміну значення цільової функції на деякій комбінаторній множині, зокрема, множині перестановок. Многогранник гамільтонових циклів графа є гранню многогранника гамільтонових циклів повного графа.

Тоді розв'язок комбінаторних екстремальних задач представляє собою перестановку $(a_1, a_2, ..., a_n)$ чисел 1, 2,…,*n*, з множини $P_n(A) = P_n$. Метою є знаходження значення функції $f(x) = \operatorname{extr} \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$ на скінченній підмножині зазначених перестановок. Як відомо з попередніх розділів, елементи множини перестановок P_n можна інтерпретувати як вершини переставного многогранника. У свою чергу переставний многогранник можна представити у вигляді графа $G(P_n)$. У цьому графі вершини являють собою множину усіх перестановок P_n, а дві вершини утворять дугу $\overrightarrow{p_1 p_2}$, якщо $f(p_1) \geq f(p_2)$, $p_1, p_2 \in P_n$ і якщо перестановка p_2 отримана з p_1 за допомогою транспозиції двох елементів.

В розділі розглядається новий метод, який дає можливість знайти розв'язки комбінаторної задачі, враховуючи властивості і структуру комбінаторної множини, на якій розглядається задача. Зокрема, описується побудова послідовності значень лінійної цільової функції по розкладанню точок множини перестановок, в яких це значення набувається, на гіперплощинах.

Розглянемо задачу евклідової комбінаторної оптимізації вигляду:

$$Z(\Phi, P(A)) : \max\{\Phi(a) \mid a \in P(A)\},$$

яка полягає в максимізації функції $\Phi(a)$ на множині перестановок $P(A)$, де $\Phi(a) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$.

При відображенні множини $P(A)$ у евклідів простір R^n, можна сформулювати задачу лінійного програмування $Z(F, X)$ максимізації критерію $F(x)$ на множині X, причому кожній точці $a \in P_{nk}(A)$ відповідатиме точка $x \in X$, така, що $F(x) = \Phi(a)$

$$Z(F, X) : \max\{F(x) \mid x \in X\}, \tag{8.1}$$

де $F(x)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$, X – не порожня множина в R^n, яке визначається таким чином $X = \operatorname{vert}\Pi(A)$, $\Pi = \operatorname{conv} P(A)$.

Слід зазначити, що іноді є доцільним розв'язати задачу вигляду:

$$x^* = \arg\max_{x\in \Pi(A)} F(x),$$

для значення функції $y^* = F(x^*)$. Так само має сенс розглядати задачу, де значення цільової функції знаходиться в інтервалі

$$F(\overline{x}) \le F(x) \le F(\overline{\overline{x}}).$$

Тоді задача (8.1) прийме вигляд: визначити

$$\overline{x} = \arg\max_{x\in \Pi(A)} F(x) \text{ при } \overline{y} = F(\overline{x}),$$

$$\overline{\overline{x}} = \arg\max_{x\in \Pi(A)} F(x) \text{ при } \overline{\overline{y}} = F(\overline{\overline{x}}) \qquad (8.2)$$

при умові $\left|\overline{x} - \overline{\overline{x}}\right| \to \min$.

Розглядаємо перестановку як впорядковану вибірку елементів $a = \left(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n}\right)$, де $a_{i_j} \in \grave{A}$ $\forall i_j \in N_n$, $\forall j \in N_n$.

Врахуємо той факт, що опуклою оболонкою множини перестановок є переставний многогранник $\Pi(A) = \operatorname{conv} P(A)$, множина вершин якого рівна множині $P(A)$ перестановок: $\operatorname{vert}\Pi(A) = P(A)$.

Не втрачаючи спільності, вважаємо що елементи впорядковані таким чином $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n$, а елементи основи – по зростанню: $e_1 < e_2 < \ldots < e_k$.

Підхід до розв'язання задач ґрунтується на впорядковуванні значень цільової лінійної функції $F(x)$ і побудові гамільтонового шляху для точок, в яких ці значення досягаються. Далі під задачею (8.1) розуміємо задачу (8.2).

Для побудови методу, перш за все, необхідно визначити початкову точку. Розглянемо однокритеріальну задачу без додаткових обмежень.

Якщо для елементів мультимножини A і коефіцієнтів цільової функції задачі

$$\operatorname{extr}\left\{ f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \mid x \in \operatorname{vert}\Pi(A) \right\}$$

виконуються відповідно умови впорядкування елементів мультимножини за неспаданням і $c_{i_1} \le c_{i_2} \le \ldots \le c_{i_n}$, $i_n \in N_n$, то максимум функції $f(x)$ на допустимій множині досягається в точці $x^* = (x^*_{i_1}, \ldots, x^*_{i_n}) \in \operatorname{vert}\Pi(A)$, яка задається таким чином:

$$x^*_{i_j} = a_j \;\; \forall\; j \in N_n ,$$

а мінімум відповідно в точці $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, де

$$y_{i_{j+1}} = a_{n-j} \;\; \forall\; j \in N_{n-1} \cup \{0\} .$$

Для даної задачі (8.2) область допустимих розв'язків визначає переставний многогранник, вершини якого є точками загальної множини перестановок. Як відомо, точки множини $P(A)$ лежать на сімействі n-площин вигляду

$$\frac{s}{n-s} x_1 + \frac{s}{n-s} x_2 + \ldots + \frac{s}{n-s} x_{n-s} - x_{n-s+1} - \ldots - x_n + a_t^s = 0,$$

$$t = 1, 2, \ldots, \gamma_s \le \frac{n}{s!(n-s)!},$$

при цьому s може приймати значення 1, 2, …, $n-1$ [156].

Враховуючи дану властивість, розглянемо далі метод впорядкування значень лінійної функції .

8.3. Метод упорядкування значень лінійної функції на комбінаторній множині перестановок та його застосування до розв'язування багатокритеріальних задач

Як було визначено вище, розглядається задача, в якій необхідно визначити точку екстремуму – вершину переставного многогранника $\Pi(A)$ по відомому значенню цільової функції. Для цього спочатку необхідно знайти значення цільової функції в кожній точці, побудувати для цих значень ланцюг (граф), який відображає переходи від точки до точки, і з'ясувати залежність між ними.

Скористаємося теорією графів та деякими основними властивостями.

Розглянемо перестановки з множини $A = \{1, 2, ..., n\}$. Кількість елементів множини перестановки $P_n(A)$ рівно $n!$.

Для генерації всіх $n!$ перестановок n-елементної множини існує багато методів [83]. Найпоширенішими є наступні методи генерації:

1) кожна наступна перестановка утворюється з попередньої шляхом виконання однієї транспозиції;

2) кожна наступна утворюється з попередньої за допомогою одноразової транспозиції сусідніх елементів.

Послідовності перестановок, одержано за допомогою вище зазначених методів можна інтерпретувати як граф G_n, вершини якого відповідають всім точкам множини перестановок $P(A)$.

У графі дві вершини, відповідні перестановкам u і g, сполучені ребром тоді і тільки тоді, коли g утворюється з u одноразовою транспозицією двох елементів (таким чином, кожна вершина сполучена в точності з $n-1$ іншими вершинами). Згідно теореми про суміжність вершин, ці вершини є суміжними.

В результаті одержуємо повний граф, і будь-який гамільтонів ланцюг відповідає деякому варіанту генерації всіх перестановок шляхом одноразової транспозиції двох елементів на кожному кроці. Кожній вершині графа відповідає деяке значення заданої функції $F(x)$. Було б цікаво знайти такий гамільтонів ланцюг, уздовж якого всі значення функції строго впорядковані за збільшенням. Для цього для довільної функції необхідно зробити $n!$ обчислень її значень, потім з допомогою $\log_2 n!$ операцій їх упорядкувати. Проте для деяких функцій це можна зробити значно простіше, як описано в роботі [42].

Розглянемо лінійну функцію

$$F(x, c) = (c, x) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i . \qquad (8.3)$$

Тут $c = (c_1, c_2, ..., c_n)$ множина довільних чисел, а $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ – перестановка чисел $(1, 2, ..., n)$. Розглянемо u – перестановку з симетричної групи перестановок S_n. Нехай

$$F(x, c, u) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_{u(i)} . \qquad (8.4)$$

Основна проблема комбінаторної оптимізації полягає в тому, щоб знайти таку перестановку u_0, що $F(x, c, u_0) \le F(x, c, u)$ для довільного $u \in H$, де H – довільна не порожня підмножина симетричної групи S_n. Якщо $t \in S_n$, то позначимо $c^t = (c_{t(1)}, c_{t(2)}, ..., c_{t(n)})$, $x^t = (x_{t(1)}, x_{t(2)}, ..., x_{t(n)})$. Тоді виконується рівність $F(x,c) = F(c^t, x^t) = (c, x) = (c^t, x^t)$. Аналогічно $F(x,c,u) = F(x^t, c^t, u')$, де $u' = t^{-1}ut$ для всякого u з S_n. Отже, при розв'язанні основної проблеми завжди можна замінити пару (x,c) на пару (x^t, c^t). Зокрема, завжди можна вважати:

$$c_1 \le c_2 \le ... \le c_n, \qquad \text{(a)}$$

або

$$c_1 \ge c_2 \ge ... \ge c_n. \qquad \text{(б)}$$

Якщо $H = S_n$, то проблема розв'язана. Зрозуміло, що якщо має місце (а), то максимум функції $F(x,c,u)$ досягається для перестановки $u_0 = (1, 2, ..., n)$, а мінімум – для перестановки $u^* = (n, n-1, ..., 2, 1)$. У подальших дослідженнях передбачатиметься, що для коефіцієнтів c_i $(1 \le i \le n)$ завжди має місце (а). Розглянемо тепер детально структуру відповідних графів для невеликих значень n, яка описана в роботі [42]. Для n=3 граф зображений на рис. 8.1, де дуга, що виходить з перестановки p_i і що заходить в перестановку p_j рівносильна співвідношенню $F(x,c,p_1) = F(x,c,p_2)$.

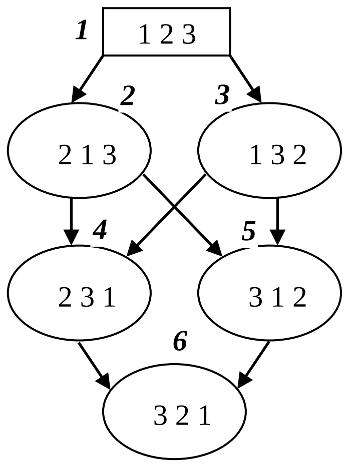


Рис. 8.1. Структура значень $F(x)$ для $n = 3$.

Розглянемо тепер граф $ї = 4$ для множини $A = \{1, 2, 3, 4\}$, за допомогою якого утворюється множина перестановок $P(A)$. Визначена функція $F(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4$, коефіцієнти якій впорядковані таким чином $c_1 \le c_2 \le c_3 \le c_4$ і приймають значення $\{1, 2, 3, 4\}$, а $y^* = F(x^*)$ значення функції в деякій точці.
Необхідно знайти

$$x^* = \arg \operatorname{extr} F(x) \text{, де } x^* \in P(A).$$

Представимо розкладання графа переставного многогранника $\Pi(A)$ на підграфи, згідно [42]. Стрілки указують перехід від точки до точки за спаданням значень цільових функцій на рис. 8.1.

Таким чином, можна зобразити всі підграфи, які одержані з A за допомогою однієї транспозиції. Слід відмітити, що у всіх графах однозначно визначається максимальне і мінімальне значення функції. І взагалі, всі графи є копією графа $G(A)$, так що їх можна в тому ж порядку помістити один під одним. Неважко помітити, що граф $G(B)$ виходить з графа $G(A)$, якщо в останньому у всіх перестановках зробити транспозицію елементів 4 і 3. Аналогічно граф $G(C)$ утворюється з графа $G(B)$, якщо в останньому зробити транспозицію (3, 2), а граф $G(D)$ з граф $G(C)$ після транспозиції (2, 1). Звідси випливає, що значення функції тим більше, чим вище знаходиться відповідний граф. Це можна представити схематично так

$$F(x)_{[A]} \ge F(x)_{[B]} \ge F(x)_{[C]} \ge F(x)_{[D]}. \qquad (8.5)$$

Якщо об'єднати всі підграфи, одержимо загальний граф переставного многогранника на рис. 8.2.

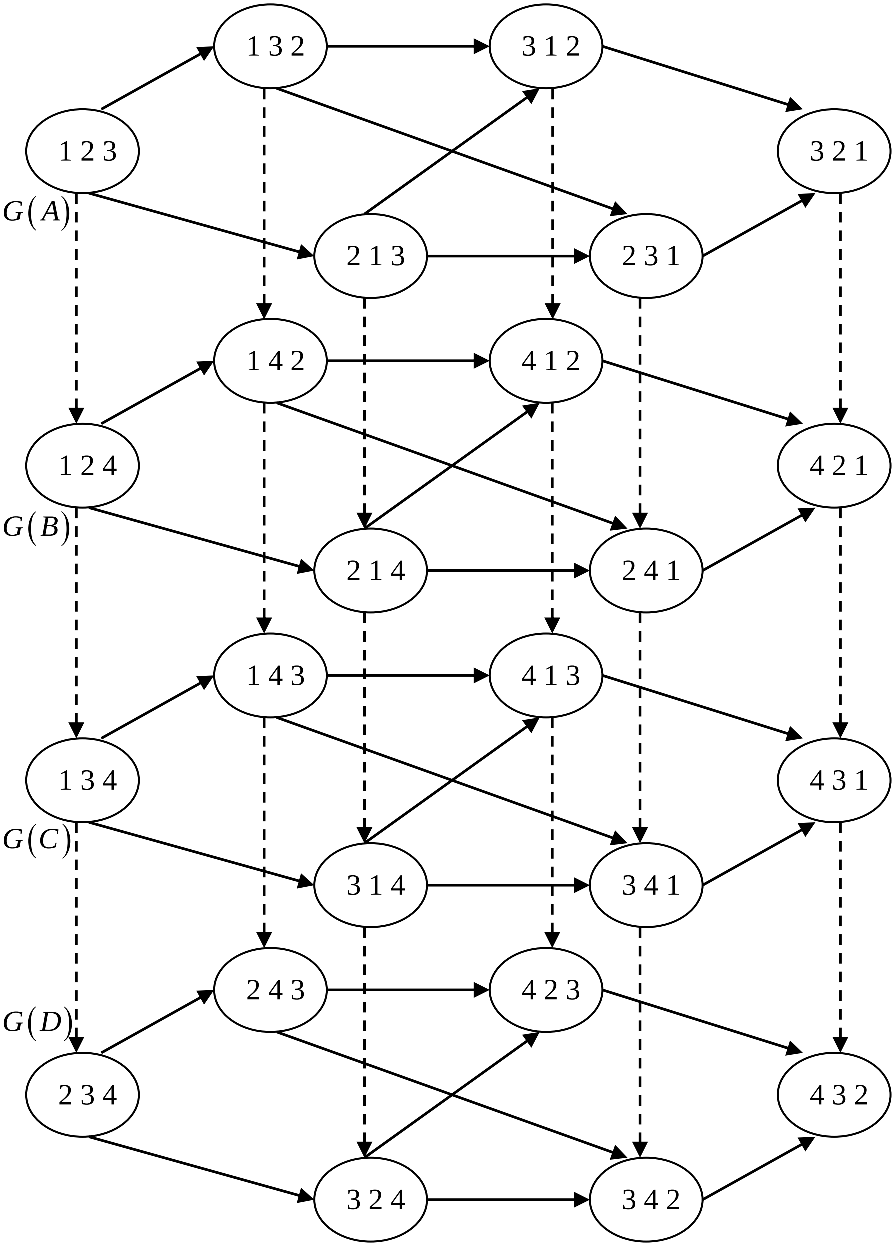


Рис. 8.2. Загальний граф $G(P_n)$ многогранника перестановок

На підставі вище висловлених міркувань і рис. 8.1, 8.2 можна зробити висновок, що точки множини перестановок $P(A)$ можна розкласти по паралельних гіперплощинах у порядку убування значень лінійної цільової функції $F(x)$ у цих точках.

Розкладання точок комбінаторної множини перестановок $P(A)$ при $n \geq 4$ забезпечує ієрархічне розташування цих точок по гіперплощинах A, B, C, D, (рис. 8.2) згідно значень цільової функції $y^* = F(x^*)$.

Означення 8.3. Назвемо підграфом r-рангу графа переставного многогранника $G(P_n)$ граф, вершини якого мають r фіксованих координат.

Для однокритеріальної задачі $F(x) = f(x)$ максимальне значення лінійної функції $f(x)$ на переставному многограннику $G(P_n)$ приймається в перестановці $(1, 2, ..., n)$ при упорядкуванні коефіцієнтів за зростанням, а мінімальне – у перестановці $(n, n-1, ..., 2, 1)$. Очевидно, що ця властивість зберігається і для підграфів, утворених підмножиною перестановок, у яких фіксовані останні k елементів. Але для графів многогранників досить часто виникає наступна задача:

визначити множину пар перестановок $(\underline{x}, \overline{x})$, для яких при заданому y

$$\overline{x} = \arg\min_{f(x) > y} f(x), \tag{8.6}$$

$$\underline{x} = \arg\max_{f(x) < y} f(x). \tag{8.7}$$

Очевидно, що обидві задачі можна вирішити, якщо на графі $G(P_n)$ добудувати множину дуг між несуміжними перестановками, що дозволяє пройти по дугах шлях від початкової вершини, де $f(x)$ приймає максимальне значення, до кінцевої, де $f(x)$ приймає мінімальне значення, при цьому необхідно відвідати всі інші вершини графа. Ця послідовність визначає гамільтонів шлях. Якщо відома послідовність перестановок, через які він проходить, то за допомогою дихотомії гамільтонового шляху, обчислюючи значення функції у відповідній перестановці, завжди можна локалізувати довільне значення цільової функції $f(x)$. З погляду теорії графів, багато комбінаторних задач оптимізації мають наступне формулювання: відшукати серед деякої множини шляхів L мінімальний (чи максимальний), тобто шлях, що має мінімальне (чи максимальне) значення λ. Як множина L може бути обрано, наприклад, множина усіх гамільтонових шляхів. Розглянемо теорему, що дає можливість визначити мінімальний і максимальний шляхи серед усіх простих шляхів, що з'єднують дві фіксовані вершини.

Теорема 8.3. Якщо деякий шлях у графі многогранника $G\left(P_n\right)$, що з'єднує вершину x рівня m і вершину x' рівня s, є мінімальним (максимальним), то його підшлях між вершиною y рівня k і вершиною y' рівня p підграфа r -рангу графа многогранника $G\left(P_n\right)$ $\left(m \le k < p \le s\right)$ також є мінімальним (максимальним).

Доведення теореми випливає з твердження [120], означення підграфа та його властивостей. Як відомо, підграфом графа $G\left(P_n\right)$ називається граф, у якого усі вершини і ребра належать $G\left(P_n\right)$, тоді зберігаються і такі властивості: якщо розглядати мінімальний чи максимальний шлях, що з'єднує вершину x рівня m і вершину x' рівня s, то його підшлях між вершиною y рівня k і вершиною y' рівня p $\left(m \le k < p \le s\right)$ також є мінімальним чи максимальним відповідно. Для графа переставного многогранника $G\left(P_n\right)$ ця властивість також виконується.

Доведена теорема лежить в основі методу відшукання максимальних шляхів у графі без контурів і дає можливість при побудові алгоритму локалізації значення розглянути підграфи графа $G(P_n)$. Задача (8.6), (8.7) визначена на вершинах графа, тоді знаходження відповідної вершини розглядаємо послідовно, починаючи з деякої початкової. Усі вершини графа розташовуємо в порядку спадання значень цільової функції в цих вершинах і приписуємо кожній вершині число, рівне мінімальному значенню функції $f\left(x\right)$. Для відшукання мінімальних шляхів у графах, що мають контури, також існують різні методи.

Розглянемо далі алгоритм методу локалізації значення лінійної функції на комбінаторних множинах перестановок і його застосування для розв'язання задачі (8.6), (8.7).

Загальна схема даного алгоритму полягає в наступному:

1) визначається комбінаторна множина і вибір способу генерування її елементів;

2) будується структурний граф многогранника обраної комбінаторної множини;

3) розбивається структурний граф на підграфи і визначається значення функції в крайніх точках підграфів;

4) знаходиться знак різниці між суміжними вершинами і визначається множина розв'язків шляхом перетину підмножин – вершин підграфів.

Далі сформулюємо більш конкретизований алгоритм на прикладі множини перестановок.

Початковий крок:

1) вводимо n – кількість елементів перестановки і розмірність цільової функції;

2) задаємо значення коефіцієнтів $c_1, c_2, ..., c_n$ цільової функції $f(x)$;

3) вводимо значення елементів множини перестановок: $a_1, a_2, ..., a_n$ причому введення здійснюється таким чином, щоб елементи були упорядковані в такий спосіб: $a_1 \le a_2 \le ... \le a_n$.

4) задаємо значення цільової функції $y_0 = f(x)$.

Крок 1. Обчислюємо $n!$

Крок 2. Визначаємо значення: $b = (n-1)!$, що характеризує кількість точок у структурному графі в кожному підграфі.

Крок 3. Обчислюємо мінімальне і максимальне значення заданої цільової функції $f(x)$: $f(x)_{\max} = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_{n-1}x_{n-1} + c_n x_n$; $f(x)_{\min} = c_n x_1 + c_{n-1}x_2 + ... + c_2 x_{n-1} + c_1 x_n$.

Крок 4. Будуємо структурний граф, що має n підграфів і по n вершин із двох сторін, а на кожному підграфі – початкову і кінцеву вершини.

Крок 5. Визначаємо значення цільової функції $f(x)$ в крайніх точках – вершинах підграфів $x = \left(x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_n}\right)$.

Крок 6. Визначаємо ліворуч у структурному графі множину точок, для яких виконується умова $f(\overline{x}_i) \ge f\left(x^0\right)$, де x^0 точка, для якого $f\left(x^0\right) \ge y^0$, а $\overline{x}_i, i \in N_k$, множина точок, значення цільової функції $f(x)$ в яких більше заданого.

Крок 7. Праворуч визначимо множину точок, що дають значення цільової функції згідно виконання умови: $f(\underline{x}_j) \le f(x^0)$, де x^0 – точка, для якої виконується умова $f(x^0) \le y^0$; а $\underline{x}_j, j \in N_{n-k}$, множина точок, для яких значення цільової функції $f(x)$ менше заданого.

Крок 8. Визначаємо множину підграфів як множину перетину, елементи якої задовольняють умові, сформульованій на кроці 6,7.

Крок 9. Формуємо множину точок – елементів перестановки, що задовольняють умові $f(x_0) = y_0$. Якщо всі точки знайдені, тобто серед множини підграфів визначеному на кроці 8 немає таких, для вершин яких виконувалася б умова $f(\underline{x}_j) \le y_0 \le f(\overline{x}_i)$, то задача розв'язана. Здійснюється вивід елементів точок перестановки. Інакше перехід на наступний крок.

Крок 10. Визначаємо підграф, для якого виконується умова $f(\underline{x}_j) \le y_0 \le f(\overline{x}_i)$, Фіксуємо останню координату в точці, вершині підграфа.

Крок 11. Присвоюємо $n := n-1$. Здійснюємо перехід на крок 1.

Слід зазначити, що генерація точок – вершин перестановок у крайніх вершинах підграфів здійснюється шляхом транспозиції одного елемента, причому з $n!$ елементів необхідно згенерувати тільки $2n$ на початковому етапі.

Алгоритм був програмно реалізований, проведені чисельні експерименти. Нижче наведений числовий приклад викладеного алгоритму.

Приклад 8.1. Задано**:** а) функція $f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$, де $n = 5$, тоді $f(x) = 4x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 9x_4 + 11x_5$; б) визначено значення функції $f(x^*) = 120$;

в) елементи множини перестановок – $(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ )$.

Знайти: точки – вершини переставного многогранника x^*, у яких досягається задане значення цільової функції.

Розв'язання: У даному прикладі коефіцієнти цільової функції упорядковані за зростанням, але в загальному випадку, якщо коефіцієнти не упорядковані, знаходимо перетворення для упорядкування коефіцієнтів цільової функції π:

$$f(x) = \tilde{c}_1x_1 + ... + \tilde{c}_nx_n \ , \ \tilde{c}_1 \le \tilde{c}_2 \le ... \le \tilde{c}_n, \text{ де}$$

$$\tilde{c}_i = c_{\pi^{-1}} \ , \ \sigma = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ 3\,6\,1\,5\,2 \end{pmatrix}, \ \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ 3\,5\,1\,6\,4 \end{pmatrix}:$$

$$\tilde{c}_1 = c_3; \ \tilde{c}_2 = c_5; \ \tilde{c}_3 = c_1; \ \tilde{c}_4 = c_6; \ \tilde{c}_5 = c_4.$$

$$\begin{matrix} \max := 4\cdot 1 + 6\cdot 2 + 8\cdot 3 + 9\cdot 4 + 11\cdot 5 = 131, \\ \min := 4\cdot 5 + 6\cdot 4 + 8\cdot 3 + 9\cdot 2 + 11\cdot 1 = 97 \end{matrix} .$$

Згідно алгоритму, визначимо крайні точки підграфів і знаходимо в них значення цільової функції. Зобразимо це на рисунку:

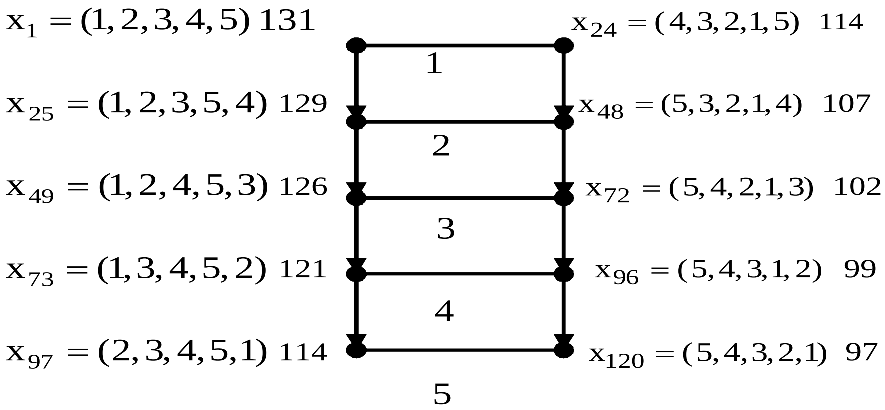


Рис. 8.3. Структурний граф переставного многогранника

На рис. 8.3 зображений структурний граф, що містить п'ять пронумерованих підграфів рангу $r=1$, де відмічені крайні точки підграфів і значення цільової функції в них. Ліворуч знаходяться вершини, у яких досягається максимальні значення цільової функції на підграфі, праворуч – вершини, у яких досягається мінімальне значення функцій. Слід зазначити, що значення функції визначаються підстановкою точки в цільову функцію вигляду

$$f(x)=4x_1+6x_2+8x_3+9x_4+11x_5 .$$

Крайні точки на рис. 8.3 визначені згідно представлення графа переставного многогранника. Вибір відповідної структури даних для представлення графів має принциповий вплив на ефективність алгоритмів. Покажемо спосіб представлення і коротко розберемо його. В умові задачі визначається точка, у якій досягається задане значення цільової функції, а згідно рис. 8.3 таких крайніх точок немає, відповідно, необхідно визначити інтервал, у якому може знаходитися така вершина, що забезпечить задане значення. Отже, пошук значення здійснюється на наступному, що вище розташований, підграфі рангу $r=1$, для точок якого значення знаходиться в межах $99 \le f(x) \le 121$. Для цього підграфу характерною є умова, остання координата точок – вершин підграфа дорівнює $x_5=2$. Далі розглянемо у вигляді таблиці значення функції у вершинах підграфа, зафіксувавши останню координату $x_5=2$:

Таблиця 8.1

x1	x2	x3	x4	x5	f(x)	x1	x2	x3	x4	x5	f(x)
1	3	4	5	2	**121**	4	3	1	5	2	**109**
1	3	5	4	2	**120**	5	3	1	4	2	**104**
1	4	5	3	2	**117**	5	4	1	3	2	**101**
3	4	5	1	2	**107**	5	4	3	1	2	**99**

Наступний крок: відповідно до таблиці 8.1, виділимо точку $x_1^0 = (1,3,5,4,2)$, у якій досягається необхідне значення цільової функції. Відкидаємо три нижніх підграфа, розглядаємо верхній підграф рангу $r = 2$, для точок, у яких останні дві координати рівні: $x_4 = 5$; $x_5 = 2$, тому що у відкинутих не знайдуться точки, що задовольняють умову $f(x) = 120$. Визначимо значення функції $f(x)$ в крайніх точках підграфа:

Таблиця 8.2

4	6	8	9	11	f(x)	4	6	8	9	11	f(x)
1	3	4	5	2	**121**	3	1	4	5	2	**117**
1	4	3	5	2	**119**	4	1	3	5	2	**113**
3	4	1	5	2	**111**	4	3	1	5	2	**109**

Далі, робимо аналогічну процедуру порівняння отриманих значень цільової функції в крайніх точках із заданим значенням $f(x) = 120$ відповідно до умови задачі і розглянемо верхній підграф.

Знову, визначаємо значення цільової функції $f(x)$ в точках – крайніх вершинах підграфа структурного графа (рис. 8.3), у якому $x_5 = 3$.

Таблиця 8.3

x1	x2	x3	x4	x5	f(x)	x1	x2	x3	x4	x5	f(x)
1	2	4	5		126	4	2	1	5	3	114
1	2	5	4	3	125	5	2	1	4	3	109
1	4	5	2	3	119	5	4	1	2	3	103
2	4	5	1	3	114	5	4	2	1	3	102

З таблиці 8.3 необхідно вибрати і розглянути два верхніх підграфа рангу $r = 2$, для кожного з яких виконуються умови відповідно: а) $x_4 = 5$, $x_5 = 3$, б) $x_4 = 4$, $x_5 = 3$.

Таблиця 8.4

x4=5, x5=3						**x4=4, x5=3**					
4	6	8	9	11	**f(x)**	4	6	8	9	11	**f(x)**
1	2	4	5	3	**126**	1	2	5	4	3	**125**
1	4	2	5	3	**122**	1	5	2	4	3	**119**
2	4	1	5	3	**118**	2	5	1	4	3	**115**
2	1	4	5	3	**124**	2	1	5	4	3	**123**
4	1	2	5	3	**116**	5	1	2	4	3	**111**
4	2	1	5	3	**114**	5	2	1	4	3	**109**

Розглянемо далі підграф структурного графа (рис. 8.3), у якому значення останньої координати дорівнює $x_5 = 4$.

Таблиця 8.5

4	**6**	**8**	**9**	**11**	**f(x)**	**4**	**6**	**8**	**9**	**11**	**f(x)**
1	2	3	5	4	**129**	3	2	1	5	4	**121**
1	2	5	3	4	**127**	5	2	1	3	4	**111**
1	3	5	2	4	**124**	5	3	1	2	4	**108**
2	3	5	1	4	**119**	5	3	2	1	4	**107**

На підставі розрахунків таблиці 8.5, розглянемо розкладання точок по підграфам, у яких значення останньої і передостанньої координат є постійне і рівні відповідно: а) $x_4 = 3$, $x_5 = 4$; б) $x_4 = 2$, $x_5 = 4$, і визначимо значення цільової функції в крайніх точках цих підграфів.

Таблиця 8.6

x4=3, x5=4						**x4=2, x5=4**					
4	6	8	9	11	**f(x)**	4	6	8	9	11	**f(x)**
1	2	5	3	4	127	1	3	5	2	4	124
1	5	2	3	4	121	1	5	3	2	4	120
2	5	1	3	4	117	3	5	1	2	4	112
2	1	5	3	4	125	3	1	5	2	4	120
5	1	2	3	4	113	5	1	3	2	4	112
5	2	1	3	4	111	5	3	1	2	4	108

Одержимо значення в двох точках – розв’язок задачі, далі розглянемо підграф структурного графа, у якому x5=5 і значення функції в його крайніх точках.

Таблиця 8.7

x5=5					**f(x)**						**f(x)**
1	2	3	4	5	131	3	2	1	4	5	123
1	2	4	3	5	130	4	2	1	3	5	118
1	3	4	2	5	127	4	3	1	2	5	115
2	3	4	1	5	122	4	3	2	1	5	114

На підставі таблиці 8.7, є доцільним далі розглядати три нижніх підграфа рангу $r = 2$.

Таблиця 8.8

x4=3, x5=5						**x4=2, x5=5**							**x4=1, x5=5**				
4	6	8	9	11	**f(x)**	4	6	8	9	11	**f(x)**	4	6	8	9	11	**f(x)**
1	2	4	3	5	130	1	3	4	2	5	127	2	3	4	1	5	122
1	4	2	3	5	126	1	4	3	2	5	125	2	4	3	1	5	120
2	4	1	3	5	122	3	4	1	2	5	117	3	4	2	1	5	116
2	1	4	3	5	128	3	1	4	2	5	123	3	2	4	1	5	120
4	1	2	3	5	120	4	1	3	2	5	119	4	2	3	1	5	116
4	2	1	3	5	118	4	3	1	2	5	115	4	3	2	1	5	114

За розрахунками, що вище викладені в таблицях згідно алгоритму, одержимо розв'язки, що доставляють значення функції $f(x) = 120$.

Розв'язками задачі, що задовольняють умову $f(x) = 120$ будуть такі точки:

Таблиця 8.9

x1	**x2**	**x3**	**x4**	**x5**	**f(x)**
1	3	5	4	2	120
1	5	3	2	4	120
4	1	2	3	5	120
3	1	5	2	4	120
2	4	3	1	5	120
3	2	4	1	5	120

Отже, запишемо їх в наступному вигляді: $x_1^0 = (1,3,5,4,2)$, $x_2^0 = (1,5,3,4,2)$, $x_3^0 = (3,1,5,2,4)$, $x_4^0 = (4,1,2,3,5)$, $x_5^0 = (2,4,3,1,5)$, $x_6^0 = (3,2,4,1,5)$.

Слід зазначити, що значення функції зростає і убуває з однаковим інтервалом при рівномірному розподілі значень коефіцієнтів.

Даний приклад пояснює принцип роботи алгоритму і дає можливість зрозуміти й оцінити його числову ефективність. Розглянемо застосування вище викладеного методу для багатокритеріальних задач на комбінаторних множинах.

8.4. Розв'язування комбінаторних задач з використанням графів в умовах багатокритеріальності

В даному розділі розглядаються задачі багатокритеріальної комбінаторної оптимізації та їх розв'язання за допомогою теорії графів, зокрема, метод розв'язання дискретних багатокритеріальних задач із застосуванням графів з урахуванням комбінаторних властивостей множини альтернатив.

Задача векторної оптимізації звичайно визначається як обчислювальна проблема, у якій задана множина альтернатив $X=\{x\}$, векторна цільова функція $F(x): X \to R$, де $F(x)=(f_1(x),..., f_i(x),..., f_l(x))$ складається із часткових критеріїв $f_i(x) \to \max, i \in N_l$ і потрібно знайти альтернативу $x^0 \in X$, на якій ця цільова функція приймає екстремальне значення: $F\left(x^0\right)=\underset{x \in X}{\operatorname{extr}} F(X)$, $extr \in \{\min, \max\}$. Для задач оптимізації альтернативи $x \in X$ звичайно називають допустимими розв'язками, x^0 – оптимальний розв'язок, $X=\{x\}$ – множиною допустимих розв'язків. Якщо множина X дискретна, то відповідна задача оптимізації називається задачею дискретної оптимізації.

У даному розділі розглядається випадок, коли X – комбінаторна множина розміщень. $F(x)=(f_1(x),..., f_i(x),..., f_l(x))$ – векторний критерій, заданий на множині $A(B)$ розміщень, породжуваних деякою скінченною мультимножиною $B=\{b_1, b_2, ..., b_q\}$. Тоді задача має вигляд: $Z(F, X)$.

Задача може містити також додаткові лінійні обмеження, які утворять опуклу многогранну множину $D \subset R^n$ вигляду: $D=\{x \in R^n \mid Gx=h\}$, де $G \in R^{m \times n}$, $h \in R^m$.

Як відомо, розміщенням з q елементів по n називається впорядкований набір з n елементів із мультимножини $B=\left\{b_1,b_2,...,b_q\right\}$.

Варто зазначити, що в цьому випадку поняття оптимуму має наступне означення: допустимий розв'язок x^0 оптимальний, якщо він мінімізує (або максимізує) цільову функцію на $X: F\left(x^0,b\right)=\min\limits_{x\in X} F\left(x,b\right)$ або $F\left(x^0,b\right)=\max\limits_{x\in X} F\left(x,b\right)$, де X містить елементи множини розміщень $A(B)$.

З огляду на зв'язок між перестановками й розміщеннями, для елементів множини розміщень можна побудувати подібний граф многогранника розміщень $M_q^n\left(B\right)$. Далі $M_q^n\left(B\right)=M$.

Нехай існує граф $G\left(B\right)$ деякого многогранника розміщень M.

Опишемо побудову графа $G\left(B\right)$ для розміщення з 4 елементів по 3. Для зручності подальшого викладу і розуміння, елементи множини розміщення – точки пронумеруємо від 1 до 24 тому що їх буде саме 24, і будемо їх називати вершинами $p_i, i\in N_{24}$ графа $G\left(B\right)$, які будуть розміщатися в чотирьох підграфах $G_1\left(B\right)$, $G_2\left(B\right)$, $G_3\left(B\right)$, $G_4\left(B\right)$, залежно від вибору елементів із множини B. Тоді для підграфів графа $G\left(B\right)$ виконуються наступні умови $X_1\subseteq X, X_2\subseteq X$, $X_3\subseteq X, X_4\subseteq X$, $U_1\subseteq U, U_2\subseteq U, U_3\subseteq U, U_4\subseteq U$, де $X, X_i, i\in N_4$ – множина вершин; $U, U_i, i\in N_4$ – множина ребер. У підграфі $G_1\left(B\right)$, що розташований у верхній частині графа $G\left(B\right)$ вершини утворені з елементів мультимножини $B=\left\{b_1,b_2,...,b_q\right\}$, упорядкованих за не зростанням, починаючи з максимального, (2, 3, 4), які утворюють елементи множини розміщень. Наступний підграф $G_2\left(B\right)$ можна побудувати шляхом заміни мінімального серед них елемента на ще менший, тобто вибирається підмножина (1, 3, 4) і генеруються вершини. Аналогічним чином будуються підграфи: $G_3\left(B\right)$, вершини яких утворюються шляхом генерації елементів (1, 2, 4) і $G_4\left(B\right)$ – вершини утворюються з (1, 2, 3). Далі розглянемо будь-який частковий критерій $f(x)=f_i(x)$, $i\in N_l$ вектор-функції $F\left(x\right)$. Вектор коефіцієнтів функції

$f(x)=\sum_{j=1}^{n}\left\langle c_j,x\right\rangle$ позначимо $\vec{c}=\left(c_j\right)$, $j\in N_n$, де $c_1\le c_2\le\ldots\le c_n$, $i\in N_n$. Тоді значення функції $f(x)$ в довільній точці $p_i(1\le i\le 24)$ визначається як скалярний добуток $f(p_j)=\left\langle p_j,c_j\right\rangle$.

Далі розглянемо побудову вершин у підграфах. Слід зазначити, що граф $G_1(B)$ можна побудувати індуктивним способом, починаючи із двох перших елементів розміщення, аналогічно графу перестановок [42]. Розглянемо одну цікаву властивість у вигляді леми, що будемо використовуватися для побудови графа.

Лема 8.3. Із двох суміжних вершин p_i,p_j многогранника розміщень M функція $f(x)$ приймає не менше (більше) значення для тієї вершини, у якій максимальний з двох елементів, що різняться, перебуває праворуч, за умови, що коефіцієнти цільової $f(x)=\sum_{j=1}^{n}\left\langle c_j,x\right\rangle$ функції впорядковані таким чином $c_1\le c_2\le\ldots\le c_n$ $i\in N_n$.

Розглянемо вершини p_1 й p_2, які розміщені на деякому підграфі $G_1(B)$ графа $G(B)$. Нехай маємо вершину $p_1=\left(2,3,4\right)\in G_1\left(B\right)$, тоді p_2 утворена із p_1 шляхом транспозиції елементів 1 і 2. Відповідно до леми 8.3 одержимо співвідношення значень цільової функції в цих точках: $f(p_1)\ge f(p_2)$. Якщо тепер у вершинах p_1, p_2 поміняти місцями елементи 2 і 3, то одержимо вершини p_3 й p_5, для яких виконується співвідношення $f(p_3)\ge f(p_5)$. Крім того, за лемою 8.3 одержуємо $f(p_1)\ge f(p_3)$ й $f(p_2)\ge f(p_5)$. Аналогічно, шляхом транспозиції елементів 1 і 3 одержимо з p_2 вершину p_4, а з p_4 транспозицією елементів 2, 3 вершину p_6. У результаті цих дій одержимо повний підграф $G_1(B)$, що містить всі елементи множини розміщень M, отримані з елементів $\left(2,3,4\right)$. Очевидно, що в підграфі $G_1(B)$ функція $f(x)$ приймає максимальне значення у вершині p_1 й мінімальне – у вершині p_6 (при впорядкуванні елементів множини розміщень і коефіцієнтів цільової функції за зростанням).

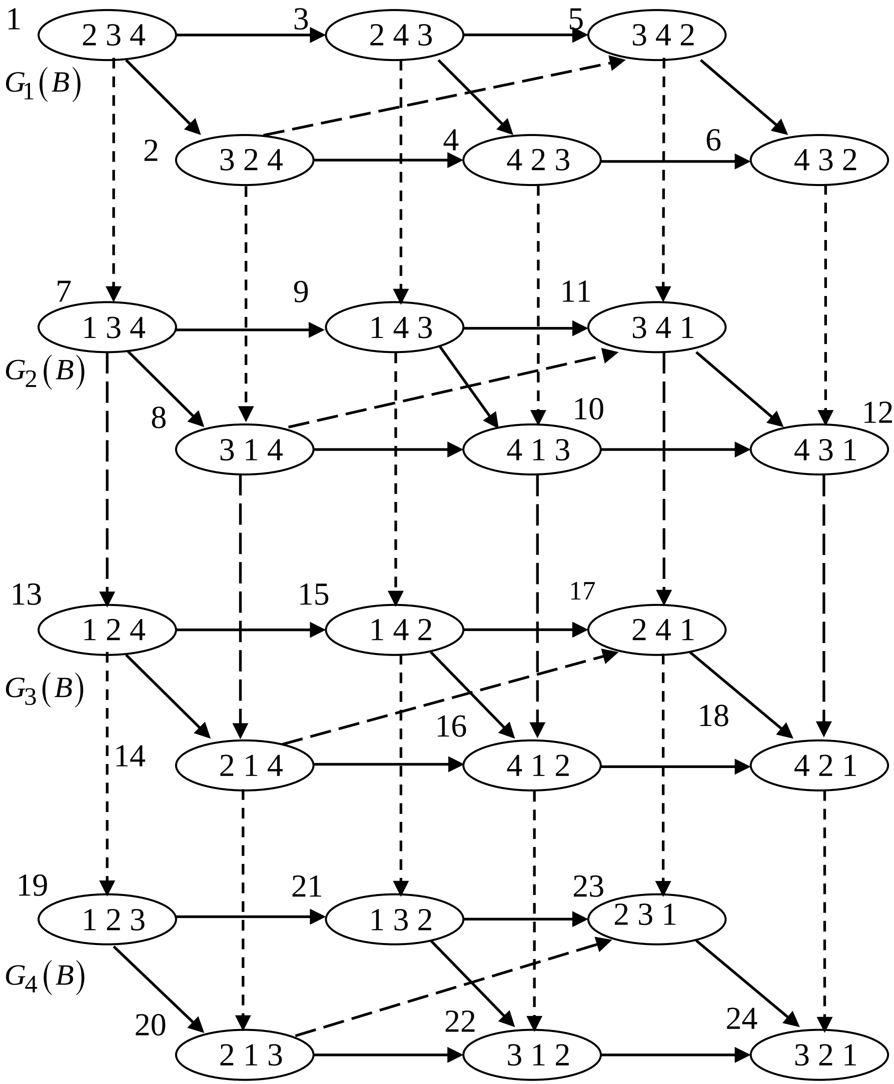


Рис. 8.4. Представлення графа многогранника розміщень M

Шлях (маршрут) на кожному підграфі графа $G(B)$ визначається послідовністю вершин і ребер для першого підграфа $G_1(B)$ відповідно: $p_1u_1p_2u_2p_3u_3p_4u_4p_5u_5p_6u_6$, для другого $G_2(B)$ – послідовністю $p_7u_7p_8u_8p_9u_9p_{10}u_{10}p_{11}u_{11}p_{12}u_{12}$, для третього $G_3(B)$ – послідовністю $p_{13}u_{13}p_{14}u_{14}p_{15}u_{15}p_{16}u_{16}p_{17}u_{17}p_{18}u_{18}$, для четвертого $G_4(B)$ – послідовністю $p_{19}u_{19}p_{20}u_{20}p_{21}u_{21}p_{22}u_{22}p_{23}u_{23}p_{24}u_{24}$, де $p_i \in \operatorname{vert} M$, $u_i \in U, i \in N_{24}$. Ребро u_i з'єднує вершину p_i з вершиною p_{i+1}, тобто виконується відношення інцидентності $\Phi(p_i, u_i, p_{i+1})$. У кожному підграфі $G_i(B), i \in N_4$, визначається гамільтонів цикл, що містить всі вершини підграфа.

Для подальшого викладу матеріалу розглянемо деякі цікаві властивості описаного графа $G(B)$ многогранника розміщень згідно (рис. 8.4).

Говорячи про яку-небудь задачу на графі $G(B)$, її допустимий розв'язок позначимо через x, маючи на увазі, що $x = (X_x, U_x)$ – це задовольняючий певним умовам підграф графа $G(B)$ із множиною вершин $X_x \subseteq X$, де X – множина вершин графа $G(B)$ і множиною ребер $U_x \subseteq U$ – множиною всіх допустимих розв'язків цієї задачі. Для розглянутої задачі множина всіх допустимих розв'язків $X = \operatorname{vert} M$.

Оскільки побудова даного графу подібна графу переставного многогранника, що описаний у роботі [42], виходячи з теореми 8.4, то доцільно стверджувати, що граф $G(B)$ складається з підграфів, які є скінченними й ізоморфні між собою (рис. 8.4).

Граф $G(B)$ можна розглядати як скінченний граф, що є об'єднанням чотирьох підграфів $G_1(B) = (X_1, U_1)$, $G_2(B) = (X_2, U_2)$, $G_3(B) = (X_3, U_3)$, $G_4(B) = (X_4, U_4)$, де $X_1, X_2, X_3, X_4 \in \operatorname{vert} M$ й для $G = (X, U)$, $\operatorname{vert} M = X = X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup X_4$, $U = U_1 \cup U_2 \cup U_3 \cup U_4$.

Означення 8.4. $G_1 = (X_1, U_1, \Phi_1)$ і $G_2 = (X_2, U_2, \Phi_2)$ називаються ізоморфними $(G_1 \cong G_2)$, якщо існують дві взаємно однозначних відповідності $\varphi: X_1 \to X_2$ й $\psi(U_1 \to U_2)$, що зберігають відношення інцидентності: $\Phi_2(\varphi(x_1), \psi(u_1), \varphi(y_1)) = \Phi_1(x_1, u_1, y_1)$.

Слід зазначити, що $G_1(B)=(X_1,U_1)$, $G_2(B)=(X_2,U_2)$, $G_3(B)=(X_3,U_3)$, $G_4(B)=(X_4,U_4)$ графи попарно ізоморфні, тому що між їх вершинами й ребрами існує взаємно однозначна відповідність.

З означення слідує, що ізоморфні графи можна однаково зображувати графічно й відрізнятися вони будуть тільки мітками вершин, що й позначено на рис. 8.4.

Означення 8.5. Граф називається орієнтованим (орграф), якщо кожне його ребро орієнтоване:

$$\forall x \neq y \in X \ \forall u \in U \ \Phi(x,u,y) \Rightarrow \neg\Phi(y,u,x).$$

Перетворимо неорієнтований граф $G(B)$ в орієнтований – заміною кожного неорієнтованого ребра парою орієнтованих ребер.

Для цього розглянемо шістки точок – вершини підграфів графа $G(B)$, які можна представити на площині у вигляді плоского (планарного) графа, так само як і для графа переставного многогранника [42]. Причому для кожної шістки вершин можна побудувати гамільтонів шлях. Для довільних n граф $G(B)$ розкладається на підграфи, де найменший складається із множини вершин і дуг, що з'єднує ці вершини, та знову приводить до розгляду підграфів вигляду $G_1(B), G_2(B), G_3(B), G_4(B)$.

З огляду на властивості графа $G(B)$ розглянемо алгоритм розв'язання задачі $Z(F,X)$ на графі елементів множини розміщень. В алгоритмі використовується розв'язання підзадачі, що полягає в знаходженні множини точок – вершин графа за екстремальними значеннями цільових функцій $G_1(x)=\sum_{i=1}^{n} g_{ij}x_i = h_i, i \in N_m, j \in N_n$ на основі методу ділення відрізка навпіл (методу дихотомії) використовуючи властивості графа $G(B)$.

Алгоритм розв'язання векторної задачі на множині розміщень

Нехай $G(B)=(X,U)$ − граф, задана також множина підграфів $\{G_1,...,G_q\}$. Допустимий розв'язок x визначається як підграф $x=(X_x,U_x), X_x \subseteq X, U_x \subseteq U$, у якому кожний компонент зв'язності ізоморфний графу $G(B)$, де X – множина допустимих розв'язків на графі. З огляду на багатокритеріальність заданої задачі, зазначимо що її необхідно звести до однокритеріальної задачі.

Для цього застосуємо відомий алгоритм лінійної згортки. Ці алгоритми базуються на наступному відомому факті: при додатньо-визначеній вектор-цільової функції елемент $x \in X$, максимізуючий лінійну згортку $F^{\lambda}(x)$, є Парето-оптимальним. Далі загальна ідея запропонованого методу розв'язання задачі $Z(F, X)$ полягає в послідовному розгляді підзадач, кожна з яких містить функції з вектор-функції й функції-обмеження.

Алгоритм

Початковий крок. Вважаємо $s=0$. Зведемо багатокритеріальну задачу $Z(F,G)$ на графі $G(B)$ многогранника розміщень до однокритеріальної за допомогою лінійною згортки: задаємо вагові невід'ємні коефіцієнти $\lambda_j, j \in N_l$, які визначають ступінь важливості кожного критерію, і максимізуємо лінійну комбінацію цільових функцій, тобто розв'язуємо задачу

$$Z(f, G^s), \text{ де } f(x) = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i \langle c_i, x \rangle,\ \lambda_i \geq 0,\ i \in N_l,\ \sum_{i=1}^{l} \lambda_i = 1,\ G^s = R^n .$$

У випадку, якщо який-небудь із коефіцієнтів $\lambda_i = 1$, а всі інші $\lambda_j = 0$, $i \neq j$, $i, j \in N_l$, то розглядається однокритеріальна задача з i-ю цільовою функцією.

Задаємо елементи множини $B = \{b_1, b_2, ..., b_q\}$, які впорядковані таким чином $b_1 \leq b_2 \leq ... \leq b_q$, і задаємо коефіцієнти цільової функції $c_1, c_2, ..., c_n$.

Основна частина.

Крок 1. Упорядкуємо коефіцієнти $\lambda_i \cdot c_i$, $i \in N_l$, цільової функції $f(x) = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i \langle c_i, x \rangle$ у такий спосіб: $\lambda_1 c_1 \leq \lambda_2 c_2 \leq ... \leq \lambda_n c_n, i \in N_n$.

Крок 2.Визначаємо мінімальні і максимальні значення цільової функції $f(x) = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i \langle c_i, x \rangle$, обчислюємо значення $f(x^*_{\min})$, $f(x^*_{\max})$ на загальному графі многогранника $G(B)$ й на кожному з підграфів

$G_1(B)$, … , $G_n(B)$.

Крок 3. $k=0$. Вибираємо одне з додаткових обмежень $h_i = \sum_{i=1}^{m} g_{ij} x_i$, $i \in N_m, j \in N_n$ присвоюємо $k = k+1$, якщо $k = m$, тобто всі обмеження обрані, то переходимо на крок 10. Інакше, задаємо коефіцієнти додаткового обмеження k: $g_{ij}, i \in N_m, j \in N_n, k = k+1, i := k - i$. Будуємо решітки для перетворення індексів коефіцієнтів (упорядковуємо коефіцієнти):

$$U_k = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix} \Rightarrow U'_k = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \alpha'_1 & \alpha'_2 & \alpha'_3 & \alpha'_4 \end{pmatrix}$$

Крок 4.Перетворюємо додаткове обмеження в обмеження вигляду: $\tilde{g}_{ij}(x) = U_i g_{ij}(x) \geq h_i$, у якому коефіцієнти впорядковані по зростанню.

Крок 5. Визначаємо $\tilde{g}_k(x^*{}_{\max}) = \max$, $\tilde{g}_k(x^*{}_{\min}) = \min$ на графі $G(B)$.

Крок 6. Знаходимо значення функції додаткового обмеження $\tilde{g}_{ij}(x)$ в лівих крайніх точках $p_{i_{left}}$, які визначають max значень функції $\tilde{g}_k(x)$ на кожному підграфі $G_1(B)$, … , $G_n(B)$ графа (рис. 8.1).

Крок 7. Порівнюємо виконання обмежень $\tilde{g}_q(x) \geq b_q$, якщо умова виконується, запам'ятовуємо $p_{i_{left}}$ й переходимо на наступний крок 8. Інакше на крок 9.

Крок 8. Знаходимо значення функції – додаткового обмеження в точках $p_{i_{rite}}$ (точки, які визначають min значення $\tilde{g}_k(x)$ на кожному підграфі). Ділимо відрізок, що визначається точками $p_{i_{rite}} \leq g_q(x) \leq p_{i_{left}}$ на кроці 6, 7 навпіл і одержуємо точку $\bar{x}^* = \left(p_{i_{left}} - p_{i_{rite}}\right) / 2$. Переходимо на наступний крок.

Крок 9: Перевіряємо виконання перетвореного додаткового обмеження $g_k(x) \geq b_k$, підставивши значення точки $\bar{x}^*$ із множини розміщень $A(B)$. Якщо нерівність виконується, то запам'ятовуємо потрібний відрізок $[\bar{x}^*, p^*{}_{\min}]$ або $[p^*{}_{\max}, \bar{x}^*]$. Перевіряємо виконання умови $k = m$, якщо не виконується, то переходимо на крок 3. Інакше на наступний крок.

Крок 10. Для всіх додаткових обмежень шукаємо підграф, що визначається множиною вершин і обчислюємо на ньому $\min$ або $\max$ значень цільової функції $f(x)$. Задача розв'язана, якщо значення цільової функції знаходяться в точках на перетині і визначають об'єднання вершин підграфів $G_1(B), \ldots, G_n(B)$. Інакше – задача нерозв'язна.

Таким чином, результатом роботи алгоритму є підграф $x^0 = (X, U, \Phi)$ вихідного графа $G(B) = (X, U, \Phi)$. x^0 – Парето-оптимальний розв'язок задачі $Z(F, X)$. Оскільки розв'язки задачі шукається на скінченній дискретній множині розміщень, то можна гарантувати знаходження хоча б одного Парето-оптимального розв'язку $\tilde{x}$ задачі $Z(F, X)$ з вектор-цільовою функцією, а відповідно, застосування алгоритму до даного графа $G(B)$, у якого складність знаходження $\tilde{x}$ становить $O\left(mn^2\right)$.

Висновки до розділу 8

Досліджено складні задачі на комбінаторній множині розміщень із багатьма критеріями. Розглянуто деякі властивості допустимої області комбінаторної задачі, що має специфічні вхідні дані. Побудовано й обґрунтований метод локалізації лінійної функції на комбінаторній множині розміщень з застосуванням теорії графів та властивостей графів многогранників.

РОЗДІЛ 9. ПОБУДОВА МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ДЕЯКИХ ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ ЯК ВЕКТОРНИХ ЗАДАЧ КОМБІНАТОРНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ

Значна кількість важливих прикладних задач описується математичними моделями з двома і більше цільовими функціями, визначеними на комбінаторних множинах. Новим теоретичним підходом до розв'язування задач проектування автоматизованих систем управління та інформаційних технологій є методи комбінаторної оптимізації, що застосовуються до розв'язання векторних моделей комбінаторних задач. Висока ступінь абстракції і розв'язання комбінаторних задач дозволяє використовувати їх при проектуванні технічних і програмних засобів комп'ютерних технологій та вирішувати інші важливі прикладні задачі.

Розглянемо деякі прикладні задачі з різних сфер людської діяльності, математичними моделями яких є задачі комбінаторної оптимізації з векторним критерієм.

9.1. Задача максимізації швидкості передачі інформації та якості відображення

Розглянемо систему, яка здійснює накопичення інформації по предметних областях (портал) і переміщення інформації на персональні комп'ютери (сервери, робочі станції, термінали та ін.).

Нехай маємо m предметних областей $A_i, i \in N_m$, кожна з яких має об'єм, який вимірюється певною кількістю одиниць інформації a_i^k k-го виду, $k \in N_p$, $a_i^k \in A$, тобто a_i^k є елементом мультимножини $A = \{a_1, ..., a_s\}$, $s = mp$. Інформація розподіляється між n персональними комп'ютерами $B_j, j \in N_n$, на кожного з яких виділено не менше, ніж b_j^s одиниць інформації певної предметної області k-го виду, де $k \in N_p$. Швидкість передачі одиниці k-го виду інформації з певної предметної області $A_i, i \in N_m$ на персональних комп'ютерах $B_j, j \in N_n$, рівні θ_{ij}^k, а коефіцієнт якості представлення одиниці k-го виду інформації певної предметної області $A_i, i \in N_m$, за умови, що вона відображається якісно на персональних комп'ютерах $B_j, j \in N_n$ дорівнює d_{ij}^k.

Потрібно визначити такий план передачі і завантаження об'єму x_{ij}^k, інформації k-го виду $k \in N_p, i \in N_m, j \in N_n$ з предметних областей $A_i, i \in N_m$, на персональних комп'ютерах $B_j, j \in N_n$, щоб сумарні швидкості передачі були максимальними та максимізувався сумарний якісний коефіцієнт завантаження.

Під сумарним якісним коефіцієнтом завантаження будемо розуміти суму якісних коефіцієнтів завантаження кожної предметної області порталу. Якість предметної області, як правило, оцінюється експертами (отримання і обробка експертних оцінок – окрема задача, яка в даному випадку не розглядається) однак апріорно можна сказати, що чим вища якість представлення предметної області, тим більший об'єм оперативної пам'яті для цього вимагається, тому будемо вважати, що якісний коефіцієнт завантаження визначається певним об'ємом оперативної пам'яті, заданим заздалегідь.

Математична модель. Необхідно визначити

$$f_1(x) = \min \sum_{k=1}^{p} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \theta_{ij}^k x_{ij}^k, \quad f_2(x) = \max \sum_{k=1}^{p} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} d_{ij}^k x_{ij}^k,$$

за наступної комбінаторної умови, яка враховує переставні властивості області допустимих розв'язків задачі:

$$x = \left(x_{11}^1, x_{12}^1, \ldots, x_{1n}^1, \ldots, x_{1p}^p, \ldots, x_{mp}^p\right) = \left(x_1, \ldots, x_s\right) \in P_{s\eta}(A),$$

та при додаткових обмеженнях:

– на об'єми завантаження інформації визначеного вигляду на кожний персональний комп'ютер $\sum_{i=1}^{m} x_{ij}^k \le b_i^k$, де $j \in N_n, k \in N_p$.

Представлена вище модель задачі дозволяє мінімізувати швидкість пошуку потрібної інформації для користувача і зекономити його ресурси.

9.2. Задача обчислення на суперкомп'ютері

Розглянемо кластерний суперкомп'ютер, що здійснює великий обсяг паралельних обчислень за певними програмами. Основними характеристиками кластера будемо вважати процесор і оперативну пам'ять. Деякі програми вимагають для обробки даних відповідного обсягу оперативної пам’яті й швидкість виконання.

Необхідно так розподілити програми по кластерах, щоб загальна продуктивність і завантаженість кластерного суперкомп’ютера були максимальними й кожна програма виконувалася на окремому кластері.

Математична модель. Нехай маємо кластерний суперкомп’ютер, що складається із m кластерів A_i, кожний з яких характеризується обсягом оперативної пам’яті або тактовою частотою a_i, $i \in N_m$.

Потрібно одночасно завантажити на виконання n програмних комплексів B_j, $j \in N_n$, кожний з яких характеризується обсягом оперативної пам’яті або швидкістю виконання b_j.

Продуктивність p_{ij}^k, $i \in N_m$, $j \in N_n$ кластерного суперкомп’ютера визначається кількістю операцій, здійснених за секунду кожним процесором відповідних кластерів при виконанні k-ї програми j-го програмного комплексу.

Зайнятим будемо називати i-й кластер при виконанні k-ї програми j-го програмного комплексу, завантажений на 100 %. Тоді завантаженість визначається як різниця $d_{ij} = 100 - d_{ij}^c$, де d_{ij}^c – поточна зайнятість кластера (у відсотках) при виконанні k-ї програми j-го програмного комплексу на i-му кластері $i \in N_m$, $j \in N_n$.

Змінна x_{ij}^k, $k \in N_p \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$, $i \in N_m$, $j \in N_n$ характеризується обсягом оперативної пам’яті, необхідної для виконання k-ої програми j-го програмного комплексу на i-му кластері, і може приймати будь-яке значення з мультимножини A, де $A = \{a_1, ..., a_s\}$, $s = pmn$; $P_{s\eta}(A)$ – загальна множина перестановок всіх елементів з мультимножини A, де η – число різних елементів A.

Зазначимо, що деякі елементи A можуть бути нульовими. Тобто x_{ij}^k, $k \in N_p$, $i \in N_m$, $j \in N_n$ – це вектор, що є перестановкою з елементів мультимножини A. Всі перестановки утворюють загальну множину перестановок $P_{s\eta}(A)$.

Математична модель задачі може бути представлена таким способом:

– максимізувати завантаженість роботи комп’ютера:

$$f_1(x) = \max \sum_{k=1}^{p} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} d_{ij}^k x_{ij}^k ;$$

– максимізувати продуктивність:

$$f_2(x) = \max \sum_{k=1}^{p} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_{ij}^k x_{ij}^k$$

при обмеженнях на розміри оперативної пам’яті завантажених програм по кожному програмному комплексу й кожному кластеру

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{p} x_{ij}^k \le b_j \text{ , де } j \in N_n , \ \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} x_{ij}^k \le a_i \quad i \in N_m .$$

Дана модель забезпечує максимальну оптимізацію використання ресурсів кластерного суперкомп’ютера.

Приклад 8.1. Нехай діючий кластерний суперкомп’ютер для паралельних обчислень складається із трьох кластерів з певними характеристиками (табл. 8.1). Необхідно одночасно завантажити на виконання три програми, які вимагають 80 Гб, 35 Гб, 95 Гб оперативної пам’яті.

Таблиця 8.1

№ кластера	**Оперативна пам'ять, Гб**	**Продуктивність, Гфлоп/сек.**	**Зайнятість кластера на поточний період, %**
1	100	4,2	20
2	150	2,2	40
3	70	1,2	50

Розв’язання:

Можлива завантаженість кластерів буде становити, відповідно 80, 60, 50 %.

Побудуємо математичну модель задачі:

$$\max F_1 = 4,2x_1 + 2,2x_2 + 1,2x_3 ,$$

$$\max F_2 = 0,8x_1 + 0,6x_2 + 0,5x_3 ,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \le 100 + 150 + 70 .$$

Розглянемо множину $A = \{35;80;95\}$.

Очевидно, що перестановка $x=(x_1,x_2,x_3)=(95,80,35)$ є оптимальним розв'язком задачі із значеннями часткових критеріїв, рівними:

$$\max F_1 = 4,2\cdot 95+2,2\cdot 80+1,2\cdot 35=617\ ,$$

$$\max F_2 = 0,8\cdot 95+0,6\cdot 80+0,5\cdot 35=141,5\ .$$

9.3. Математичні моделі деяких прикладних задач банківського кредитування

9.3.1. Багатокритеріальний вибір методом максимінної згортки в сфері банківського кредитування

Як відомо з розвитком ринкових відносин процес кредитування банками підприємств пов'язаний із численними факторами ризику, здатними спричинити непогашення позички у встановлений строк. При аналізі кредитоспроможності позичальника визначається можливість своєчасного і повного погашення заборгованості по позичці; ступінь ризику, який банк готовий взяти на себе; розмір кредиту, що може бути наданий у конкретній ситуації; умови надання кредиту.

У сучасних умовах аналіз кредитоспроможності пов'язаний не тільки з оцінкою платоспроможності клієнта на певну дату, але й з виявленням найбільш кращих позичальників, прогнозуванням їх фінансової стабільності в перспективі, обліком можливих ризиків за кредитними операціями. Проведення такого всебічного аналізу дозволяє банку більш ефективно управляти кредитними ресурсами й отримувати прибуток.

Застосовувані банками методи в області кредитування ґрунтуються на даних бухгалтерських звітів, тому вони дозволяють лише оцінити кредитоспроможність позичальника, не забезпечуючи вибору найбільш оптимальних позичальників з метою мінімізації факторів ризику для банку та найбільш ефективного планування своєї діяльності.

Побудуємо математичну модель, засновану на використанні теорії нечітких множин і багатокритеріальної оптимізації в області кредитування, що дозволяє підвищити обґрунтованість прийнятих рішень і забезпечити вибір найбільш раціональних варіантів з множини допустимих. Задача розподілу ресурсів між альтернативами є актуальною. Зокрема, інтерес представляють задачі комбінаторної оптимізації, найпростішою з яких є визначення комбінації альтернатив (проектів), що максимізує загальні вигоди при заданих обмеженнях на ресурси.

Припустимо, що в деякий банк звернулися підприємства із проханням про надання їм кредиту. Оскільки ресурси банку обмежені, перед ним виникає задача вибору підприємств, кращих за комплексом критеріїв якості. У розглянутій задачі підприємства є альтернативами, з яких має бути зроблений вибір кращих. Альтернативи позначимо $a_1,...,a_n$. Для оцінки кредитоспроможності підприємств-позичальників використовуються дані їх бухгалтерської звітності: грошові кошти (ГК), короткострокові фінансові вкладення (КФВ), дебіторська заборгованість (ДЗ), запаси й витрати (ЗВ), власний капітал (ВК), короткострокові зобов'язання (ЗКс), підсумок балансу (ПБ), валовий виторг (ВВ), прибуток (П), на підставі яких розраховуються коефіцієнти, що характеризують кредитоспроможність позичальників: коефіцієнт абсолютної ліквідності (F_1), проміжний коефіцієнт покриття (F_2), загальний коефіцієнт покриття (F_3), коефіцієнт фінансової незалежності (F_4), коефіцієнт рентабельності продукції (F_5). Перераховані коефіцієнти є критеріями якості кредитоспроможності підприємств і розраховуються за наступними формулами [6]:

$$F_1 = \frac{\text{ГК+КФВ}}{\text{ЗКс}}; \quad F_2 = \frac{\text{ГК+КФВ+ДЗ}}{\text{ЗКс}};$$

$$F_3 = \frac{\text{ГК+КФВ+ДЗ+ЗЗ}}{\text{ЗКс}}; \quad F_4 = \frac{\text{ВК}}{\text{ПБ}}; \quad F_5 = \frac{П}{ВВ}.$$

Загальна постановка задачі визначення комбінації альтернатив з максимальною ефективністю (або ефективністю на одиницю необхідного ресурсу) полягає у визначенні сполучень альтернатив, що задовольняють зазначеним цільовим функціям: коефіцієнтам, що характеризують кредитоспроможність позичальників F_1, F_2, F_3, F_4, F_5.

Для побудови математичної моделі розглянемо нечітку мультимножину $\tilde{A}=\left\{a_1,\mu_{\tilde{A}}(a_1),a_2,\mu_{\tilde{A}}(a_2)...,a_q,\mu_{\tilde{A}}\left(a_q\right)\right\}$, що складається з одиниць і нулів, задана своєю основою

$S(\tilde{A})=\left\{e_1,\mu_{\tilde{A}}(e_1),e_2,\mu_{\tilde{A}}(e_2),...,e_k,\mu_{\tilde{A}}(e_k)\right\}$, де

$\mu_{\tilde{A}}(e_i)=\min\left\{\mu_{\tilde{A}}\left(a_{i_j}\right)\middle| a_{i_j}=a_{i_t}, j\neq t, \forall i,j,t\in N_q\right\}, e_j\in R, j\in N_k,$ і

кратністю її елементів $k(e_j)=r_j, j\in N_k, r_1+r_2+...+r_k=q$. Розглянемо множину перестановок $P(\tilde{A})$ елементів

$$a=\left(a_{i_1},\mu_{\tilde{A}}\left(a_{i_1}\right),a_{i_2},\mu_{\tilde{A}}\left(a_{i_2}\right),\ldots,a_{i_n},\mu_{\tilde{A}}\left(a_{i_n}\right)\right)$$

з нечітко заданої мультимножини $\tilde{A}$, де $a_{i_j} \in \tilde{A}\ \forall i_j,\ j \in N_k$, $i_s \neq i_t$, якщо $s \neq t\ \forall s \in N_k$, $\forall t \in N_k$. Введемо змінну

$$x_i = \begin{cases} 1, \text{ якщо } i - \text{е підприємство вибирається для кредитування,} \\ 0, \text{ в протилежному випадку.} \end{cases}$$

Розрахуємо значення критеріїв якості для розглянутих підприємств. Дано нормативні значення критеріїв. Аналіз розрахункових і нормативних значень критеріїв показує, що всі підприємства можуть претендувати на одержання кредиту.

Обробка вхідної інформації із застосуванням математичного апарата теорії нечітких множин проводиться в три етапи.

1. Побудова функцій належності, що відповідають поняттям «кращий коефіцієнт абсолютної ліквідності», «бажаний проміжний коефіцієнт покриття», «найкращий коефіцієнт рентабельності» та ін. Побудову таких функцій проводять експерти, що мають знання в області кредитування підприємств різного функціонального призначення.

2. Визначаються конкретні значення функцій належності за критеріями якості $F_1, ..., F_5$, що відповідають розглянутим альтернативам. Нечіткі множини для п'яти розглянутих критеріїв, що включають альтернативи, які аналізуються, мають такий вигляд:

$$\mu_{F_1}(a) = 0,61/0,154 + 0,41/0,102 + 0,33/0,084 + 0,46/0,140;$$

$$\mu_{F_2}(a) = 1,0/1,297 + 0,71/0,71 + 0,59/0,59 + 0,57/0,57;$$

$$\mu_{F_3}(a) = 1,0/2,78 + 0,91/2,27 + 0,75/1,86 + 0,51/1,27;$$

$$\mu_{F_4}(a) = 1,0/0,75 + 0,96/0,72 + 0,94/0,71 + 0,90/0,68;$$

$$\mu_{F_5}(a) = 0,93/0,28 + 0,38/0,115 + 0,5/0,15 + 0,4/0,12.$$

3. Провадиться згортка наявної інформації з метою виявлення кращої альтернативи. Множина оптимальних альтернатив B визначається шляхом перетинання нечітких множин, що містять оцінки альтернатив за критеріями вибору. Якщо критерії, за якими здійснюється вибір варіантів, мають однакову важливість для ОПР, то правило вибору кращих варіантів має вигляд:

$$B = F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap F_4 \cap F_5.$$

Оптимальними будемо вважати альтернативи, що максимізують векторний критерій і функції, що мають максимальне B значення, належності множині. Операція перетину нечітких множин відповідає вибору мінімального значення для j-ї альтернативи:

$$\mu_B(a_j) = \min\left\{\mu_{F_i}(a_j) \mid i \in N_5\right\}.$$

Для розглянутої задачі множина оптимальних альтернатив буде формуватися у такий спосіб:

$$\begin{aligned} B = \{ & \min\{0,61;\ 1,0;\ 1,0;\ 0,93\} \\ & \min\{0,41;\ 0,71;\ 0,91;\ 0,96;\ 0,38\} \\ & \min\{0,33;\ 0,59;\ 0,75;\ 0,94;\ 0,50\} \\ & \min\{0,46;\ 0,57;\ 0,51;\ 0,90;\ 0,40\}\} \end{aligned}$$

Результуючий вектор пріоритетів альтернатив має такий вигляд: $\max\limits_j \mu_B(a_j) = \max\{0,61; 0,38;\ 0,33;\ 0,4\}$. Таким чином, кращою альтернативою є , якій відповідає значення $0,61$. На другому, третьому й четвертому місцях знаходяться відповідно $a_4 \to 0,4$, $a_2 \to 0,38$, $a_3 \to 0,33$.

9.3.2. Вибір кращого банку для розміщення коштів фізичною особою

Мета задачі полягає у виборі кращого банку для розміщення коштів фізичною особою. На відміну від попереднього прикладу використовувані для вибору критерії мають різну значимість для ОПР.

Нехай є n банків, тобто альтернативи $a_1, a_2, ..., a_n$. Визначено шість критеріїв вибору: F_1 − процентна ставка (може змінюватися для різних умов внеску в даному банку, однак задача буде вирішуватися виходячи із припущення, що ОПР визначилася з умовами внеску й розглядає альтернативи, що задовольняють цим умовам); F_2 − розташування банку; F_3 − активи банку; F_4 − політика банку; F_5 − ліквідність банку (розраховується за допомогою коефіцієнту ліквідності); F_6 − репутація банку (оцінюється за експертною шкалою).

Для кожної альтернативи визначені конкретні значення критеріїв, які представлені наступними нечіткими множинами:

$$\mu_{F_1} = \left\{0,05/30 + 0,25/35 + 0,4/40\right\};$$

$$\mu_{F_2} = \{0,7/a_1 + 1,0/a_2 + 0,3/a_3\};$$

$$\mu_{F_3} = \{0,35/15 + 0,6/20 + 0,2/10\};$$

$$\mu_{F_4} = \{0,25/a_1 + 0,7/a_2 + 0,3/a_3\};$$

$$\mu_{F_5} = \{0,5/2 + 0,9/2,5 + 0,35/1,5\};\ \mu_{F_6} = \{1,0/5 + 0,75/4 + 0,6/3\}.$$

Критерії мають різну значимість при визначенні найбільш раціонального варіанту. У зв'язку із цим необхідно визначити вагові коефіцієнти β_i критеріїв $F_i, i \in N_6$. Один з можливих способів одержання значень вагових коефіцієнтів полягає в побудові матриці попарних порівнянь критеріїв.

Ваговий коефіцієнт β_i критерію $F_i, i \in N_6$, визначається на підставі обчислених значень правого власного вектора матриці попарних порівнянь α_i, з наступним множенням на число критеріїв n: $\beta_i = \alpha_i n$.

Множина оптимальних альтернатив B з урахуванням різної важливості критеріїв якості визначається шляхом перетину нечітких множин таким способом:

$$B = F_1^{\beta_1} \cap F_2^{\beta_2} \cap \ldots \cap F_6^{\beta_6};\ \mu_B(a^*) = \max\left\{\mu_B\left(a_j\right) \mid j \in N_n\right\}.$$

Знайдемо множину оптимальних альтернатив з врахуванням отриманих вагових критеріїв:

$$B = \left\{\begin{matrix} \min\left\{0,05^{1,062}; 0,7^{0,318}; 0,35^{0,404}; 0,25^{0,589}; 0,5^{2,652}; 1,0^{0,972}\right\}, \\ \min\left\{0,25^{1,062}; 1,0^{0,318}; 0,6^{0,404}; 0,7^{0,589}; 0,9^{2,652}; 0,75^{0,972}\right\}, \\ \min\left\{0,4^{1,062}; 0,3^{0,318}; 0,2^{0,404}; 0,3^{0,589}; 035^{2,652}; 0,6^{0,972}\right\} \end{matrix}\right\}.$$

Множина оптимальних варіантів B має вигляд:

$$\max\left\{\mu_B\left(a_j\right) \mid j \in N_n\right\} = \max\{0,041; 0,229; 0,062\}.$$

Таким чином, кращою альтернативою є банк a_2, на другому місці банк a_3,самим гіршим варіантом для внеску грошей є банк a_1.

9.4. Модель задачі багатостороннього комерційного арбітражу

У сфері діяльності, пов'язаної з валютними та біржовими операціями, а також з комерційними справами контрактаційного характеру, можливі різного роду трансакції, що дозволяють мати прибуток на різниці в курсі валют. Такого роду трансакції називаються комерційним арбітражем. Уявимо собі комерсанта (умовно назвемо його комерсантом *N*), що має можливість реалізувати багатосторонній комерційний арбітраж. Припустимо, що число валютних ринків, залучених у трансакційну діяльність комерсанта *N*, рівне шести, а максимальне число можливих трансакцій рівне дев'яти. Докладні дані, що характеризують розглянуту задачу, наведені в таблиці 9.1.

Введемо позначення x_i – змінна, рівна 1, якщо трансакція i відбувається, і дорівнює 0 в протилежному випадку.

При трансакції x_1 продаж одиниці валютного номіналу (цінних паперів) II дозволяє придбати r_{11} одиниць валютного номіналу I. При трансакції x_7 замість одиниці валютного номіналу I можна одержати r_{37} одиниць валютного номіналу III та r_{67} одиниць валютного номіналу VI. Інші трансакції розшифровуються аналогічно. Значення r_{ij}, зрозуміло, можуть бути дробовими. Помітимо, що при будь-якій трансакції $x_i, i = 1, 2, 3, 4, 5,$ кожний з валютних номіналів можна обміняти на валютний номінал I. Варто звернути увагу на правило вибору знака перед показниками, наведеними в таблиці 9.1. Щоб відрізняти купівлю від продажу, будемо відповідно використовувати знаки плюс і мінус перед показниками, що характеризують дану трансакцію.

Таблиця 9.1

Багатосторонній комерційний арбітраж

	Тип трансакції									Можливості ринку
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
Валютний номінал I	r_{11}	r_{12}	r_{13}	r_{14}	r_{15}	-1	-1			≥ 0
Валютний номінал II	-1					r_{26}			r_{29}	≥ 0
Валютний номінал III		-1					r_{37}	r_{38}		≥ 0
Валютний номінал IV			-1					-1	r_{49}	≥ 0

Продовж. табл. 9.1

	Тип трансакції									Можливості ринку
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
Валютний номінал V				-1				r_{58}		≥ 0
Валютний номінал VI					-1		r_{67}		-1	≥ 0
Розмір трансакції	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	

Розглянемо ідеалізований випадок, коли всі трансакції комерсанта N виконуються одночасно й миттєво. Обмеження визначаються єдиною вимогою – трансакція можлива лише за умови, якщо комерсант N має у своєму розпорядженні наявні цінні папери. Інакше кажучи, кількість проданих цінних паперів не повинне перевищувати кількість придбаних. Легко переконатися, що згадані обмеження мають вигляд

$$r_{11}x_1 + r_{12}x_2 + r_{13}x_3 + r_{14}x_4 + r_{15}x_5 - x_6 - x_7 \geq 0,$$

$$-x_1 + r_{26}x_6 + r_{29}x_9 \geq 0, \quad -x_2 + r_{37}x_7 + r_{38}x_8 \geq 0,$$

$$-x_3 - x_8 + r_{49}x_9 \geq 0, \qquad -x_4 + r_{58}x_8 \geq 0,$$

$$-x_5 + r_{67}x_7 - x_9 \geq 0, \qquad x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, ..., 9 .$$

Тоді цільова функція описує чистий прибуток, виражений в одиницях валютного номіналу I, тобто задача полягає в максимізації

$$f(x) = r_{11}x_1 + r_{12}x_2 + r_{13}x_3 + r_{14}x_4 + r_{15}x_5 - x_6 - x_7 . \qquad (9.1)$$

У випадку коли всі праві частини системи лінійних нерівностей дорівнюють нулю (як це має місце в (9.1), система лінійних співвідношень називається однорідною. Зазначимо, що розв’язок $x_j = 0$ для всіх значень j є тривіальним допустимим розв’язком, для якого чистий прибуток дорівнює нулю. Припустимо, що існує деякий набір нетривіальних значень x_j, для якого чистий прибуток приймає додатне значення. Тоді внаслідок однорідності системи (9.1) $kx_j, j = 1, 2, ..., 9$, також є допустимим розв’язком при будь-яких $k \geq 0$, а одержуваний прибуток зростає відповідно в k разів. Таким чином, якщо для даної моделі існує хоча б один допустимий розв’язок, то значення цільової функції може бути зроблено довільно більшим. У цьому випадку має місце необмежений оптимальний розв'язок.

Основна мета наведеного прикладу за побудованою математичною моделлю полягає в тому, щоб продемонструвати існування майже реалістичних задач, які допускають необмежений оптимальний розв'язок. Такі задач становлять важливий інтерес для економістів, що намагаються розібратися в особливостях мультивалютних ринків.

9.5. Варіантна модель капітального будівництва об'єктів з урахуванням сумарних лімітів

Визначити оптимальну послідовність будівництва об'єктів з мінімізацією ризику та з урахуванням обмеженості накопичених лімітів капітальних вкладень, обсягів будівельно-монтажних робіт і потужностей (будівництво об'єктів іде згідно з нормами тривалості). Введемо позначення:

i – номер об'єкта будівництва, n – число всіх об'єктів будівництва, t – рік планового періоду, T – кількість років планового періоду, j – порядковий рік будівництва об'єкта, починаючи з першого року будівництва, P_{it} – прибуток, що отримується на об'єкті за декілька років функціонування об'єкта після закінчення будівництва, якщо воно розпочато в t – році планового періоду, k_{ij} – капіталовкладення, що виділені i – му об'єкту в j – му році його будівництва, s_{ij} – обсяг будівельно-монтажних робіт, що виділені i – му об'єкту в j – му році його будівництва, N_{ij} – потужності, що вводяться на i – му об'єкті в j – му році його будівництва, N_i – ліміт капіталовкладень за t перших років планового періоду, S_t – накопичений ліміт обсягів будівельно-монтажних робіт за t перших років, N_t – накопичений план введення потужностей за t перших років, x_{it} – змінна, рівна 1, якщо i – ий об'єкт починають будувати в t – му році, і рівна 0 в протилежному випадку.

Покладається, що $p = \left(p_{11}, p_{12}, ..., p_{nT}\right)$ – випадковий $n \times T$ – вимірний вектор із заданою не виродженою матрицею коваріації $Q > 0$, інформація про його середнє значення вичерпується завданням множини P його можливих значень. Далі будемо вважати, що множина P – многогранник, заданий множиною вершин

$$Mp \in P = \operatorname{conv}\left\{ p^s \mid s \in N_k \right\}.$$

Вибір розв'язку $x = \left(x_{11}, x_{12}, ..., x_{nT}\right) \in X$ визначається двома цілями: з одного боку, слід максимізувати середнє значення цільової функції, а оскільки воно точно не задане, то будемо максимізувати її "найгірше", тобто мінімально можливе середнє значення

$U(x) = \min M\left(p^T x\right) = \min\left\{p^T x \mid p \in P\right\}$. З іншого боку, ми прагнемо обмежити розкид значень цільової функції, зв'язаний з випадковими збуреннями, тобто дисперсію значень функції цілі: $V(x) = x^T Qx$. Отже, одержимо двокритеріальну задачу

$$\max\left\{\min\left\{p^T x \mid p \in P\right\} \mid x \in X\right\},\ \min\left\{x^T Qx \mid x \in X\right\}.$$

Математична модель. З метою найбільш ефективного планування будівництва та мінімізації факторів ризику знайти максимум сумарного прибутку

$$\max\left\{\min\left\{\sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{T} p_{it} x_i x_t \mid p = \left(p_{11}, ..., p_{nT}\right) \in P\right\} \mid x = \left(x_{11}, ..., x_{nT}\right) \in X\right\},$$

$$\min \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{T} q_{ij} x_i x_j\ ,$$

за обмежень на ліміт капітальних вкладень

$$\sum_{i=1}^{n} k_{i1} x_{i1} \le K_1,$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(x_{i1}\left(k_{i1} + k_{i2}\right) + k_{i1} x_{i2}\right) \le K_2, ...,$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(x_{i1}\sum_{j=1}^{T} k_{ij} + x_{i2}\sum_{j=1}^{T-1} k_{ij} + ... + k_{i1} x_{iT}\right) \le K_T,$$

на обсяги будівельно-монтажних робіт

$$\sum_{i=1}^{n} s_{i1} x_{i1} \le S_1,$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(x_{i1}\left(s_{i1}+s_{i2}\right)+s_{i1}x_{i2}\right)\le S_{2},...,$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(x_{i1}\sum_{j=1}^{T}s_{ij}+x_{i2}\sum_{j=1}^{T-1}s_{ij}+...+s_{i1}x_{iT}\right)\le S_{T},$$

на введення потужностей

$$\sum_{i=1}^{n}N_{i1}x_{i1}\le N_{1},$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(x_{i1}\left(N_{i1}+N_{i2}\right)+N_{i1}x_{i2}\right)\le N_{2},...,$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(x_{i1}\sum_{j=1}^{T}N_{ij}+x_{i2}\sum_{j=1}^{T-1}N_{ij}+...+N_{i1}x_{iT}\right)\le N_{T},$$

на вибір єдиного варіанта на кожному об’єкті

$$\sum_{i=1}^{m_i}x_{iq}\le 1, i\in N_{n}.$$

Задачі лінійної дискретної оптимізації з неповною інформацією про розподіл цільового вектора актуальні в умовах ринкової економіки, коли ціни на сировину, перевезення, товари, акції – випадкові величини, а інформація про їх розподіли не повна. Такі задачі є природним розвитком задач оптимізації з повною статистичною інформацією, розглянутих, у тому числі, у фінансовому аналізі. Передбачається, що вектор цільової функції – випадковий вектор з відомою коваріаційною матрицею і не точно заданим середнім значенням, про яке відомо лише множину його можливих значень. Розв’язання задачі основане на поєднанні мінімаксного підходу [123] і методів векторної оптимізації [130–134], оскільки передбачається, що розв’язки повинні, з одного боку, максимізувати найменше з можливих середніх значень цільової функції, з іншого боку – мінімізувати ризик, пов’язаний з розкидом її значень.

9.6. Двокритеріальна задача комівояжера

Задача комівояжера є однією із класичних задач дискретної оптимізації [76]. Вона полягає в складанні маршруту відвідування торговим агентом, який знаходиться в деякому початковому пункті, $(n-1)$-го інших міст за умови, що задана матриця $C = \left[c_{ij} \right]_{n \times n}$ вартостей переїзду з міста в місто, враховуючи початкове. Причому допустимим є тільки такий маршрут, який передбачає одноразове відвідування всіх міст і повернення в початковий пункт. Очевидно, що найкращий маршрут повинен мінімізувати сумарну вартість переїздів.

Допустимими планами в цій задачі слугують зв'язні маршрути, що однозначно визначаються упорядкованим набором міст, які відвідує торговець. Кожен такий маршрут можна ототожнити з перестановкою $p = (i_1, i_2, ..., i_n)$ n чисел (упорядкованою вибіркою із множини n чисел по n). Отже формулювання задачі комівояжера має наступний вигляд: $\min \left\{ f(p) = \sum_{k=1}^{n} c_{i_k i_{k+1}} \mid p = (i_1, i_2, ..., i_n) \in P \right\}$,

де P – множина перестановок чисел від 1 до n.

Зазначимо, що задача комівояжера при довільній (навіть симетричній) матриці C є *NP*-повною задачею.

Окремо слід зупинитися на тому, що задача комівояжера має велику кількість змістовних аналогів. До аналогічної моделі приводить задача розробки графіка переналагоджування обладнання, яке може випускати різні типи виробів, але потребує певних витрат (часових або матеріальних) при переході від одного технологічного режиму на інший. Очевидно, що здачу комівояжера можна узагальнити, враховуючи більше число критеріїв.

Алгоритми розв'язання багатокритеріальних задач цього типу визначаються тим, що розуміється під оптимальним розв'язком задачі. Залежно від цього формується однокритеріальна задача, у якій новий критерій є деякою функцією (згорткою) критеріїв, і розв'язання багатокритеріальної задачі зводиться до розв'язання послідовності однокритеріальних задач для критерія-згортки. При цьому під розв'язанням багатокритеріальної задачі розуміємо розв'язання задачі для критерія-згортки.

Відзначений в [149] підхід полягає в знаходженні глобального оптимуму за кожним із критеріїв і множин всіх R-близьких розв'язків. Під розв'язанням багатокритеріальної задачі будемо розуміти перетин множин усіх R-близьких розв'язків за кожним із критеріїв.

В [113] розглянуто підхід, у якому під розв'язанням багатокритеріальної задачі розуміють знаходження елементів множини Парето-оптимальних розв'язків. Тут також виникає необхідність відшукання глобальних екстремумів для різних критеріїв-згорток.

Слід зазначити, що застосування алгоритмів знаходження точного розв'язку в даному випадку не представляється можливим. Тому зазначені вище підходи незастосовні до багатокритеріальних задач великої розмірності.

Постановка задачі. Нехай $x=(i_1,i_2,...,i_n)$ – довільна перестановка елементів множини $N_n=\{1,2,...,n\}$ номерів міст є маршрутом комівояжера. Кожному маршруту x поставимо у відповідність два критерії

$$f_1(x)=\sum_{k=1}^{n} c_{i_k i_{k+1}} \tag{9.2}$$

$$f_2(x)=\max_{(i_k,i_{k+1})} c_{i_k i_{k+1}}, \quad k=1,2,...,n; \tag{9.3}$$

тут $i_{n+1}=i_1$. Критерій $f_1(x)$ є довжина маршруту x, $f_2(x)$ – вузьке місце цього маршруту. Задача із критерієм (9.2) називається лінійною задачею, задача із критерієм (9.3) – задачею на вузьке місце.

Нехай $F(x)=(f_1(x), f_2(x))$. Задача полягає в мінімізації векторного критерію $F(x)$ на множині X:

$$\min\{F(x)\,|\,x\in X\}. \tag{9.4}$$

Слід уточнити, у якому змісті розуміється задача мінімізації за двома критеріями. Нехай

$$f_i(x_i^0)=\min\{f_i(x)\,|\,x\in X\}=f_i^0,\ i=1,2.$$

Точка (f_1^0, f_2^0) називається ідеальною точкою.

Під задачею оптимізації за двома критеріями будемо розуміти наступну задачу мінімізації згортки двох критеріїв:

$$g(\rho(f_1(x_0), f_1^0), \rho(f_2(x_0), f_2^0))=\min_{x\in X}\left\{g(\rho(f_1(x), f_1^0), \rho(f_2(x), f_2^0))\right\} \tag{9.5}$$

Тут $\rho(f_i(x), f_i^0)$ – відхилення отриманого наближеного розв'язку по кожному із критеріїв, $i=1,2$, від шуканого наближеного розв'язку задачі. При цьому як функція ρ розглядається сума відхилень (чи їх квадратів) або максимальне з відхилень. У задачі (9.5) шукається маршрут x, що мінімізує відхилення від ідеальної точки.

Застосування згорток для наближеного розв'язання багатокритеріальних задач дискретної оптимізації великої розмірності може бути виправдане тим, що при цьому не потрібно шукати точний розв'язок відповідних однокритеріальних задач, які також є задачами великої розмірності.

9.6.1. Оптимізація згорток критеріїв

Для розв'язання задачі оптимізації згортки при фіксованих значеннях ваг λ_1 і λ_2 застосовується той же підхід, що використовується для розв'язання задачі оптимізації по кожному із критеріїв $f_1(x)$ і $f_2(x)$. Цей підхід складається із двох основних елементів: побудови початкового розв'язку та поліпшення початкового розв'язку.

Види згорток критеріїв.

Нехай $\rho(f_i(x), f_i^0) = | f_i(x) - f_i^0 |, i = 1, 2$. Тоді

$$g_1(x) = \lambda_1 | f_1(x) - f_1^0 | + \lambda_2 n | f_2(x) - f_2^0 |,$$

$$g_2(x) = \lambda_1 (f_1(x) - f_1^0)^2 + \lambda_2 n^2 (f_2(x) - f_2^0)^2,$$

$$g_3(x) = \max \left\{ \lambda_1 | f_1(x) - f_1^0 |,\ \lambda_2 n | f_2(x) - f_2^0 | \right\}.$$

Якщо $\rho(f_i(x), f_i^0) = | f_i(x) - f_i^0 | / f_i^0$, то

$$g_4(x) = \lambda_1 \frac{| f_1(x) - f_1^0 |}{f_1^0} + \lambda_2 \frac{| f_2(x) - f_2^0 |}{f_2^0},$$

$$g_5(x) = \lambda_1 \left[\frac{f_1(x) - f_1^0}{f_1^0} \right]^2 + \lambda_2 \left[\frac{f_2(x) - f_2^0}{f_2^0} \right]^2,$$

$$g_6(x) = \max \left(\lambda_1 \frac{| f_1(x) - f_1^0 |}{f_1^0} + \lambda_2 \frac{| f_2(x) - f_2^0 |}{f_2^0} \right).$$

Під задачею оптимізації будемо також розуміти мінімізацію однієї з наступних функцій:

$$g_7(x) = \frac{f_1(x) f_1^0}{f_1^0 + f_2^0} + \frac{f_2(x) f_2^0}{f_1^0 + f_2^0},$$

$$g_8(x) = \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 n f_2(x),$$

$$g_9(x) = \max\{\lambda_1 f_1(x), \lambda_2 n f_2(x)\}.$$

Для незамкнутої задачі у функціях $g_i(x), i \in N_9$, і в (9.2), (9.3) робиться заміна x на $x-1$. Згортки $g_i(x)$ при $i = 1,2,3$ мінімізують абсолютні відхилення від ідеальної точки (f_1^0, f_2^0), а при $i = 4,5,6,7$ – відносні відхилення від цієї точки.

З наведених тут видів функцій $g_i(x), i \in N_9$, видно, що кожна з них є згорткою двох критеріїв $f_1(x)$ і $f_2(x)$. Введення множника n в критеріях $g_1(x)$, $g_3(x)$, $g_8(x)$ і n^2 в $g_2(x)$ необхідно для зрівнювання впливу кожного із двох критеріїв на загальний критерій, тому що $f_1(x)$ в середньому більше, ніж $f_2(x)$, у n раз. Відсутність таких множників може привести до того, що другий критерій не буде впливати на результат оптимізації загального критерію. Якщо виникає необхідність урахувати різний вплив кожного із критеріїв, то це може бути реалізовано за допомогою вибору значень ваг λ_1 та λ_2.

Будемо також вважати, що $\lambda_1 \ge 0, \quad \lambda_2 \ge 0, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1$.

Як вже відзначалося, у результаті застосування описаного підходу знаходять два наближених розв’язки:

$$f_i(x_i^0) = \min\{ f_i(x) \mid x \in X \} = f_i^0, i = 1,2.$$

Процес оптимізації кожної згортки критеріїв зводиться до розв’язання задачі комівояжера для функцій $g_i(x), i \in N_9$. За початковий вибирається той з маршрутів x_1^0 і x_2^0, для якого значення згортки, що оптимізується, буде менше. Для покращення початкового розв’язку використовуються модифіковані для оптимізації згортки комбіновані алгоритми локальної оптимізації. Докладний опис алгоритмів і результатів експерименту міститься в [149].

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Айгнер М. Комбинаторная теория. – М.: Мир, 1982. – 558 с.
2. Айзерман М.А., Алескеров Ф.Т. Выбор вариантов. Основы теории. – М.: Наука, 1990. – 240 с.
3. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах. – М.: Высшая школа, 1986. – 319 с.
4. Алексеев В.Б. Использование симметрии при нахождении ширины частично упорядоченного множества // Дискретный анализ, 1974, вып. 26, С. 20–35.
5. Альбертьян М.К. О комбинаторных характеристиках несравнимости в задачах принятия решений. – Изв. АН СССР, сер. Техн. кибернетика, 1974, № 6, С. 3–12.
6. Андрейчиков А.В., Андрейчикова О.Н. Анализ, синтез, планирование решений в экономике. – М.: Финансы и статистика, 2001. – 364 с.
7. Бабич М.Д., Задирака В.К., Сергиенко И.В. Вычислительный эксперимент в проблеме оптимизации вычислений // Кибернетика и системный анализ. – 1999. – № 1. – С. 51–63.
8. Базара М., Шетти К. Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы. – М.: Мир, 1982. – 584 с.
9. Бакурова Г.В., Емеличев В.А., Перепелица В.А. Об устойчивости многокритериальных задач на системах подмножеств // Докл. АН Беларуси. – 1993. – № 11. – С. 80–84.
10. Баранов В.И., Стечкин Б.С. Экстремальные комбинаторные задачи и их приложения. – М.: Наука, 1989. – 160 с.
11. Барндорф-Нилсон О., Собль М. О распределении числа элементов многомерной выборки, принадлежащих заданному слою // Теория вероятностей и ее применения, 1966, вып. 2, С. 283–305.
12. Белкин А.Р., Левин М.Ш. Принятие решений: комбинаторные модели аппроксимации информации. – М.: Наука, 1990. – 232 с.
13. Белов Ю.А. Об одном классе специальных перестановочных многогранников // Моделирование и анализ информационных систем. – 1996. – № 3. – С. 78–84.
14. Березовский Б. А., Борденко В.И., Кемпнер А.М. Бинарные отношения в многокритериальной оптимизации. – М.: Наука, 1981. – 149 с.
15. Береснев В.Л., Гимади Є.Х., Дементьев В.Т. Экстремальные задачи стандартизации. – Новосибирск.: Наука, 1978. – 334 с.
16. Бондаренко В.А. Об одном классе многогранников и их использовании в комбинаторной оптимизации // Докл. АН (Россия). – 1993. – 328, № 3. – С. 303–304.

17. Бренстед А. Введение в теорию выпуклых многогранников. – М.: Мир, 1988. – 240 с.
18. Бурдюк В.Я., Семенов В.А. Разрешимые случаи новой комбинаторной задачи оптимизации // Кибернетика и систем. анализ. – 1999. – № 2. – С. 175–178.
19. Бурштейн Ф.В., Королев Э.С. Многокритериальные задачи принятия решений при неопределенности и риске. – В кн.: Теоретическая кибернетика. – Тбилиси, 1980. – С. 156–162.
20. Вейль Г. Элементарная теория выпуклых многогранников: Матричные игры. – М.: Физматгиз., 1961. – С. 254–273.
21. Вентцель Е.С. Исследование операций: задачи, принципы, методология. – М.: Наука, 1988. – 288 с.
22. Вилкас Э.Й. Существование эффективно-равновесных точек в задаче векторной оптимизации // Литовский мат. сб. – 1968. – 8, № 1. – С. 41–44.
23. Виноградская Т.М., Гафт М.Г. Точная верхняя оценка числа неподчиненных решений в многокритериальных задачах. – Автоматика и телемеханика, 1974, № 9, С. 111–118.
24. Виноградская Т.М. Среднее значение числа неподчиненных решений в многокритериальных задачах // Изв. АН СССР, сер. Техн. кибернетика, 1976, № 2, С. 36–38.
25. Волкович В.Л., Волошин А.Ф. Об одной общей схеме последовательного анализа и отсеивания вариантов // Кибернетика. – 1978. – № 5. – С. 98–105.
26. Волконский В.А., Еганян Г.К., Поманский А.Б. О множестве эффективных точек в линейных многокритериальных задачах // Сиб. матем. журн., 1983. – Т. 24. – № 2. – С. 9–17.
27. Волошин О.Ф., Мащенко С.О. Теорія прийняття рішень: Навчальний посібник. – К.: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2006. – 304 с.
28. Воронин А.Н. и др. Векторная оптимизация динамических систем. – К.: Техніка, 1999. – 284 с.
29. Вощинин А.П., Сотиров Г.Р. Оптимизация в условиях неопределенности. – НРБ.: Изд-во МЭИ Техника, 1989. – 224 с.
30. Вычислительные методы выбора оптимальных проектных решений / под ред. В.С. Михалевича. – К.: Наук. думка, 1977. – 178 с.
31. Гамидов Р.Г., Фарбер М.Ш. О принятии решения в задачах многокритериальной оптимизации. – Изв. АН Азерб. РСР, сер. Физ.-тех. и матем. наук. – 1978. – № 3. – С. 11–16.
32. Гасс С. Линейное программирование. – М.: Физ.-мат. литература, 1961. – 304 с.

33. Гафт М.Г. Принятие решений при многих критериях. – М.: Знание, 1979. – 178 с.
34. Гирлих Э., Ковалев М.М., Кравцов М.К., Янушкевич О.А. Условия разрешимости векторных задач с помощью линейной свертки критериев // Кибернетика и системный анализ. – 1999. – № 1. – С. 81–95.
35. Глушков В.М. О системной оптимизации // Кибернетика. – 1980. – № 5. – С. 89–90.
36. Глушков В.М. Основы безбумажной информатики. – М.: Наука, 1982. – 552 с.
37. Гольдштейн А.Л. Исследование операций: многокритериальные задачи. – М.: Наука, 1995.
38. Гордон В.С., Шафранский Я.М. К вопросу минимизации функций на множестве перестановок частично упорядоченных элементов // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1979. – № 2. – С. 122–124.
39. Гуляницкий Л.Ф. Разработка гибридных методов дискретной оптимизации на основе G-алгоритмов // Компьютерная математика. – Киев: Институт кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины. – 2005. – № 1. – С. 141–153.
40. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. – М.: Мир, 1982. – 416 с.
41. Донец Г.А., Петренюк А.Я. Экстремальные покрытия графов. – Кировоград: ОАО «Кіровоградське видавництво», 2009. – 170 с.
42. Донец Г.А, Колечкина Л.Н. Метод упорядочения значений линейной функции на множестве перестановок // Кибернетика и системный анализ. – 2009. – № 2. – С. 50–61.
43. Дубов Ю.А., Травкин С.И., Якимец В.Н. Многокритериальные модели формирования и выбора вариантов систем. – М.: Наука, 1986. – 296 с.
44. Емеличев В.А. Дискретная оптимизация. Последовательные схемы решения I, II // Кибернетика. – 1971. – № 6. – С. 109–121; 1972. – № 2. – С. 92–103.
45. Емеличев В.А., Ковалев М.М., Кравцов М.К. Многогранники, графы, оптимизация. – М.: Наука, 1981. – 342 с.
46. Емеличев В.А., Перепелица В.А. Сложность дискретных многокритериальных задач // Дискретная математика. – 1994. – Вып. 1, 6. – С. 3–33.
47. Емец О.А., Барболина Т.Н. Комбинаторная оптимизация на размещениях. – К.: Наук. думка, 2008. – 159 с.
48. Емец О.А. Об экстремальных свойствах недифференцируемых выпуклых функций на евклидовом множестве сочетаний с пов-

торениями // Український математичний журнал – 1994. – 46. – № 6. – С. 680–691.
49. Еремин И.И., Астафьев Н.И. Введение в теорию линейного и выпуклого программирования. – М.: Наука, 1976. – 192 с.
50. Еремин И.И., Мазуров В.Д., Астафьев Н.И. Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования. – М.: Наука, 1983. – 336 с.
51. Ермольев Ю.М., Мельник И.М. Экстремальные задачи на графах. – К.: Наук. думка, 1970. – 175 с.
52. Ермольев Ю.М., Ляшко И.И., Михалевич В.С., Тюптя В.И. Математические методы исследования операций. – К.: Вища школа, 1979. – 312 с.
53. Ємець О.О., Колєчкіна Л.М. Задача оптимізації на переставленнях з дробово-лінійною цільовою функцією: властивості множини допустимих розв'язків // Український математичний журнал. – 2000. –52. – № 12. – С. 1630–1640.
54. Ємець О.О., Колєчкіна Л.М. Задачі комбінаторної оптимізації з дробово-лінійними цільовими функціями. – К.: Наук. думка, 2005. – 118 с.
55. Ємець О.О., Роскладка О.В. Задачі оптимізації на полікомбінаторних множинах: властивості та розв'язування. – Полтава: РВВ ПУСКУ, 2006. – 130 с.
56. Ємець О.О., Ємець Ол-ра О. Деякі операції та відношення над нечіткими числами // Наукові вісті НТУУ «КПІ». – 2008 – № 5. – С. 39–46.
57. Жаке-Лагрез Э. Применение размытых отношений при оценке предпочтительности распределенных величин // Статистические модели и многокритериальные задачи принятия решений. – М.: Статистика, 1979. – С. 168–183.
58. Жуковин В.Е. Нечеткие многокритериальные модели принятия решений. – Тбилиси, 1988. – 231 с.
59. Жуковский В.И., Жуковская Л.В. Риск многокритериальных и конфликтных систем при неопределенности. – М: Эдиториал УРСЭ, 2004. – 272 с.
60. Жуковский В.И., Молоствов В.С. Многокритериальное принятие решений в условиях неопределенности. – М., 1988. – 267 с.
61. Журавлев Ю.И. Избранные научные труды. – М.: Издательство Магистр, 1998. – 420 с.
62. Зайченко Ю.П. Исследование операций. Нечеткая оптимизация: Учеб. пособие. – К.: Вища школа, 1991. – 198 с.
63. Кини Р.Л., Райфа Х. Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения. – М.: Радио и связь, 1981. – 560 с.

64. Ковалев М.М. Дискретная оптимизация. – Минск: Изд-во БГУ, 1977. – 192 с.
65. Ковалев М.М., Исаченко А.Н., Нгуен Нгиа. Линеаризация комбинаторных задач оптимизации // Доклады АН БССР. – 1978. – Т. 22. – № 10. – С. 869–872.
66. Козерацкая Л.Н., Лебедева Т.Т., Сергиенко И.В. Задачи дискретной оптимизации: исследование устойчивости // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 1995. – № 1. – С. 12–30.
67. Козин И.В. Принципы симметрии в теории принятия решений. – Запорожье.: Полиграф, 2008. – 164 с.
68. Колечкина Л.Н. Многокритериальные задачи на комбинаторном множестве полиразмещений: структурные свойства решений // Intern. Book Series «Information science and computing», № 7, Supplement to Intern. Journal «Information Theories and Knowledge». Institute of Information Theories and Applications FOI ITHEA. – Sofia, Bulgaria, 2008. – 2. – P. 180–186.
69. Колечкина Л.Н. Оптимальные решения многокритериальных комбинаторных задач на размещениях // Теорія оптимальних рішень. Зб. наук. праць. Київ: Ін-т кібернетики ім. В.М. Глушкова НАНУ– 2007. – № 6. – С. 67–73.
70. Колечкина Л.Н. О нахождении Парето-оптимальных решений в многокритериальных комбинаторных задачах на множестве размещений // Теорія оптимальних рішень. Зб. наук. праць. Київ: Ін-т кібернетики ім В.М. Глушкова НАНУ – 2008. – № 7. – С. 109–116.
71. Колєчкіна Л.М., Нагірна А.М. Моделювання та розв’язування економічних задач оптимізації відносних показників з урахуванням комбінаторних властивостей розв’язку // Наук. вісті Нац. техн. ун-ту України «Київський політехнічний інститут». – 2006. – № 5. – С. 34–40.
72. Колечкина Л.Н., Родионова Е.А. Многокритериальные комбинаторные задачи оптимизации на множестве полиразмещений // Кибернетика и системный анализ. – 2008. – № 2. – С. 152–160.
73. Колєчкіна Л.М., Родіонова О.А. Постановка задачі багатокритеріальної комбінаторної оптимізації на полірозміщеннях та підхід до розв’язання. // Радиоэлектроника и информатика. – 2007. – №. 1. – С. 84–88.
74. Кондрук Н.Е., Маляр М.М. Алгоритм кластеризації критеріального простору для задач вибору // Вісник Київського університету. Серія: фіз. – мат. наук, Вип. 3, Київ, 2006.

75. Корбут А.А., Сигал И.Х., Филькенштейн Ю.Ю. Метод ветвей и границ: Обзор теории, алгоритмов, программ и приложений // Math. Operationsforsch und Statist., Ser. Optimiz., 1977. – 8, № 2. – С. 253–280.
76. Корбут А.А., Финкельштейн Ю.Ю. Дискретное программирование. – М.: Наука, 1969. – 368 с.
77. Кофман А. Введение в теорию нечетких множеств. – М.: Радио и связь, 1982. – 432 с.
78. Крейнем М.Г., Новиков Н.М. Алгоритм решения некоторого класса дискретних многокритериальных задач // Журн. вычисл. математики и мат. физики – 1983. – 23, № 3.
79. Ларичев О.И. Наука и искусство принятия решений. – М.: Наука, 1979. – 200 с.
80. Лебедева Т.Т., Семенова Н.В Сергиенко Т.И. Устойчивость векторных задач целочисленной оптимизации: взаимосвязь с устойчивостью множеств оптимальных и неоптимальных решений // Кибернетика и системный анализ. – 2005. – № 4. – С. 90–100.
81. Лебєдєва Т.Т., Семенова Н.В., Сергієнко Т.І. Умови оптимальності та розв'язуваності в задачах лінійної векторної оптимізації з опуклою допустимою множиною // Доповіді НАНУ. – 2003. – № 10. – С. 80–85.
82. Левитская А.А. Одна комбинаторная задача в классе перестановок над кольцом Zn вычетов по нечетному модулю n // Проблемы управления и информатики. – 1996. – № 5. – С. 99–108.
83. Липский В. Комбинаторика для программистов. – М.: Мир, 1988. – 200 с.
84. Лихтенштейн В.Е. Модели и методы дискретного программирования. – М.: Наука, 1971. – 240 с.
85. Лэсдон Л.С. Оптимизация больших систем. – М.: Наука, 1975. – 432 с.
86. Максишко Н.К., Заховалко Т.В. Моделі та методи розв'язання прикладних задач покриття на графах та гіперграфах. – Запорожье: Полиграф, 2009. – 244 с.
87. Машунин Ю.К. Методы и модели векторной оптимизации. – М.: Наука, 1986. – 140 с.
88. Мину М. Математическое программирование. Теория и алгоритмы. – М.: Наука, 1990. – 488 с.
89. Миркин Б.Г. Проблемы группового выбора. – М.: Наука, 1974. – 256 с.
90. Михалевич В.С., Волкович В.Л. Вычислительные методы исследования и проектирования сложных систем. – М.: Наука, 1982. – 286 с.

91. Михалевич М.В., Сергиенко И.В. Моделирование переходной экономики. Модели, методы, информационные технологии. – К.: Наук. думка, 2005. – 671 с.
92. Михалевич В.С., Трубин В.А., Шор Н.З. Оптимизационные задачи производственно-транспортного планирования: модели, методы, алгоритмы. – М.: Наука, 1986. – 264 с.
93. Михалевич В.С., Шкурба В.В. Последовательные схемы оптимизации в задачах упорядочения выполнения работ // Кибернетика. – 1966. – № 2. – С. 34–40.
94. Модели и методы оптимизации надежности сложных систем / Волкович В.Л., Волошин А.Ф., Заславский В.А., Ушаков И.А.: под. ред. Михалевича В.С. – К.: Наук. думка, 1993. – 312 с.
95. Мулен Э. Кооперативное принятие решений: Аксиомы и модели: Пер. с англ. – М.: Мир, 1991, – 464 с.
96. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта / А.Н. Аверкин, И.З. Батыршин, А.Ф. Блишун и др. / Под ред. Д.А. Поспелова. – М.: Наука, 1986. – 312 с.
97. Нечеткие множества и теория возможностей. Последние достижения / Под ред. Р.Р. Ягера. – М.: Радио и связь, 1986. – 408 с.
98. Ногин В.Д. Логическое обоснование принципа Эджворта-Парето // Журн. вычисл. математики и матем. физики. – 2002. – 42, № 7. – С. 951–957.
99. Ногин В.Д. Принятие решений в многокритериальной среде: количественный подход. – М.: Физматлит, 2002. – 144 с.
100. Нурлыбаев А.Н. О графе перестановочного многогранника // Доклады АН Республики Казахстана. – 1992. – № 3. – С. 14–20.
101. Озерной В.М., Гафт М.Г. Методология решения дискретных многокритериальных задач // Многокритериальные задачи принятия решений. – М.: Машиностроение, 1978. – С. 14–47.
102. Обработка нечеткой информации в системах принятия решений / А.Н. Борисов, А.В. Алексеев, Г.В. Меркурьева и др. – М.: Радио и связь, 1989. – 304с.
103. Орловский С.А. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации. – М.: Наука, 1981. – 208 с.
104. Павлов О.А., Павлова Л.О. Принцип розпаралелювання обчислень як засіб підвищення ефективності ПДС-алгоритмів для важкорозв'язувальних комбінаторних задач // Наукові вісті НТУУ «КПІ». – 1997. – № 1.– С. 22–26.
105. Пападимитриу Х., Стайглиц К. Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность. – М.: Мир, 1985. – 512 с.
106. Парасюк И.Н., Каспшицкая М.Ф. О развитии метода вектора спада на случай размытых окрестностей // Компьютерная математика. – 2008. – № 2. – С. 145−155.

107. Парасюк И.Н., Каспшицкая М.Ф. О решении комбинаторной многокритериальной оптимизационной задачи нечетким методом вектора спада // Компьютерная математика. – 2009. – № 2. – С. 150−158.
108. Перепелица В.А., Сергиенко И.В. К проблеме нахождения множеств альтернатив в дискретных многокритериальных задачах // Кибернетика. – 1987. – № 5. – С. 85–93.
109. Перепелица В.А., Сергиенко И.В. Исследование одного класса целочисленных многокритериальных задач // Журн. вычисл. математики и матем. физики. – 1988. – 28, № 3. – С. 400–419.
110. Перепелица В.А., Сергиенко И.В. Полиномиальные и NP-полные многокритериальные задачи перечисления альтернатив // Теория и программная реализация методов дискретной оптимизации. – Киев: Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова. – 1989. – С. 58–69.
111. Побудова і дослідження методів та інформаційних технологій розв’язання оптимізаційних дискретних задач великої розмірності / І.В. Сергієнко, В.П. Шило, Т.Т. Лебєдєва, Н.В. Семенова та ін. // Фундаментальні орієнтири науки. Математика, інформатика, механіка. Збірник статей за матеріалами проектів ДФФД. – К.: Академперіодика, 2005. – С. 23–42.
112. Подиновский В.В., Гаврилов В.М. Оптимизация по последовательно применяемым критериям. – М.: Сов. радио, 1975. – 192 с.
113. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. – М.: Наука, 1982. – 256 с.
114. Полищук Л.И. Анализ многокритериальных экономико-математических моделей. – М.: Наука, 1989. – 182 с.
115. Поспелов Г.С., Ириков В.А., Курилов А.Е. Процедуры и алгоритмы формирования комплексных программ. – М.: Наука, 1985. – 424 с.
116. Пшеничный Б.Н., Ненахов Э.И., Кузьменко В.Н. Комбинаторный метод решения общей задачи выпуклого программирования // Кибернетика и системный анализ. – 1998. – № 4 – С. 121–134.
117. Рейегольд Э., Нивергельт Ю., Део Н. Комбинаторные алгоритмы. Теория и практика. – М.: Мир, 1980. – 476 с.
118. Реклейтис Г., Рейвиндран А., Рэгедел К. Оптимизация в технике: В 2-т. – М.: Мир, 1986. – Т. 1. – 352 с.; Т. 2. – 364 с.
119. Риордан Дж. Введение в комбинаторный анализ. – М.: Иностранная литература, 1963. – 288 с.
120. Рыбников К.А. Введение в комбинаторный анализ. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1985. – 308 с.
121. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. – М.: Мир, 1973. – 470 с.
122. Романовский И.В. Дискретный анализ. – С.Пб.: Невский диалект, 2000. – 240 с.

123. Рощин В.А., Семенова Н.В., Сергиенко И.В. Вопросы решения и исследования одного класса задач неточного целочисленного программирования // Кибернетика. – 1989. – № 2. – С. 42–47.
124. Сачков В.Н. Введение в комбинаторные методы дискретной математики. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1982. – 384 с.
125. Семенова Н.В. Гарантирующие и оптимистические решения задач целочисленной оптимизации с выпуклыми квадратичными функциями ограничений // Теорія оптимальних рішень. Зб. наук. праць. Київ: Ін-т кібернетики ім В.М. Глушкова НАНУ. – 2006. – № 5. – С. 39– 46.
126. Семенова Н.В. Методы поиска гарантирующих и оптимистических решений задач целочисленной оптимизации в условиях неопределенности данных // Кибернетика и систем. анализ. – 2007. – № 1. – С. 103–114.
127. Семенова Н.В. Векторные задачи на комбинаторном множестве полиразмещений: условия оптимальности и подход к решению // Intern. Book Series «Information science and computing», № 7, Supplement to Intern. Journal «Information Theories and Knowledge», Institute of Information Theories and Applications FOI ITHEA. – Sofia, Bulgaria, 2008. – **2**. – P. 187–195.
128. Семенова Н.В. Условия оптимальности в векторных задачах комбинаторной оптимизации // Теорія оптимальних рішень. Зб. наук. праць. Київ: Ін-т кібернетики ім. В.М. Глушкова НАНУ. – 2008. – № 7. – С. 153–160.
129. Семенова Н.В. О решении векторных задач частично дискретной оптимизации // Комп’ютерна математика. Зб. наук. праць. Київ: Ін-т кібернетики ім В.М. Глушкова НАНУ. – 2008. – № 2. – С. 156 –164.
130. Семенова Н.В., Колечкина Л.Н., Нагорная А.Н. Подход к решению векторных задач дискретной оптимизации на комбинаторном множестве перестановок // Кибернетика и системный анализ. – 2008. – № 3 – С. 158–172.
131. Семенова Н.В., Колечкина Л.Н., Нагорная А.Н. Решение и исследование векторных задач комбинаторной оптимизации на множестве полиперестановок // Проблемы управления и информатики. – 2008. – № 6 – С. 26–41.
132. Семенова Н.В., Колєчкіна Л.М., Нагірна А.М. Розв’язання багатокритеріальних задач оптимізації на множині поліперестановок // Доп. НАН України. – 2009. – № 2. – С. 41–48.
133. Семенова Н.В., Колєчкіна Л.М. Поліедральний підхід до розв’язання одного класу векторних задач комбінаторної оптимізації // Доповіді НАН України – 2009. – № 6. – С. 46–53.

134. Семенова Н.В., Колечкина Л.Н. Многокритериальные задачи на комбинаторном множестве полиразмещений: полиэдральный подход к их решению // Кибернетика и систем. анализ – 2009. – № 3. – С.118–126.
135. Семенова Н.В., Колечкина Л.Н., Нагорная А.Н. Розв'язування задач векторної оптимізації з дробово-лінійними функціями критеріїв на комбінаторній множині полірозміщень // Наук. вісті Нац. техн. університету України «Київський політехнічний інститут». – 2009. – № 2. – С. 53–60.
136. Сергиенко И.В. Вопросы разработки одного подхода к решению задач оптимизации в системах обработки данных и в автоматизированных системах управления // Управляющие системы и машины. – 1974. – № 6. – С.107–115.
137. Сергиенко И.В. Математические модели и методы решения задач дискретной оптимизации. – К: Наук. думка, 1988. – 471 с.
138. Сергієнко І.В. Інформатика в Україні: становлення, розвиток, проблеми. – К.: Наук. думка, 1999. – 354 с.
139. Сергієнко І.В. Інформатика та комп'ютерні технології. – К.: Наук. думка, 2004. – 432 с.
140. Сергиенко И.В., Дейнека В.С. Системный анализ многокомпонентных распределенных систем. – К.: Наук. думка, 2009. – 640 с.
141. Сергиенко И.В., Каспшицкая М.Ф. Модели и методы решения на ЭВМ комбинаторных задач оптимизации. – К.: Наук. думка, 1981. – 288 с.
142. Сергиенко И.В., Лебедева Т.Т., Семенова Н.В. О существовании решений в задачах векторной оптимизации // Кибернетика и систем. анализ. – 2000. – № 6. – С. 39–46.
143. Сергиенко И.В., Рощин В.А., Семенова Н.В. Некоторые задачи целочисленного программирования с неоднозначно заданными данными и их решение // Пробл. управ. и информатики. – 1998. – № 6. – С. 116–123.
144. Сергиенко И.В., Козерацкая Л.Н., Лебедева Т.Т. Исследование устойчивости и параметрический анализ дискретных оптимизационных задач. – К.: Наук. думка, 1995. – 171 с.
145. Сергиенко И.В., Лебедева Т.Т., Рощин В.А. Приближенные методы решения дискретных задач оптимизации. – К.: Наук. думка, 1980. – 276 с.
146. Сергиенко И.В., Рощин В.А. Метод неявного перебора для решения некоторых экстремальных задач на множествах // Обчислювальна та прикладна математика. Сер. Оптимізація. – 1996. – Вип. 80. – С. 106–118.

147. Сергиенко И.В., Шило В.П. Задачи дискретной оптимизации: проблемы, методы решения, исследования. – К.: Наук. думка, 2003. – 264 с.
148. Сергиенко И.В., Семенова Н.В. Задачи целочисленного программирования с неоднозначно заданными данными: точные и приближенные решения // Кибернетика и сист. анализ. – 1995. – № 6. – С. 75–86.
149. Сигал И.Х., Иванова А.П. Введение в прикладное дискретное программирование: модели и вычислительные алгоритмы. – М.: Физматлит, 2003. – 240 с.
150. Соболь И.М., Статников Р.Б. Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями. – М.: Наука, 1981.
151. Современное состояние теории исследования операций / под ред. Н.Н. Моисеева. – М.: Наука, 1979. – 464 с.
152. Стенли Р. Перечислительная комбинаторика. – М.: Мир, 1990. – 440 с.
153. Стоян Ю.Г., Ємець О.О. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації. – К.: Ін-т систем. досліджень освіти, 1993. – 188 с.
154. Стоян Ю.Г., Ємець О.О., Ємець Є.М. Оптимізація на полірозміщеннях: теорія та методи. – Полтава: РВВ ПУСКУ, 2005. – 104 с.
155. Стоян Ю.Г., Соколовский В.З. Решение некоторых многоэкстремальных задач методом сужающихся окрестностей. – К.: Наук. думка, 1980. – 208 с.
156. Стоян Ю.Г., Яковлев С.В. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования. – К.: Наук. думка, 1986. – 268 с.
157. Схрейвер А. Теори линейного и целочисленного программирования. В 2-х т. – М.: Мир, 1991.– Т. 1– 362 с.; Т. 2. – С. 363 –704.
158. Танаев В.С., Шкурба В.В. Введение в теорию расписаний. – М.: Наука, 1975. – 256 с.
159. Таха Х.А. Введение в исследование операций: В 2-х кн. – М.: Мир, 1985.– кн. 1 – 480 с.; кн. 2 – 496 с.
160. Трухаев Р.И. Модели принятия решений при неопределенности. – М.: Наука, 1981.– 258 с.
161. Фишберн П. Теория полезности для принятия решений. – М.: Наука, 1978. – 352 с.
162. Чарин В.С. Линейные преобразования и выпуклые множества. – К.: Вища школа, 1978. – 191 с.
163. Червак Ю.Ю. Оптимізація. Непокращуваний вибір. – Ужгород.: Ужгородський національний університет, 2002. – 312 с.
164. Черников С.Н. Линейные неравенства. – М.: Наука, 1968. – 488 с.

165. Чернов Ю.П., Ланге Э.Г. Задачи нелинейного программирования с удельными экономическими показателями. – Фрунзе: Илим. – 1978. – 290 с.
166. Шибанов С.Е., Шило В.П. Многокритериальный подход к задаче оптимизации альтернативных маршрутных стратегий в ненадежной сети передачи данных // Численные методы и технология разработки пакетов прикладных программ. – К.: Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова НАНУ, 1990. – С. 19–23.
167. Шоломов Л.А. Логические методы исследования дискретных моделей выбора. – М.: Наука, 1989. – 288 с.
168. Шор Н.З., Соломон Д.И. Декомпозиционные методы в дробно-линейном программировании. – Кишенев: Штиинца, 1989. – 204 с.
169. Штойер Р. Многокритериальная оптимизация. Теория, вычисления и приложения. – М.: Радио и связь, 1992. – 504 с.
170. Элементы теории геометрического проектирования // С.В. Яковлев, Н. И. Гиль, В. М. Комяк и др. / под ред. акад. НАН Украины В.Л. Рвачева. – К.: Наук. думка, 1995. – 240 с.
171. Яковлев С.В., Валуйская О.А. О минимизации линейной функции на вершинах перестановочного многогранника с учетом линейных ограничений // Доповіді НАН України. – 1999. – № 4. – С. 103–108.
172. Яковлев С.В., Гребенник И.В. О некоторых классах задач оптимизации на множестве размещений и их свойствах // Известия вузов. Математика. – 1991. – № 11. – С. 74–86.
173. Aardal K., Hoesel S. Polyhedral techniques in combinatorial optimization I: Theory // Statist. Neerlandica.– 1996. **15**. – P. 3–26. II: Computations // Ibid. – 1999. – **53**, Issue − P. 131 – 177.
174. An algorithm for traveling salesman problem / J.D.C. Little, K.G. Murty, D.W. Sweeney, C. Karel // Operat. Res. – 1963. – II, №6, P. 972-989.
175. Arora S. R., Puri M.C. Enumeration technique for the set covering problem with a linear fractional functional as its objective function // ZAMM – 1977. – Band 57, Heft 3. – P. 181–186.
176. Calpine H. C., Golding A. Some properties of Pareto-optimal choices in decision problems. – OMEGA, 1976, **4**, N. 2, P. 141–147.
177. Chadha S.S. Dual for a linear fractional program with variable coefficients // Math. Repts Acad. Sci., Can. – 1995. – **17**, N. 1. – P. 43–48.
178. Chadha S.S., Heeg R.A. Duality for a family of nonlinear fractional programming problems // Math. Repts Acad.Sci., Can. – 1996. – **18**, N. 6. – P. 237–242.

179. Chinchuluum A., Pardalos P.M. A survey of recent developments in multiobjective optimization // Ann. Oper. Res. – 2007. – **154**. – P. 29–50.
180. Cooper C., Gilchrist R., Kovalenko I.N., Novakovic D. Deriving the number of “good” permutations, with applications to cryptography // Кибернетика и систем. анализ. – 1999. – № 5. – С. 10–17.
181. Ehrgott M., Gandibleaux X. A survey and annotated bibliography of multiobjective combinatorial optimization // OR. Spektrum – 2000. – **22**. – P. 425–460.
182. Gaiha P., Gupta S. Adjacent vertices on a permutohedron // SIAM J. Appl. Math. – 1977. – **32**, N 2. – P. 323–327.
183. Gulati T.R., Islam M.A. Efficiency in linear fractional vector maximization problem with nonlinear constraints // Optimization. – 1989. – **20**, N 4. – P. 477–482.
184. Kelley I.E. The cutting plane method for solving convex programs // SIAM J. – 1960. – **8**. – P. 703–712.
185. Kornbluth J.S.H., Steuer R.E. Multiple objective linear fractional programming // Management Science, 1981. – **27**, N. 9, P. 1024–1039.
186. Malivert C., Boissard N. Structure of efficient sets for strictly quasi convex objectives // Journal of Convex Analysis – 1994. – **1**, № 2. – C.143–150.
187. Lebedeva T.T., Semenova N.V/, Sergienko T.I. Stability of vector integer optimization problems with quadratic criterion functions // Theory of stochastic processes. – Kyiv, Institute of Mathematics of NASU. – 2004. – № 3–4. – P. 95–101.
188. Pacelli G. Optimization of a linear fractional function on a hypersphere of an affine space // J. Optimiz. Thery and Appl. – 1995. – 84, № 2. – P. 407–414.
189. Pareto V. Manuel d’economie politique. Paris: Geard, 1909.
190. Rado R. An inequality // J. London Math. Soc., 1952, 27.
191. Semenova N., Kolechkina L. Multicriterion problems on the combinatorial set of polyarrangements // Intern. Book Series “Information science and computing”, № 7, Supplement to Intern. Journal “Information Theories and Knowledge”. Institute of Information Theories and Applications FOI ITHEA. – Sofia, Bulgaria, 2009. – **2**. – P. 115–126.
192. Semenova N.V., Kolechkina L.M., Nagirna A.M. Vector combinatorial problems in a space of combinations with linear fractional functions of criteria // Information Theories and Applications. – 2008. – **15**, N 3. – P. 240–245.
193. Smale S. Global analysis and economics, V. Pareto theory with constraints // J. Math. Econ. – 1974. – N 1. – P. 213−221.

194. Steuer R.E., Na P. Multiple criteria decision making combined with finance: a categorized bibliography // Eur. J. Oper. Res. – 2003. – **150**. – P. 496–515.
195. Takeda E., Nishida T. Multiple criteria decision problems with fuzzy domination structures // Fuzzy sets and syst. – 1980, **3**. – P. 123–136.
196. Teghem J.Jr., Kunsch P.L. A survey of techniques for finding efficient solutions to multi-objective integer linear programming // Asia-Pacific of Operational Research. – 1986, **3**. − P. 95–108.
197. Toshihide I. Integer programming formulation of combinatorial optimization problems // Discrete math. – 1976, **16**, N 1.− P. 39–52.
198. Yu P.L., Zeleny M. The set off all nondominated solutions in linear simplex method // Mathem. analysis and applications. –1975, **49**.
199. Zadeh L.A. Fuzzy sets // Inform. Control. – 1965, **8**. − P. 338–353.
200. Vincke Ph. Analysis of multicriteria decision aid in Europe // European Journal of Operational Research. –1986, **25**. − 160−168.