Полтавський університет
споживчої кооперації України

Колєчкіна Людмила Миколаївна

УДК 519.85

ВЛАСТИВОСТІ ЗАДАЧ БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ НА КОМБІНАТОРНИХ МНОЖИНАХ ТА МЕТОДИ ЇХ РОЗВ'ЯЗАННЯ

Полтава-2008

УДК 519.85
ББК 22.176
К60

Затверджено до друку вченою радою Полтавського інституту споживчої кооперації України Міністерства освіти і науки України Укоопспілки від 1 липня 2008 р., протокол № 7

Рецензенти: ***Донець Г.П.,*** завідувач відділом інституту кібернетики ім. В.М. Глушкова НАНУ, д.ф.-м.н.
Яковлєв С.В., ректор університету засобів масової інформації і телекомунікацій, заслужений діяч науки і техніки України, професор, д.ф.-м.н.

Колєчкіна Л.М.
К60 Властивості задач багатокритеріальної оптимізації на комбінаторних множинах та методи їх розв'язання: Монографія. – Полтава: РВВ ПУСКУ, 2008. – 162 с.

ISBN 978-966-7971-91-5

У монографії викладено дослідження властивостей задач багатокритеріальної оптимізації на комбінаторних множинах. Розглянуто методи їх розв'язання. Зокрема, на основі встановленого взаємозв'язку між багатокритеріальними задачами на комбінаторних множинах і оптимізаційними задачами на неперервній допустимій множині в даній роботі вивчені деякі структурні властивості допустимої області, а також сформульовано и доведено ряд теорем про умови оптимальності різних видів ефективних розв'язків розглянутих задач. Для багатокритеріальних задач комбінаторного типа на перестановках та розміщеннях запропоновано підходи до їх розв'язання, зроблено розрахунки. Монографія може бути рекомендована для аспірантів і широкого кола фахівців, що цікавляться математичним моделюванням та теорією багатокритеріальної комбінаторної оптимізації.

УДК 519.85
ББК 22.176

ISBN 978-966-7971-91-5

ЗМІСТ

ВСТУП

Задачі оптимізації декількох функцій виникають при дослідженні багатьох теоретичних і прикладних проблем. Практично будь-яка задача оптимального проектування схем, технологічних пристроїв машин, конструкцій, складання мережевих графіків, планування і управління виробничою і комерційною діяльністю вимагає, щоб шуканий розв'язок знаходився з урахуванням багатьох критеріїв. Останні, як правило, суперечливі в тому розумінні, що якість порівнюваних альтернатив неможливо адекватно виразити одним комплексним критерієм, що демонструє деяку згортку початкових критеріїв. Отже, це означає, що апарат класичної однокритеріальної оптимізації є недостатнім для пошуку і ухвалення ефективних розв'язків. Таким чином, є необхідним подальше дослідження і використання ширшої та більш загальної теорії, яка називається багатокритеріальною оптимізацією.

Дослідження в області багатокритеріальної оптимізації в даний час особливо інтенсивно стимулюються практичними потребами і розвитком комп'ютерних інформаційних технологій. Тому останнім часом з'явилася велика кількість праць, присвячена задачам багатокритеріальної оптимізації [11, 14–16, 28–30, 64–66, 69, 84–86, 91, 92, 107–109, 117–119, 161, 165, 172].

Вагомий вклад у розвиток багатокритеріальної оптимізації в Україні внесли І.В. Сергієнко, В.С. Міхалєвич, Н.З. Шор, В.А. Трубін, Ю.Ю. Червак, В.А. Перепелиця, Н.В. Семенова [91, 92, 98, 116, 126] та інші вчені.

Зокрема, В.А. Перепелицею та його учнями в Запорізькому державному університеті проведені дослідження, які стосуються математичного моделювання задач в області економіки і техніки з використанням моделей дискретної багатокритеріальної оптимізації. Вивчені властивості комбінаторних оптимізаційних задач з векторним критерієм, питання їх складності, розв'язуваності, стійкості, алгоритмічні проблеми їх розв'язання.

Вивчені властивості розв'язності задач векторної оптимізації за допомогою алгоритму лінійної згортки критеріїв, який є найпоширенішим алгоритмом пошуку елементів множини Парето для векторних задач.

Вченими кафедри обчислювальної математики Ужгородського національного університету під керівництвом Ю.Ю. Червака досліджено ряд нових моделей оптимального вибору за багатьма критеріями, які порівнюються між собою за важливістю при оцінці альтернативних розв'язків задач оптимізації таким чином, що один з кожних двох критеріїв важливіший, ніж другий, або ж обидва вони однаково важливі.

Відома паретовська задача, наприклад, сформульована як задача вибору на допустимій множині альтернатив, коли критерії вибору є попарно рівноважливими. Задача лексикографічної оптимізації зведена до задачі вибору на множині *X*, в якій критерії є попарно різноважливими, тобто ранжирувані за важливістю. Цікаві результати одержані по застосуванню ідей лексикографічної оптимізації до розв'язання однокритеріальних задач дискретної оптимізації, зокрема, до задач, в яких частина або всі змінні є цілочисловими. Відомий загальний підхід до розв'язування задач у вигляді методу лексикографічних відсікань.

Але багато задач проектування, планування, розміщення, управління та інші описуються за допомогою різних моделей багатокритеріальної оптимізації, розв'язки яких мають комбінаторні властивості, зокрема, переставні, сполучні та інші, тобто пошук розв'язків здійснюється на комбінаторній множині. Як відомо [136, 141], комбінаторні множини набувають специфічних властивостей при зануренні їх в арифметичний евклідів простір. Застосування таких властивостей дає можливість розглядати різні оптимізаційні задачі і розробляти нові спеціальні методи для їх розв'язання.

Різним аспектам розв'язання проблем, пов'язаних з дослідженням задач дискретної, зокрема, комбінаторної оптимізації, присвячені роботи багатьох вчених [9, 18, 31–41, 49–62, 119–121, 134–144]. Підходи до розв'язання дискретних комбінаторних оптимізаційних задач, що базуються на зануренні комбінаторних множин в арифметичний евклідів простір, розробляються зокрема в Харкові під керівництвом Стояна Ю.Г., Яковлєва С.В. та в Полтаві під керівництвом Ємця О.О.

Часто при розв'язуванні прикладних задач виникає потреба, коли необхідно формалізувати в вигляді критеріїв ряд окремих вимог, які пред'являються до розв'язку та врахувати комбінаторні властивості множини розв'язків. Тоді є необхідним сформулювати і дослідити модель задачі, яка об'єднує багатокритеріальність альтернатив та допустимі множини розв'язків, що мають різні комбінаторні властивості.

Отже, в роботі розглядається якісно нова і актуальна задача, яка об'єднує в собі проблему багатокритеріальності і комбінаторні властивості розв'язків.

Дана монографія є продовженням вказаних вище досліджень евклідових багатокритеріальних задач оптимізації на комбінаторних множинах та їх опуклих оболонок, пошуків нових методів їх розв'язання.

В роботі викладені властивості ефективних розв'язків евклідових багатокритеріальних задачах дискретної оптимізації на різних комбінаторних множинах, побудовані методи та алгоритми розв'язання таких задач оптимізації. Зокрема, запропонована постановка евклідових комбінаторних задач з багатьма критеріями на комбінаторних множинах перестановок, розміщень та полірозміщень, сформульовано і доведено властивості ефективних розв'язків. Викладено метод та запропоновано алгоритми розв'язування класу задач з багатьма критеріями на перестановках, полірозміщеннях, який є подальшим розвитком комбінованого методу обмежень та методу відсікання для класу лінійних комбінаторних задач. Побудовані математичні моделі прикладних задач з багатьма критеріями на загальній множині перестановок як задач евклідової багатокритеріальної комбінаторної оптимізації.

Одержані властивості допустимих розв'язків задач з багатьма критеріями на перестановках, розміщеннях та полірозміщеннях можуть використовуватись при розв'язуванні багатокритеріальних задач оптимізації на інших комбінаторних множинах, зокрема, поліпереставних, сполучних.

Методи та розроблені алгоритми можуть бути застосовані для розв'язування задач з векторним критерієм та з додатковими обмеженнями на інших комбінаторних множинах, які мають аналогічну математичну модель, або зводяться до неї.

РОЗДІЛ 1. БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНІ ЗАДАЧІ ДИСКРЕТНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ ТА МЕТОДИ ЇХ РОЗВ'ЯЗАННЯ

Практично будь-яка прикладна задача є багатокритеріальною, бо як правило, звести її до одного критерію досить складно, так як цілей може бути більше. В цьому випадку оптимізація проводиться по декількох частинних критеріях, і задача зводиться до розгляду задачі багатокритеріальної оптимізації. В зв'язку з цим особливе значення на даний час набуває теорія прийняття рішень при наявності багатьох критеріїв. Одним із основних понять теорії багатокритеріальної оптимізації є поняття оптимального по Парето, або ефективного розв'язку. Концепція прийняття рішення в якості первинного елементу діяльності розглядає розв'язок багатокритеріальної задачі, як вибір однієї із ряду альтернатив.

Застосування математичних методів при прийнятті рішень передбачає побудову математичної моделі, що формально представляє проблематику задачі. Для задачі оптимізації компонентами такої моделі є множина всіх розв'язків, з яких і необхідно вибрати найкращий, оптимальний розв'язок або множину оптимальних розв'язків.

1.1. Побудова математичної моделі задачі багатокритеріальної оптимізації та її властивості

В багатокритеріальній задачі оптимізації порівняння розв'язків здійснюється за допомогою заданих на множині допустимих альтернатив числових функції $f_1,\dots,f_s,f_{s+1},\dots,f_m$, що називаються критеріями. Передбачається, що $m\ge 2$, бо при $m=1$ задача оптимізації являється однокритеріальною.

Для кожного критерію f_i на числовій прямій вказується підмножина, на якій він приймає значення.

Розглянемо багатокритеріальну задачу оптимізації. Через N_m, N_s позначаємо множини m та s перших натуральних чисел відповідно, $N_m=\{1,\dots,m\}$, $N_s=\{1,\dots,s\}$. Критерії, що оптимізуються, представляються набором функцій:

$$f_1(x)=\sum_{j=1}^{k} c_j^1 x_j \to min;$$

$$f_2(x)=\sum_{j=1}^{k} c_j^2 x_j \to min;$$

$$\dots$$

$$f_s(x)=\sum_{j=1}^{k} c_j^s x_j \to min;$$

$$f_{s+1}(x)=\sum_{j=1}^{k} c_j^{s+1} x_j \to max;$$

$$\dots$$

$$f_m(x)=\sum_{j=1}^{k} c_j^m x_j \to max. \qquad (1.1)$$

Тобто з m функцій s мають мінімізуватись, а $m-s$ навпаки максимізуються. Але у практичному застосування часто виникає потреба у зменшенні одних критеріїв та збільшенні інших. Частинним випадком цієї ситуації буде випадок, коли всі функції максимізуються або мінімізуються.

Набір функцій (1.1) можна представити у вигляді вектор-функції:

$$\vec{F}=\left(-f_1(x),\dots,-f_s(x),f_{s+1}(x),\dots,f_m(x)\right) \qquad (1.2)$$

максимум якої необхідно знайти.

Тоді доцільно розглядати задачу $Z(F,X)$ максимізації векторного критерію $\vec{F}=(f_1,...,f_m)$, визначеного на непустій обмеженій множині $X \subset R^n$ довільної, можливо дискретної, структури. Де $f_1(x),\dots,f_m(x)$ – лінійні функції (1.1) $f_i(x): R^n \to R^1$, $i \in N_n, N_m=\{1,...,m\}$. Під розв'язком цієї задачі як правило розуміють знаходження елементів однієї із наступних множин [116, 125]:

1) множини Парето $P(F,X)$, тобто множини ефективних (оптимальних по Парето) розв'язків, де:

$$P(F,X)=\{x \in X : \pi(x,X)=\varnothing\} \qquad (1.3)$$

$$\pi(x,X)=\{y \in X : F(y) \geq F(x), F(y) \neq F(x)\}$$

2) множини Слейтера $Sl(F,X)$ слабо ефективних розв'язків, де:

$$Sl(F,X)=\{x \in X : \sigma(x,X)=\varnothing\} \qquad (1.4)$$

$$\sigma(x,X)=\{y \in X : F(y) > F(x)\}$$

3) множини Смейла $Sm(F,X)$ строго ефективних розв'язків, де:

$$Sm(F,X)=\{x\in X : \eta(x,X)=\varnothing\} \tag{1.5}$$

$$\eta(x,X)=\{y\in X\setminus\{x\} : F(y)\geq F(x)\}.$$

Очевидно, що:

$$Sm(F,X)\subset P(F,X)\subset Sl(F,X).$$

Слід зазначити, що кожний розв'язок характеризується відповідною векторною оцінкою, тобто вектором $\overrightarrow{F}$. Тому вибір оптимального розв'язку із множини всіх розв'язків зводиться до вибору оптимальної оцінки із множини оцінок:

$$Y=F(X)=\left\{y\in R^m \middle| y=F(x), x\in X\right\}.$$

1.2. Методи розв'язування багатокритеріальних задач дискретної оптимізації

Розглянемо методи розв'язування багатокритеріальних задач дискретної оптимізації. Як уже було зазначено, вибір розв'язку задачі багатокритеріальної оптимізації, потрібно робити з множини ефективних альтернатив тобто Парето-оптимальних, чи слабо-ефективних альтернатив (оптимальних по Слейтеру), чи строго-ефективних альтернатив (оптимальних по Смейлу).

Звичайно, якщо множина абсолютно-оптимальних альтернатив не є порожньою, то будь-яка з них може вважатися розв'язком багатокритеріальної задачі. Як було з'ясовано вище, на практиці такі задачі зустрічаються досить рідко. Таким чином, потрібно вирішити, що робити у випадку, коли множина абсолютно-оптимальних альтернатив є порожньою. Оскільки ефективні альтернативи є непорівняними між собою за перевагою, яка задається критеріями задачі, а якимось чином їх необхідно порівняти, то для цього потрібна додаткова інформація окрім тієї, яка є при порівнянні альтернатив за кожним критерієм окремо. Отже, для порівняння ефективних альтернатив, потрібна додаткова інформація про перевагу не на множині альтернатив, а на множині критеріїв, тобто інформація такого типу: скількома одиницями виграшу за одними критеріями можна компенсувати програшем за іншими критеріями. Джерелом такої інформації може бути як особа, що приймає рішення, так і специфіка предметної області, в якій розв'язується задача прийняття рішення [14, 108].

Так як у рамках постановки багатокритеріальної задачі проблема вибору єдиної ефективної альтернативи не може бути розв'язаною, то для вирішення такої задачі необхідно ввести правило *R* вибору єдиної альтернативи з множини ефективних альтернатив.

Нехай $R(X,F)$ – множина альтернатив багатокритеріальної задачі:

$$max\left\{F(x)=\left(f_1(x),...,f_m(x)\right)\middle| x\in X\right\},$$

яка задовольняє правилу вибору *R*. Згідно [14], сформулюємо умови, яким це правило повинно задовольняти у загальному випадку:

1) вибір повинен бути зробленим завжди, тобто множина альтернатив не порожня $R(X,F)\neq\varnothing$, тому вибирається ефективний розв'язок з множини можливих альтернатив, тобто $R(X,F)\subseteq P(X)$;

2) згідно правилу *R* однозначно визначається розв'язок багатокритеріальної задачі, тобто якщо $x',x''\in R(X,f)$, то $x' \sim x''$;

3) якщо множина альтернатив X' є підмножиною іншої *X*, то вибір $R(X,f)$ з «більш широкої» множини альтернатив *X*, якщо він належить «більш вузькій» множині альтернатив $R(X,f)\subseteq X'$, повинен бути вибором з цієї множини. Тобто якщо $R(X,f)\cap X'\neq\varnothing$, то $R(X,f)\cap X'=R(X',f)$.

Можна побудувати необмежену кількість правил вибору, які задовольняють цим умовам, що дасть можливість пристосуватися до специфіки предметної області і особи, що приймає рішення.

Незважаючи на такий широкий спектр різних можливих правил вибору, серед них можна виділити певні класи [14]:

1. Правила вибору, які безпосередньо визначені на множині ефективних альтернатив, тобто $R(X,f)=R(P(X),f)$. Перевагою таких правил є їх простота, а суттєвим недоліком – необхідність побудови усієї множини ефективних альтернатив.

2. Правила вибору, які є суперпозицією двох правил вибору: правила вибору $R'(X,f)$, що є визначеним на множині альтернатив і вибирає деяку підмножину альтернатив, яка містить як ефективні, так і неефективні альтернативи, і правила вибору $R(R'(X,f),f)$, що є визначеним на множині вже попередньо вибраних альтернатив і вибирає тільки ефективну альтернативу. Такий розподіл правил

вибору на два правила в деяких практичних ситуаціях дозволяє реалізувати досить ефективний вибір.

3. Діалогові процедури вибору. Цей клас правил вибору враховує той факт, що формалізація правила в багатьох практичних ситуаціях прийняття рішень ускладнюється наявністю «людського» фактору.

Це приводить до необхідності створення правил вибору у вигляді діалогової процедури, яка являє собою ітеративний процес взаємодії між особою, що приймає рішення і комп’ютером.

Кожна ітерація i, де $i = 1, 2, \ldots$, складається з двох етапів:

1. Обчислювальний етап. На даному етапі комп’ютер використовує отриману від особи, що приймає рішення інформацію для побудови правила вибору, визначає ефективну альтернативу $x^i = R^i\left(X, f\right)$ і формує допоміжну інформацію для визначення переваг альтернатив.
2. Етап прийняття рішення. Аналізується отримана від комп’ютера ефективна альтернатива та допоміжна інформація. Якщо ця інформація задовольняє особу, що приймає рішення, то приймається рішення про вибір розв’язку, в протилежному випадку дається нова інформація для комп’ютера, завдяки якій буде робитися інший вибір і т.д.

Методи багатокритеріальної оптимізації являють собою чисельну реалізацію певного правила вибору ефективної (Парето-оптимальної), слабо-ефективної (оптимальної за Слейтером), строго-ефективної (оптимальної за Смейлом) альтернатив. Вони класифікуються за типами інформації наступним чином [14]: методи багатокритеріальної оптимізації; методи, які не використовують інформацію про перевагу на множині критеріїв; методи, які використовують один тип інформації про перевагу на множині критеріїв; методи, які використовують різні типи інформації про перевагу на множині критеріїв; спеціальні методи.

Наведемо короткий огляд відомих методів багатокритеріальної оптимізації.

Принцип справедливого компромісу

Нехай всі локальні критерії, створюючи вектор-функцію (1.2) є однаково важливими.

Справедливим вважається такий компроміс, при якому відносний рівень зниження якості одного або декількох критеріїв не перевершує відносного рівня підвищення якості по решті критеріїв (менше або рівно).

Цьому принципу можна дати наступну математичну інтерпретацію: нехай в області визначення D_x дано два розв’язки x' і x'', якість яких оцінюється критеріями $F_1\left(x\right)$ і $F_2\left(x\right)$. Розв’язок x' переважає над розв'язком x'' по критерію $F_1(x)$, але поступається йому по критерію $F_2(x)$. Необхідно порівняти ці розв'язки і вибрати найкращий на основі принципу справедливого компромісу.

Для порівняння цих розв'язків на основі принципу справедливого компромісу введемо міру відносного зниження якості розв'язків по кожному з критеріїв – ціну поступки *x*:

$$x_1 = \frac{\Delta F_1(x', x'')}{\max\limits_{x', x''} F_1(x)}, \quad x_2 = \frac{\Delta F_2(x', x'')}{\max\limits_{x', x''} F_2(x)}, \tag{1.6}$$

де ΔF_1 і ΔF_2 – абсолютні зниження рівня критеріїв при переході від розв'язку x' до розв'язку x'' (для критерію $F_1(x)$) і при зворотному переході (для критерію $F_2(x)$).

Якщо відносне зниження критерію $F_1(x)$ більше, ніж критерію $F_2(x)$, то слід віддати перевагу розв'язку x'. Це випливає з порівняння ціни поступки по кожному критерію.

Алгоритм розв'язання задачі векторної оптимізації, що реалізує принцип справедливого компромісу, включає наступні кроки.

Крок 0. Вибираємо x' і x'' є D_x.

Крок 1. Обчислюємо по формулах (1.6) x_1 і x_2.

Крок 2. Якщо $x_1 > x_2$, то вибираємо x', якщо $x_1 < x_2$, то вибираємо x_2.

Крок 3. Якщо не існує вектора $x \in D_x$, що переважає над x_1 або x_2, то процес розв'язування зупиняється, інакше вибираємо новий вектор x_3 і переходимо до кроку 1.

Модель визначення області компромісів, а також модель справедливого компромісу інваріантні до масштабу вимірювання критеріїв. Проте перша з них є допоміжною при виборі розв'язку, а інша може бути використана тільки в тих ситуаціях вибору розв'язку, для яких ідея справедливого компромісу може бути виправдана. Тому в більшості випадках доводиться вдаватися до інших принципів оптимальності, що мають сенс тільки у разі нормалізованого простору критеріїв, коли всі локальні критерії мають єдиний масштаб вимірювання. В більшості випадків масштаби вимірювання критеріїв неоднакові, і виникає необхідність проводити нормалізацію критеріїв, тобто штучно приводити їх до єдиної міри.

Більшість принципів нормалізації ґрунтується на введенні ідеального розв'язку, тобто розв'язку, що володіє ідеальним вектором ефективності F_i. Цей ідеальний розв'язок можна апріорно припустити виходячи з інформації про об'єкт, а можна розв'язати задачу оптимізації для кожного локального критерію і відповідно значення вектора ефективності прийняти за ідеальний вектор ефективності F_i. Тоді вибір оптимального розв'язок стає рівнозначним якнайкращому наближенню до цього ідеального вектора $F_i = \left(F_{i_1}..,F_{i_n}\right)$. В цьому випадку замість дійсного значення критеріїв розглядаються або їх відхилення від ідеального значення

$$dF_j = F_{i_j} - F_j,$$

або їх безрозмірне відносне значення:

$$\overline{F_j} = F_j \,/\, F_{i_j}.$$

При розв'язуванні даної задачі використовуються обидва способи нормалізації. Таким чином, успішний розв'язок проблеми нормалізації багато в чому залежить від того, наскільки точно і об'єктивно вдається визначити ідеальну якість розв'язку.

Після нормалізації критеріїв ефективності задача вибору розв'язку набуває математичного значення. В теоретико-множинному відношенні вона стає задачею впорядковування обмежених векторних множин, а з погляду теорії наближень – задачею наближення в метричному просторі. Це дає можливість проводити обґрунтований вибір принципів оптимальності і визначати їх значення.

Отже, для даного випадку принцип оптимальності ідентичний принципу наближення, а узагальнений скалярний критерій оптимізації – критерію наближення, що є деякою функцією відхилення від ідеальної функції.

Принцип слабкої оптимальності по Парето

Вектор $x \in X$ називається слабо-оптимальним розв'язком (оптимальним по Слейтеру), якщо не існує вектора $x_1 \in X$, такого, що:

$$f\left(x \,|\, y\right) \geq f\left(x_1 \,|\, y\right) \forall y \in Y.$$

Нехай $x_{o_i}, i \in N_m$ є оптимальні розв'язки для скалярних оптимізаційних задач, кожна з яких максимізувала компоненту $F_i\left(x\right)$ вектора $F\left(x\right)$:

$$\max_{x\in X} F_i(x), i \in N_m. \qquad (1.7)$$

Якщо вони є максимальними розв'язком для кожного значення i, то вважаємо, що $F_i\left(x_{o_i}\right) > F_i\left(x_j\right)$, $i \in N_m$, де x_{o_i} – оптимальний розв'язок даної задачі.

Припустимо, що S_i зображає множину розв'язків, кожний з яких відповідає функції F_i: $S_i = \left\{x \mid F_i\left(x_j\right) \le F_i\left(x_{0n}\right) + a_i\right\}$, де a_j, $i \in N_m$, представляє допустиму кількість обмежень відповідної області по відношенню до функції $F_i(x)$. Тоді оптимальний достатній розв'язок, це такий розв'язок, при якому мінімальний компонент (якнайгірший компонент) максимізувався на множині, що задовольняє достатній умові $x \in X$ і $x \in S_1, S_2, \ldots, S_m$, де X – область допустимих значень векторної задачі (1.2), а $S_1, S_2, \ldots, S_m$ – множина розв'язків для кожної функції. Вона може бути сформульовано так

$$\max z, \qquad (1.8)$$

де

$$F_i(x) \ge z;$$

$$F_i(x) \ge F_j\left(x_{o_i}\right) - a_j, i \in N_m,\ x \in X. \qquad (1.9)$$

В даному випадку задача (1.8)–(1.9) нерозв'язна, якщо a_j є малим значенням, а перетин $\{S_i\}$ не порожній. Величини a_j повинні бути визначені на основі значень $F_i\left(x_{o_i}\right)$ або аналізу точності. Відомо, що оптимальний розв'язок задачі (1.8)–(1.9) є оптимальним розв'язком по Парето.

Алгоритм розв'язку задачі має наступні кроки.

Крок 1. Вважаємо $l = 1$ і розв'язуємо задачу:

$$\max z \text{ при}$$

$$F_i(x) \ge z;$$

$$F_i(x) \ge F_j\left(x_{o_i}\right) - a_j, i \in N_m, x \in X.$$

Одержуємо початковий розв'язок x_1 і оцінюємо значення цільової функції $F(x_1)$.

Крок 2. Коли x_1 задане, розкладаємо $F(x_1)$ на додатні і від'ємні компоненти. Позначимо їх відповідно через S_l і $\overline{S_l}$.

Якщо $S_l \neq 0$, тоді ця задача вважається нерозв'язною, а якщо $S_l = \varnothing$, то x_1 – оптимальний розв'язок. Якщо $\overline{S} \neq \varnothing$ і $S_1 \neq \varnothing$, то для $j \in S_l$ визначається $a_{lj} > 0$, допустиме по відношенню до функції $F_j(x_1)$ (де $a_{1j} = 0$ означає, що *j*-а цільова функція $f_j(x)$ не може приймати значення, відмінне від $F_j(x_1)$).

Крок 3. Розв'язуємо задачу:

$$max\, z$$

за умови

$$F_j(x) \in z, j \in \overline{S}_1;$$

$$F_i(x) \geq F_j\left(x_{0_j}\right) - a_j, j \in S_1; x \in X.$$

Повертаємо початковий розв'язок $x_1 + 1$. Якщо $x_1 + 1 = x_1$, то задача буде нерозв'язною; якщо $x_1 + 1 \neq x_1$, то вважаємо $l = l + 1$ і повертаємося до кроку 2.

При цьому алгоритм закінчує вою роботу.

Принцип наближення по всіх локальних критеріях до ідеального розв'язку

В основу даного підходу покладена ідея наближення по всіх критеріях.

Нехай дана задача багатокритеріальної оптимізації виду (1.1) і додаткові умови:

$$a_{i_1} x_1 + a_{i_2} x_2 + ... + a_{i_n} x_n = b_i, i \in N_r; \quad (1.10)$$

$$a_{r+j,1} x_1 + a_{r+j,2} x_2 + ... + a_{r+j,n} x_n = b_{r+j}, j \in N_{m-r}; \quad (1.11)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0. \quad (1.12)$$

Серед розв'язків системи (1.1), (1.10)–(1.12) необхідно відшукати таке значення вектора $x^* = \left(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*\right)$, при якому локальні критерії приймуть по можливості максимальне (мінімальне) значення одночасно.

Розглянемо кожну окрему функцію $f_i\left(x\right)$ і припустимо, що для кожного фіксованого $i, i \in N_m$ розв'язана задача максимізації. Відповідні оптимальні плани характеризуються векторами:

$$x_{0i} = \left(x_{01}, x_{02}.., x_{0n}\right), i \in N_m \tag{1.13}$$

На цих оптимальних планах визначимо значення критеріїв відповідно:

$$f_{0i}\left(x\right) = \left(f_i\left(x_{01}\right), f_i\left(x_{02}\right), ..., f_i\left(x_{on}\right)\right) \tag{1.14}$$

Природно, що вектори (1.13), що визначають вектори точки на множині допустимих значень *D*, будуть різними: деякі з них можуть співпадати.

Розглянемо вектор $f\left(x\right)$ з компонентами $f\left(x\right)|F_{0i}\left(x\right)$ з (1.13) і складемо співвідношення:

$$R\left(x\right) = \left\| f\left(x\right) - F_{0i}\left(x\right)\right\|^2 \tag{1.15}$$

вектора $f\left(x\right) - f_{0i}\left(x\right)$, визначеного для всіх $x \in D$.

Зазначимо, що $f_{0i}\left(x\right)$ буде одиничним вектором в просторі вектора $f\left(x\right)$. Назвемо його ідеальним значенням вектор-функції $f\left(x\right)$.

Поставлена задача тепер формулюватиметься так: задана система цільових функцій (1.1) при додаткових умовах задачі (1.10)–(1.12). Необхідно визначити точку $x \in D$, у якій функція $R\left(x\right)$ досягає мінімуму.

Таким чином, відшукання векторно-оптимального плану $x \in D$ у даній задачі зведено до оптимізації виразу (1.15) на розв'язках системи лінійних нерівностей (1.10)–(1.12). Оскільки вираз (1.15) є квадратичною функцією змінних $x_1, \ldots, x_n$, то задача відшукання векторно-оптимального плану звелася до задачі опуклого програмування: задана опукла функція $R\left(x\right)$, визначена на множині $x \in D$. Необхідно знайти точку $x \in \Omega$, яка забезпечує виконання умови $R\left(x^*\right) = min\, R\left(x\right)$, при $x \in D$.

Таким чином, алгоритм розв'язку задачі (1.1), (1.10)–(1.12) складається з двох основних етапів:

етап 1: Визначити для кодної функції значення: $max\, f_i\left(x\right), i \in N_m$;

етап 2: Визначити значення функції $min\, R\left(x\right)$, де $R\left(x\right)$ визначається за умовою (1.15).

Метод квазіоптимізації локальних критеріїв

У цьому випадку здійснюється пошук не єдиного точного оптимуму, а деякої області розв'язків, близьких до оптимального, або квазіоптимальної множини. При цьому рівень допустимого відхилення від точного оптимуму визначається з урахуванням точності постановки задачі (наприклад, залежно від точності обчислення величини критеріїв), а також деяких практичних міркувань (наприклад, вимог точності розв'язок задачі).

На початку проводиться якісний аналіз відносної важливості критеріїв: на підставі такого аналізу критерії розташовуються і нумеруються в порядку зменшення важливості, так що головним вважається критерій $f_1(x)$, менш важливий $f_2(x)$, потім слідує решта локальних критеріїв $f_3(x), f_4(x),\ldots, f_m(x)$. Критерії розгладаються на деякій області *X*. Максимізується перший по важливості критерій $f_1(x)$ і визначається його найбільше значення M_1. Потім призначається допустиме зниження (поступка) $d_1 \geq 0$ критерію $f_1(x)$. Визначається нова допустима область X_1, як підобласть *X* вигляду:

$$X_1 = X_n \{x \mid f_1(x) \geq M_1 - d_1\} \tag{1.16}$$

Такий підхід дозволяє значно звузити первинну допустиму область *X*, коли здійснюється перехід до наступного по важливості критерію.

Після цього знаходимо найбільше значення M_2 другого критерію $f_2(x)$ на множині X_1, тобто за умови, що значення першого критерію повинне бути не менше ніж $M_1 - d_1$. Знову призначається значення поступки $d_2 \geq 0$, але вже по другому критерію, яке разом з першим використовується при знаходженні умовного максимуму третього критерію, і т. д. Нарешті, максимізувався останній по важливості критерій $f_m(x)$ за умови, що значення кожного критерію $f_r(x)$ з $m-1$ попередніх повинно бути не менше відповідної величини $M_r - d_r$; одержувані стратегії вважаються оптимальними:

$$X_i = X_{i-1} n \{x \mid f_i(x) \geq M_i - d_i\}.$$

Таким чином, оптимальною вважається така стратегія, що є розв'язком останньої задачі з наступної послідовності задач:

1) знайти $M_1 = sup\, f_1(x), x \in X$;

2) знайти $M_2 = sup\ f_2(x), x \in X$;

...

m) знайти $M_m = sup\ f_m(x), x \in X$. (1.17)

Якщо критерій $f_m(x)$ на множині стратегій, що задовольняють обмеженням задачі m) з (1.17) не досягає свого найбільшого значення M_m, то розв'язком багатокритеріальної задачі вважають ту, що максимізувала послідовність $\{x_k\}$ з послідовності множин:

$$X_{m-1} \subset X_{m-2} \subset ... \subset X_1 \subset X.$$

Реалізації подібної максимізації послідовності має сенс тоді, коли верхня границя в задачі *m* є досяжною.

Алгоритм розв'язку задачі векторної оптимізації включає наступні кроки.

Крок 1. Нехай x_{01} – розв'язок задачі (1.17):

$$max\ f_1(x), x \in X.$$

Крок 2. Нехай x_{0k} – розв'язок задачі:

$$max\ f_k(x), x \in X_{k-1},\ \text{де}\ X_k\ \text{визначається з (1.17).}$$

Крок 3. Якщо $k < m$, то встановлюємо $k = k + 1$ і повертаємося до кроку 2.

Якщо $k = m$, то x_{0m} вважаємо оптимальним розв'язком.

Алгоритм закінчує свою роботу.

Значення поступок $d_i(i \in N_m)$ послідовно призначаються при вивченні взаємозв'язку приватних критеріїв.

На початку розв'язується питання про призначення допустимого зниження d_1 першого критерію від найбільшого значення M_1. Практично для цього задають декілька величин поступок d_{11}, d_{21}, d_{31}, ... і шляхом розв'язку задачі (1.17) визначають відповідні максимальні значення $M_2(d_{11})$, $M_2(d_{22})$, $M_2(d_{31})$... другого критерію. Далі розглядають пару критеріїв $f_2(x)$ і $f_3(x)$. Знову призначають пробні значення поступок d_{12}, d_{22} ... і, розв'язуючи задачу (1.17), відшукують найбільші значення $M_3(d_{12}), M_3(d_{22})$. Одержані дані аналізують, призначають d_2, переходять до наступної пари критеріїв $f_2(x)$ і $f_3(x)$ і т. д. Нарешті, в результаті аналізу взаємного впливу критеріїв $f_{m-1}(x)$ і $f_m(x)$ вибирають значення останньої поступки $d_m - 1$ і відшукують оптимальні стратегії, вирішуючи задачу m з (1.17) (звичайно обмежуються знаходженням однієї такої стратегії).

Таким чином, хоча формально при використанні методу послідовних поступок достатньо розв'язати лише ряд задач (1.17), проте для призначення значення поступок з метою з'ясування взаємозв'язку приватних критеріїв фактично доводиться розв'язувати істотно більше число таких задач.

Для розв'язку багатокритеріальної задачі потрібно так ранжирувати критерії, щоб потім зручніше було вибирати значення поступок.

Розглядаючи вище викладене, можна зробити наступний висновок: метод послідовних поступок доцільно застосовувати для розв'язку багатокритеріальних задач, в яких всі приватні критерії впорядковані за ступенем важливості, причому кожний критерій настільки істотно більш важливий, ніж наступний, що можна обмежитися обліком тільки попарного зв'язку критеріїв і вибирати допустиме зниження чергового критерію з урахуванням поведінки лише одного наступного критерію.

Особливо зручним є випадок, коли вже в результаті попереднього аналізу багатокритеріальної задачі з'ясовується, що можна допустити припущення поступок лише в межах «інженерної» точності (5–10 % від найбільшої величини критерію).

Метод згортання векторного критерію в суперкритерій

Одним з поширених методів розв'язку багатокритеріальних задач є метод зведення багатокритеріальної задачі до однокритеріальної шляхом згортання векторного критерію в суперкритерій. При цьому кожний критерій множиться на відповідний йому ваговий коефіцієнт.

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^{m} a_1 F_i(x), \; a_i \geq 0.$$

При цьому виникають труднощі з правильним вибором коефіцієнтів a_i.

Існують різні способи вибору коефіцієнтів a_i. Одним з них є призначення коефіцієнта залежно від відносної важливості критеріїв. Такий підбір вказаних коефіцієнтів можна виконувати згідно таблиці:

Таблиця 1.1

Шкала відносної важливості

Інтенсивність відносної важливості	Визначення
1	Рівна важливість порівнюваних вимог
3	Помірна (слабка) перевага одного над іншою
5	Сильна (істотна) перевага
7	Очевидна перевага
9	Абсолютна перевага
2, 4, 6, 8	Проміжний розв'язок між двома сусідніми оцінками

Метод приорітетів

В методі приорітетів m приватних цільових функцій ранжируются в порядку їх важливості, так як їх оцінює спеціаліст по прийняттю рішень.

Мінімізувати $f_1(x)=\rho_1$ (найвищий пріоритет)

…

Мінімізувати $f_i(x)=\rho_i$ (найнижчий пріоритет)

Змінні ρ – це компоненти змінних що відхиляються, точніше це s_i^+ або s_i^-, які визначають i-у цільову функцію.

В методі приорітетів по черзі розв'язуються задачі з однією цільовою функцією, починаючи з задачі з цільової функції, яка має найвищий приорітет, і закінчуючи задачею з цільовою функцією, яка має найнижчий приорітет. В процесі розв'язання послідовних задач розв'язок задачі з цільовою функцією, яка має більш низький приоритет, не може погіршити отримані раніше результати розв'язку задач з цільовою функцією, що має більш високий приорітет. Це означає, що якщо x_i оптимальне значення цільової функції $f_i(x)$, то для всіх $i\geq 1$ оптимізація будь-якої цільової функції $f_j(x)(j>1)$ з меншим приоритетом не зможе погіршити результат x_i.

В літературі по цільовому програмуванню описаний спеціальний «симплекс метод», який гарантує непогіршення розв'язку задач з цільовими функціями більш високого приорітету. Цей метод використовує правило виключення стовпчику, який використовується для видалення з оптимальної симплекс-таблиці задачі з цільовою функцією $f_k(x)$ небазисної змінної $x_j, cz_j-c_j\neq 0$ до початку розв'язку задачі з цільовою функцією $f_{k+1}(x)$. Це правило розпізнає, що небазисна змінна x_j, якщо вона отримає не нульове значення, може погіршити (але ніколи не покращить) оптимальне значення задачі з цільовою функції, яка має більший приоритет.

Нажаль, цей метод зміни симплекс-таблиць потребує більш складних розрахунків, ніж потрібно насправді. Розглянемо, як можна досягти результату більш простим способом:

Крок 0. Визначаємо приватні функції задачі і ранжируємо їх в порядку приорітетів: $f_1(x)=\rho_1 \succ f_2(x)=\rho_2 ... \succ f_m(x)=\rho_m, i=1$.

Крок 1. Розв'язуємо i-ту задачу ЛП з цільовою функцією $f_i(x)$. Позначимо через ρ_i^* отримане оптимальне значення відхиленої змінної ρ_i. Якщо $i=m$, розрахунки закінчуються, так як розв'язана остання m задача. В іншому випадку переходимо на наступний крок.

Крок 2. Вводимо в задачу нове обмеження $\rho_i=\rho_i^*$, тоді значення ρ_i не зможе змінитися при розв'язанні наступних задач. Вважаємо $i=i+1$ і повертаємося на крок 1.

Послідовне введення додаткових обмежень вигляду $\rho_i=\rho_i^*$ приводить точно до такого ж результату, як правило виключення стовпчиків. Крім того, зміст введення додаткових обмежень повністю зрозуміло.

Визначеним аргументом на користь правила виключення стовпчиків може служити те, що при використанні цього правила відбувається видалення змінної, і зменшується розмір задачі. В той же час описана процедура збільшує розмір задачі при збільшенні додаткових обмежень. Але якщо уважно придивитися до цих обмежень, то легко змінити розрахунки таким чином, щоб це обмеження враховувалося шляхом підстановки значення ρ_i^* замість ρ_i, що також зменшує кількість змінних в задачі. З цієї точки зору правило виключення стовпчиків не має переваг з вище описаною процедурою.

Метод розв'язування багатокритеріальних задач оптимізації з використанням інтегрального критерію

Суть даного методу полягає в тому що критерії $F_i(x), i \in N_m$ якимось чином об'єднались в один інтегральний критерій $F(X)=f(F_1(X),F_2(X),...,F_m(X))$, а потім знаходиться максимум або мінімум даного критерію.

Якщо об'єднання приватних критеріїв виконується, виходячи з об'днання взаємозв'язку приватних критеріїв і критерію узагальненого, то тоді оптимальний розв'язок буде коректним. Але таке об'єднання зробити дуже складно або неможливо, тому, що як правило, узагальнений критерій і є результат чисто формального об'єднання приватних критеріїв.

В залежності від того, яким чином приватні критерії об'єднуються в узагальнений критерій розділяють наступні види узагальнених критеріїв:

1. Аддитивний критерій.
2. Мультиплікативний критерій.
3. Мінімаксний (максимінний) критерій.

В адитивних критеріях цільову функцію отримаємо шляхом додавання нормованих значень приватних критеріїв. В загальному вигляді цільова функція має наступний вид:

$$F\left(X\right)=\sum_{i-1}^{m}C_i\,\frac{F_i\left(X\right)}{F_i^0\left(X\right)}=\sum_{i-1}^{m}C_i\,f_i\left(X\right)\rightarrow max\left(min\right), \qquad (1.18)$$

де *n* – кількість об'єднаних приватних критеріїв;

C_i – ваговий коефіцієнт *i*-го приватного критерію;

$F_i\left(X\right)$ – числове значення *i*-го приватного критерію;

$F_i^o\left(X\right)$ – *i*-й нормуючий дільник;

$f_i\left(X\right)$ – нормоване значення *i*-го приватного критерію.

Приватні критерії мають різну фізичну природу і тому різну розмірність. А значить просто додавати їх некоректно. В зв'язку з цим в формулі (1.18) числові значення приватних критеріїв діляться на деякі нормуючі дільники, які назначаються наступним чином:

1. В ролі нормуючих дільників приймаються директивні значення параметрів чи критеріїв, задані замовником. Вважається, що значення параметрів, закладені в технічному завданні, являються оптимальними і найкращими.
2. В ролі нормуючих дільників приймаються максимальні (мінімальні) значення критеріїв, досяжні в області допустимих значень.

Розмірності самих приватних критеріїв і відповідних нормуючих дільників однакові, тому в решті решт узагальнений адитивний критерій буде безрозмірною величиною.

Мультиплікативні критерії працюють по принципу компромісу, який бере за основу ідею рівномірності. Суть принципу максиміна полягає в наступному: при проектуванні складних систем, при наявності великого числа приватних критеріїв встановити між ними аналітичний зв'язок дуже важко. Тому намагаються знайти таке значення змінних (параметрів) $X=\left\{x_1,x_2,...,x_m\right\}$, при яких нормовані значення всіх приватних критеріїв рівні між собою:

$C_i f_i(X) = K$, де C_i – ваговий коефіцієнт *i*-го приватного критерію; $f_i(X)$ – нормоване значення *i*-го критерію, *K* – константа.

При великій кількості приватних критеріїв через складність взаємозв'язків добитися виконання вказаного вище відношення дуже складно.

Стратегія зважених сум

Дана стратегія зважених сум перетворює багатокритеріальну задачу мінімізації вектора $F(x)$ в деяку скалярну задачу шляхом побудови деяких зважених сум для всіх вибраних об'єктів:

$$\underset{z \in \Omega}{minimize}\, f(x) = \sum_{i=1}^{m} \omega_i F_i(x)^2.$$

Далі вже до даної задачі оптимізації може бути застосований стандартний алгоритм оптимізації без обмежень. В цьому випадку розглядаються зважені коефіцієнти для кожної із вибраних цілей. Зважені коефіцієнти необов'язково повинні відповідати напряму відносній значимості відповідної цілі або приймати до уваги взаємовплив між конкретно вибраними цілями. Більш того, границі розв'язків, що не покращуються можуть бути і не досягнуті, так що відповідні розв'язки є по суті недосяжними.

Все це допускає геометричну інтерпретацію методу зважених сум. Розглянемо випадок двох взятих цілей, як це представлено на рис. 1.1. Відобразимо лінію $\omega^T F(x) = c$ в просторі цільових функцій.

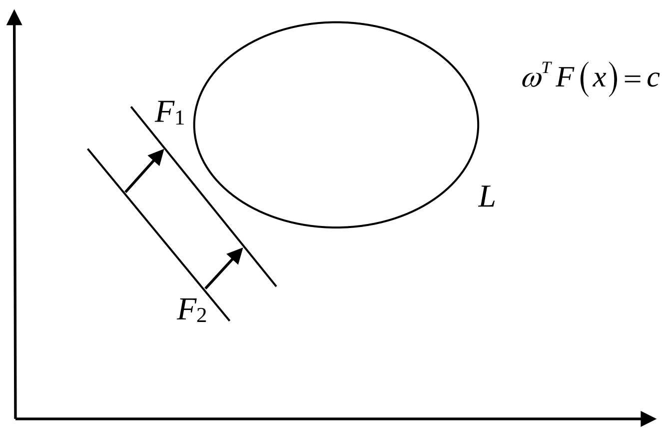


Рис. 1.1. Геометрична інтерпритація методу зважених сум

Зазначимо, що розглянуті прийоми розв'язування задач багатокритеріальної оптимізації зведенням їх до скалярної оптимізації не претендує на універсальність. Поза сумнівом тут є тільки те, що розв'язок повинен бути вибраний з переговорної множини. Питання про те, яка з цих точок повинна бути вибрана, як вже відмічалась вище, частіше всього не є математичним і в кожній конкретній ситуації звичайно вирішується по своєму. Остаточний розв'язок приймається шляхом розв'язання задач по різним приватним і узагальненим критеріям, на основі аналізу стійкості до змін критеріїв, початкових даних тощо.

Метод ідеальної точки. Цей метод не використовує допоміжну інформацію від особи, що приймає рішеня про перевагу на множині критеріїв. В цьому випадку робиться припущення про наявність, так званого, «оптимального» розв'язку задачі багатокритеріальної оптимізації, який може бути знайдено шляхом перетворення багатокритеріальної задачі у відповідну скаляризовану (однокритеріальну) задачу.

Ідеальною називається точка, що визначається наступним чином:

$$x^* = \left(x_1,...,x_m\right) \in R_s^m, x^* = max\, f_i\left(x\right), i \in N_m, y = f_i\left(x\right).$$

Правило вибору компромісу R у цьому методі полягає у знаходженні альтернативи, яка має оцінку, що є найближчою до ідеальної точки.

Визначається відстань $\rho_s\left(y,x\right) = \left(\sum_{i=1}^{m}\left|y_i - x_i\right|^s\right)^{\frac{1}{s}}$ між точками y і x у метричних просторах R_s^m з показником метрики $s \geq 1$. Тоді, згідно з цим методом, знайдеться компромісна оцінка як розв'язок, так званої, скаляризованої задачі $y^* \in arg\min_{y \in Y}\left(\sum_{i=1}^{m}\left|y_i - x_i\right|^s\right)^{1/s}$. Значення показника метрики s вибирається в залежності від предметної області. На практиці в основному використовують значення $s = 1,2,\infty$.

Нехай $s = 2$ (евклідів простір) у випадках, коли критерії мають зміст відстані для яких евклідова метрика є змістовною. В цьому випадку компромісна альтернатива x^* знаходиться як розв'язок скаляризованої задачі:

$$\min_{x \in X}\sum_{i \in 1}^{m}\left(f_i\left(x\right) - x_i\right)^2.$$

При $s = 1,\infty$ критерії можуть мати будь-який інший зміст (наприклад, вартість, надійність, тривалість і т. д.) і скаляризовані задачі приймуть відповідно вигляд:

$$\min_{x\in X}\sum_{i\in 1}^{m}\left|f_i(x)-x_i\right| = \max_{x\in X}\sum_{i\in 1}^{m} f_i(x) \tag{1.19}$$

$$\min_{x\in X}\max_{i\in N_m}\left|f_i(x)-x_i\right| = \max_{x\in X}\min_{i\in N_m}\left(f_i(x)-x_i\right). \tag{1.20}$$

Задача (1.19) розглядається, коли необхідно оцінити «відстань» до ідеальної точки як сумарну за всіма критеріями і така оцінка має певний зміст у предметній області, в якій розв'язується задача (наприклад, у двохкритеріальній задачі, де максимізуються прибуток фірми і заробітна платня її працівників, цільова функція задачі має зміст частини доходу фірми).

Задача (1.20) розглядається, коли особа, що приймає рішення, оцінює «відстань» до ідеальної точки як «найгіршу» по значенню показника.

Якщо критерії задачі мають різні одиниці вимірювання, масштаб, то як правило, для задач (1.19), (1.20) їх зводять до безрозмірної шкали $\left[0,1\right]$ і розв'язують відповідно задачі:

$$\max_{x\in X}\sum_{i\in 1}^{m}\overline{f}_i(x) = \max_{x\in X}\sum_{i\in 1}^{m}\frac{\left(f_i(x)-f_i^{min}\right)}{\left(a_i-f_i^{min}\right)} = \max_{x\in X}\sum_{i\in 1}^{m}\frac{f_i(x)}{\left(a_i-f_i^{min}\right)}$$

$$\max_{x\in X} \underset{i\in N_m}{mix}\left(\overline{f}_i(x)-1\right) = \max_{x\in X}\underset{i\in N_m}{mix}\left(\frac{f_i(x)-f_i^{min}}{a_i-f_i^{min}}-1\right) = \max_{x\in X}\underset{i\in N_m}{mix}\left(\frac{f_i(x)-a_i}{a_i-f_i^{min}}\right).$$

Слід врахувати, що для будь-якого $s\in\left[1,\infty\right) R(Y)\subseteq P(Y)$ і для $s=\infty R(Y)\subseteq S(Y)$, якщо множина *Y* строго опукла, то $\left|R(Y)\right|=1$.

Метод вибору за кількістю домінуючих критеріїв: не використовує допоміжну інформацію від особи, що приймає рішення про перевагу на множині критеріїв. Правило вибору *R* за цим методом враховує взаємні співвідношення між оцінками альтернатив й не враховує величини різниць оцінок. Метод призначений для розв'язку багатокритеріальних задач з дискретною множиною альтернатив, яка має невелику потужність (може бути перебрана за реальний час).

Нехай $q(x,x')$ – кількість критеріїв, за якими альтернатива x' строго переважає альтернативу *x*. Покладемо $Q(x)=\max\limits_{x\in X} q(x,x')$ й визначимо $Q(x)=\min\limits_{x\in X} Q(x)$. Тоді за правилом вибору *R,* яке розглядається, вибираються альтернативи, які відповідають величині *Q* (домінуючому показнику множини *X*).

Основні властивості методу полягають у наступному:

$R(X)=R(P(X))$, тобто вибір за цим методом з усієї множини розв’язків і вибір з множини ефективних розв’язків – співпадають;

$R(X)\subseteq P(X)$ – метод вибирає ефективні розв’язки.

Слід зауважити, якщо $q(x,x')$ – кількість критеріїв, за якими альтернатива x' сильно переважає альтернативу *x,* то цей метод вибирає слабко-ефективні альтернативи.

Метод послідовних поступок. Особливістю даного методу є те, що критерії багатокритеріальної задачі попередньо впорядковуються за зменшенням їх важливості, після чого вибір розв’язку задачі здійснюється шляхом виконання багатокрокової діалогової процедури.

Діалогова процедура послідовних поступок складається з одного попереднього і *m* основних кроків (нагадаємо, що *m* – це кількість критеріїв).

0 крок. Критерії впорядковуються за зменшенням їх важливості, тобто $f_1 \succ f_2 \succ \dots f_m$ за висновками особи, що приймає рішення.

***i*-й крок** $(i\in N_m)$.

Розв’язується однокритеріальна задача:

$$f_i(x)\to max, x\in X_i, (X_1\in X).$$

Позначимо через *x* її оптимальний розв’язок.

$\boldsymbol{i+1}$**-й крок** $(i\in N_m)$. Обчислюється оцінка $y^i=\left(f_1(x^i),\dots,f_m(x^i)\right)$. Особа, що приймає рішення, аналізує отриману оцінку й у випадку, коли вона його не задовольняє, визначає величину поступки Δf_i за *i*-м критерієм, на яку він може погодитися з метою покращання показників за іншими, менш важливими критеріями. Якщо крок не є останнім $(i<m)$, то визначається «уточнена» множина альтернатив $X_{i+1}=\left\{x\in X_i \mid f_i(x)\ge f_i(x^i)-\Delta f_i\right\}$ і здійснюється перехід на наступ-

ний крок. Інакше – альтернатива x вибирається як розв'язок багатокритеріальної задачі і процедура закінчується.

На ***m*-му кроці** особа, що приймає рішення або погоджується з отриманою альтернативою, або повторно виконується процедуру.

Слід зауважити, що метод не обмежує можливості особи, що приймає рішення у виборі ефективних альтернатив. Це обґрунтовується наступною теоремою.

Теорема 1.1. (О. Вентцель). Для будь-якого впорядкування критеріїв і будь-якої ефективної альтернативи x^* існує послідовність невід'ємних поступок $\Delta f_i, i \in N_m$ таких, що на останньому кроці процедури буде отримана множина ефективних альтернатив, всі елементи якої рівноцінні x^*.

Треба зауважити що, якщо на перших кроках особа, що приймає рішення задавала великі значення поступок, то ефективна альтернатива, яка отримується в кінці процедури, може мати більш високі показники за менш важливими критеріями.

І навпаки, якщо особа, що приймає рішення, намагається отримати високі показники за більш важливим критерієм, то можна отримати ефективну альтернативу з неприпустимо малими показниками за менш важливим критерієм. На основі вище зазначеного можна зробити висновок, що необхідно правильно впорядкувати критерії, тоді можна обмежитись аналізом попарного зв'язку критеріїв.

Серед недоліків методу слід відмітити слідуюче: 1)тільки на першому кроці методу величина поступки відповідає її фактичному значенню, оскільки вона визначена на всій множині альтернатив. На наступних кроках величина поступки може бути значно меншою за її фактичне значення, оскільки вона визначається на «уточненій» множині альтернатив; 2) в методі обчислювальна складність задач оптимізації зростає з кількістю зроблених кроків, оскільки на кожному кроці додається нове обмеження. Метод використовує два типи інформації від ОПР: інформацію про впорядкування критеріїв і про діапазони значень критеріїв.

Метод послідовного вводу обмежень. Характерною особливістю даного методу є послідовне введення обмежень на альтернативи, які мають незадовільні, з точки зору особа, що приймає рішення, значення критеріїв.

1-й крок $(k = 1,2,...)$. Обчислюються оптимальні значення кожного критерію окремо на «уточненій» множині альтернатив:

$$f_i^{*(k)} = \max_{x \in X_k} f_i(x), i \in N_m;\ X_1 \in X$$

і формується вектор «ідеальної» оцінки на уточненій множині альтернатив: $f^{*(k)} = \left(f^{*(k)},\ldots, f_m^{*(k)} \right)$.

2-й крок. Визначаються вагові коефіцієнти критеріїв $\alpha_1^{(k)},\ldots,\alpha_m^{(k)}$ наступним чином: складається матриця $\sigma_{ji}^{(k)} = \sigma_{ij}^{(k)}$, $i, j \in N_m$ переваг на множині критеріїв, кожна пара симетричних елементів якої $\sigma_{ij}^{(k)} = \left(\sigma_{ji}^{(k)}\right)$ характеризує відносну важливість i-го критерію у порівнянні з j-м.

3-й крок. Розраховуються вагові коефіцієнти критеріїв за наступною формулою:

$$a_i^{(k)} = \left(\sum_{s=1}^{m} \sigma_{is} \right) / \left(\sum_{r=1}^{m} \sum_{s=1}^{m} \sigma_{rs} \right), i \in N_m .$$

4-й крок. Розв’язується задача:

$$\max_{x \in G_k} \sum_{i=1}^{m} a_i^{(k)} f_i(x) ,$$

і визначається альтернатива x^k та її оцінка $y^k = \left(f_1\left(x^k\right),\ldots, f_m\left(x^k\right)\right)$.

5-й крок. Аналізується отримана альтернатива та оцінка y^k шляхом її порівняння з «ідеальною» оцінкою $f^{*(k)}$. Якщо оцінка y^k задовольняє особу, що приймає рішення, то процедура закінчується, а альтернатива x^k приймається як розв’язок вихідної задачі. Інакше, здійснюється перехід на наступний крок.

6-й крок. Вказується номер $s \in N_m$ критерію, значення якого найменше, на думку особи, що приймає рішення, її задовольняє і визначається, до якого рівня ξ_s потрібно покращити значення цього критерію та формується нова «уточнена» множина альтернатив $X_{k+1} = \left\{ x \in X_k \mid f_s(x) \geq \xi_s \right\}$, здійснюється перехід на першиий крок.

В цьому методі можуть використовуватися й інші способи визначення переваг $\alpha_1^{(k)},\ldots,\alpha_m^{(k)}$ на множині критеріїв. Наприклад, нехай x^{il} – альтернатива, яка максимізує l-й критерій на множині

X_i; де $f_i^{max(k)}, f_i^{min(k)}$ – відповідно найкраще та найгірше значення i-го критерію на цій множині. Далі, для $i \in N_m$, обчислюються величини :

чи $\delta_i^{(k)} = \max\limits_{l \in N_m} \dfrac{f_i^{max(k)} - f_i\left(x^{il}\right)}{f_i^{max(k)} - f_i^{min(k)}}$, чи $\delta_i^{(k)} = \dfrac{1}{m}\sum\limits_{l=1}^{m} \dfrac{f_i^{max(k)} - f_i\left(x^{il}\right)}{f_i^{max(k)} - f_i^{min(k)}}$, відповідно максимальне, чи середнє відносне відхилення від найкращого значення i-го критерію на альтернативах, що максимізують інші критерії. Вагові коефіцієнти критеріїв визначаються за формулою:

$$a_i^{(k)} = \delta_i^{(k)} \Big/ \left(\sum_{j=1}^{m} \delta_j^{(k)}\right), i \in N_m.$$

Метод використовує два типи інформації від особи, що приймає рішення: інформацію про відносну важливість критеріїв та інформацію про діапазони значень критеріїв.

Метод бажаної точки. Особливістю даного методу є необхідність задання особи, що приймає рішення, бажаних значень критеріїв для визначення переваги на множині критеріїв.

0 крок. Розраховуються «найкращі» і «найгірші» значення критеріїв:

$$f_i^* = \max_{x \in X} f_i\left(x\right), h_i^* = \min_{x \in X} f_i\left(x\right), i \in N_m,$$

здійснюється монотонне перетворення критеріїв до нормованого безрозмірного вигляду:

$$w_i\left(x\right) = \frac{f_i^* - f_i\left(x\right)}{f_i^* - h_i^*}, i \in N_m.$$

***k*-й крок** $\left(k = 1,2,...\right)$. Аналізується отриманий на попередньому кроці розв'язок та його оцінка у порівнянні з «найкращими» і «найгіршими» значеннями критеріїв і вказуються бажані значення критеріїв:

$$\xi_i^k \in \left[h_i^*, f_i^*\right], i \in N_m.$$

***k*+1-й крок.** Здійснюється перетворення бажаних значень цільових функцій до нормованого безрозмірного вигляду:

$$w_i^k = \frac{f_i^* - \xi_i^*}{f_i^* - h_i^*}, i \in N_m.$$

***k*+2-й крок.** Обчислюються вагові коефіцієнти критеріїв:

$$p_i^k = \left(\prod_{j=1, j\neq 1}^{m} w_j^k \right) / \left(\sum_{j=1}^{m} \prod_{l=1, j\neq 1}^{m} w_j^k \right), i \in N_m .$$

***k*+3-й крок.** Ефективна альтернатива $x^k \in X$ знаходиться як розв'язок однокритеріальної задачі: $\max_{x \in X} \min_{i \in N_m} p_i^k w_i(x)$.

***k*+4-й крок.** Обчислюється оцінка $y^k = \left(f_1\left(x^k\right), ..., f_m\left(x^k\right)\right)$. Якщо отримані значення цільових функцій задовольняють особу, що приймає рішення, то процедура закінчується, у протилежному випадку – переходимо на k+1-й крок.

Цей метод використовує тільки один тип інформації від особи, що приймає рішення про бажані значення критеріїв.

Метод задоволених вимог. Особливістю цієї діалогової процедури є визначення переваги на множині критеріїв шляхом виділення так званого «головного критерію».

***k*-й крок** $(k = 1, 2, ...)$. Виділяється «головний критерій» $f_i(x), i \in N_m$, який найбільше за всі інші повинен бути покращеним.

***k*+1-й крок.** Встановлюється мінімально допустимі рівні значень інших критеріїв $\xi_j^k, j \in N_m, j \neq i$.

***k*+2-й крок.** Розв'язується однокритеріальна задача:

$$\max_{x \in G_k} f_i\ (x), \text{ де } G_k = \left\{ x \in X \mid f_j(x) \geq \xi_j^k, j \in N_m, j \neq i \right\},$$

визначається ефективна альтернатива x^k.

***k*+3-й крок.** Розраховується ефективна оцінка альтернативи x^k: $y^k = \left(f_1\left(x^k\right), ..., f_m\left(x^k\right)\right)$ і аналізується отримане значення головного критерію. Якщо воно не задовольняє його, то здійснюється перехід на k-й крок, залишаючи номер головного критерію незмінним. Якщо значення головного критерію задовольняє особу, що приймає рішення, то вона розмірковує – можливо чи ні деяке погіршення значення головного критерію з метою покращення значень інших. Якщо – «ні», то процедура закінчується. У протилежному випадку – переходить на k-й крок із метою призначити інший головний критерій.

Метод використовує два типи інформації від особи, що приймає рішення: інформацію про домінування одного критерію над іншими та інформацію про діапазони значень критеріїв.

Метод векторної релаксації. Цей метод призначений для пошуку ефективних альтернатив в задачах багатокритеріальної безумовної оптимізації наступного вигляду: $\max\limits_{x \in R^n} f_i\ (x), i \in N_m$. Припускається, що критерії задачі є неперервно-диференційованими угнутими функціями.

k-й крок $(k = 1,2,...)$. Являє собою крок градієнтного методу для лінійної згортки критеріїв з ваговими коефіцієнтами $a_1^k,...,a_m^k, \sum\limits_{i=1}^{m} a_i^k > 0, i \in N_m$, які визначаються особою, що приймає рішення, за допомогою будь-якої процедури експертного оцінювання важливості критеріїв.

Тобто $x^k = x^{k-1} + \gamma^k \sum\limits_{i=1}^{m} a_i^k \nabla f_i\left(x^{k-1}\right)$, початкове наближення x^0 є будь-якою точкою простору $R^n; \gamma^k, \gamma^k > 0$ – величина кроку, яка знаходиться з умови збільшення лінійної згортки критеріїв $\gamma^k = \arg\max\limits_{\gamma \in R^1} \sum\limits_{i=1}^{m} a_i^k f_i\ \left(x^{k-1} + \gamma \sum\limits_{i=1}^{m} a_i^k \nabla f_i\left(x^{k-1}\right)\right)$.

Якщо оцінка $y^k = \left(f_1\left(x^k\right),...,f_m\left(x^k\right)\right)$ знайденої альтернативи задовольняє особу, що приймає рішення, то процедура закінчується. У протилежному випадку переходимо на наступний крок.

Слід зауважити, що альтернативи, які генеруються цією процедурою, тільки в граничному випадку будуть ефективними. Тому особа, що приймає рішення, коли аналізує отриману альтернативу, звертає увагу не тільки на те, щоб вона відповідала його перевагам на множині критеріїв, але і наскільки вона є оптимальною за Парето. Оптимальність альтернативи оцінюється величиною:

$$\left\| \sum_{i=1}^{m} a_i^k \nabla f_i\left(x^k\right) \right\|.$$

Метод вагових коефіцієнтів

Припустимо, що модель цільового програмування має n цілей, кожна з яких має наступний вигляд:

Мінімізувати функції $f_i(x), i \in N_m$.

В методі вагових коефіцієнтів узагальнена цільова функція визначається наступним образом.

Мінімізувати $z = w_1 f_1(x) + w_2 f_2(x) + ... + w_m f_m(x)$.

Тут $w_i, i \in N_m$ – додатні вагові коефіцієнти, які показують переваги, що відповідають кожній цілі. Наприклад, випадок $w_i = 1$ для всіх i показує рівнозначність всіх цілей. Надання значень ваговим коефіцієнтам дуже суб'єктивно. На даний час розроблені різні методи, які зменшують суб'єктивний фактор при визначенні вагових коефіцієнтів.

Слід зазначити, що деякі методи по своїй суті схожі, але відмінні в виборі альтернатив або прийомах розв'язання. Також, в різних літературних джерелах мають різні назви.

1.3. Прикладні задачі, що моделюються задачами багатокритеріальної оптимізації

Наведемо приклади прикладних задач, які моделюються моделями задач багатокритеріальної оптимізації. Окремі з них розглянуті в [148].

Задача 1 (про роботу супермаркету). Керівництво супермаркету планує провести спеціальні заходи для залучення потенційних покупців. Два основних (найбільше популярних) заходи, – естрадний концерт і виставка мистецтв і ремесел, – відвідують практично всі шари населення, що менеджери супермаркету умовно розбивають по трьох вікових групах: тінейджери (підліткова група), група середнього віку (сюди ввійшла і молодь, що вийшла з підліткового віку) і старша вікова група. Вартість одного концерту й однієї виставки складає 1 500 грн і 3 000 грн відповідно. Загальний річний бюджет цих заходів не повинний перевищувати 15 000 грн. Менеджери супермаркету оцінюють відвідуваність своїх заходів таким чином:

Кількість відвідувачів			
Захід	Підлітки	Середня група	Старша група
Концерт	200	100	0
Виставка мистецтв	0	400	250

Керівництво супермаркету бажає, щоб один із заходів відвідало не менш 1 000 підлітків, 1 200 людей із середньої вікової групи і не менш 800 потенційних покупців старшого віку. А також, щоб після проведення даних заходів кількість потенційних покупців збільшилося, а отже і підвищилась рентабельність супермаркету.

Задача 2 (про роботу університету). Університет проводить прийом студентів. Усіх абітурієнтів можна розбити на три категорії: жителі даного регіону, приїжджі з інших регіонів і приїжджі з інших країн. Співвідношення між чоловіками і жінками серед абітурієнтів даного регіону й інших регіонів рівні відповідно 1 : 1 і 3 : 2. Для «міжнародних» студентів це співвідношення складає 8 : 1. При зарахуванні студентів на перший курс одним з основних факторів, що впливають на зарахування, є середній бал тесту. Статистика, накопичена університетом, говорить про те, що середній бал тесту дорівнює 27, 26 і 23 відповідно для даного регіону, інших регіонів і інших країн. Приймальна комісія університету при прийомі першокурсників бажає домогтися наступних результатів:

а) на перший курс бажано прийняти не менш 1 200 студентів;

б) середній бал тестів усіх першокурсників повинний бути не нижче 25;

в) студенти з інших країн повинні складати не менш 10 % від усієї кількості першокурсників;

г) відношення кількості жінок і чоловіків бажано не менш 1 : 1;

є) серед усіх прийнятих на перший курс жителі інших штатів повинні складати не менш 20 %.

Задача 3 (склад кормової суміші). Птахофабрика щодня споживає 3 тонни спеціальних кормів. Кормова суміш складається з вапняку, зерна і соєвого борошна і повинна задовольняти потребам раціонального харчування:

кальцій – не менш 0,8 % і не більш 1,2 %,

білок – не менш 22 %,

клітковина – не більш 5 %.

	Кальцій	Білок	Клітковина
Інгредієнт	У кілограмах на кілограм інгредієнту		
Вапняк	0,380	0,00	0,00
Зерно	0,001	0,09	0,02
Соєве борошно	0,002	0,50	0,08

Необхідно визначити такий склад суміші, щоб вона містила максимальну кількість вітамінів, а також, щоб вартість була мінімальною.

Задача 4 (про виготовлення виробів). Завод продає чотири типи виробів, для виробництва яких використовуються токарний і свердлильний верстати. Кожний з цих верстатів може працювати 10 годин у робочий день. Нижче показано, скільки хвилин робочого часу необхідно для виготовлення виробу кожного типу.

Виріб	Токарський верстат	Свердлильний верстат
1	5	3
2	6	2
3	4	6
4	7	4

Завод намагається збалансувати час використання верстатів таким чином, щоб різниця між повними часами роботи верстатів не перевищувала 30 хвилин. Попит на вироби кожного типу складає не менш 10 одиниць. Крім того, кількість виробів першого типу не може перевищувати кількість виробів другого типу. Необхідно визначити такий план виробництва виробів, щоб забезпечити мінімальну собівартість виробів та мінімальні простої верстатів.

Задача 5 (план міської лікарні). Міська лікарня планує організувати для хворих короткочасний (до 4 днів) стаціонар на вільних місцях. Передбачається, що протягом 4-денного періоду буде 30, 25 і 20 хворих, яким буде потрібно 1-, 2- і 3-денний стаціонар. Також розраховано, що на той же період буде вільно 20, 20, 24 і 30 місць відповідно. Необхідно визначити кількість місць для забезпечення максимальної і мінімальної кількості хворих, яких можна прийняти на короткочасне лікування.

Задача 6 (місце розташування будинку). Сім'я Коваленко збирається переїжджати в нове місто, де обоє чоловік і дружина, знайшли нову роботу. Зараз вони намагаються визначити ідеальне місце розташування свого нового будинку, склавши список своїх побажань:

а) новий будинок повинен бути як найближче до місця роботи чоловіка Коваленко;

б) будинок повинний бути як найдальше від гучного аеропорту;

в) бажано, щоб недалеко від будинку був супермаркет.

Для розв'язання своєї задачі чоловік і жінка нанесли на карту міста координатну сітку і позначили місце роботи, аеропорт і супермаркет. Одержали наступні їхній координати: місце роботи – (1, 1), аеропорт – (20, 15), супермаркет – (4, 7) (усі відстані приведені в кілометрах). Визначити розташування будинку, яке б задовольняло всі вище зазначені вимоги.

Наведемо приклад ще однієї задачі і приведемо її математичну модель.

Задача 7 (про роботу рекламного агентства). Нове рекламне агентство, у складі якого 10 рекламних агентів, одержало контракт на рекламу нового продукту. Агентство може провести рекламну акцію на радіо і телебаченні. У наступній таблиці приведені дані про кількість людей, що охоплені тим або іншим видом реклами, вартість цієї реклами і кількість необхідних рекламних агентів. Усі ці дані віднесені до однієї хвилини рекламного часу.

	Радіо	Телебачення
Рекламна аудиторія (млн чол.)	4	8
Вартість (тис. грн)	8	24
Кількість рекламних агентів	1	2

Реклама на радіо і телебаченні повинна охопити не менш 45 мільйонів людей, але контракт забороняє використовувати більше 6 хвилин реклами на радіо.

Рекламне агентство може виділити на цей проект суму, що не перевищує 100 000 грн. Скільки хвилин рекламного часу агентство повинне купити на радіо і скільки на телебаченні? Визначити максимальну рентабельність при мінімальних затратах на рекламу.

Розв'язання. Побудова математичної моделі: позначимо через x_1 і x_2 кількість хвилин рекламного часу, закупленого відповідно на радіо і телебаченні. Тоді для задачі можна задати наступні цільові функції:

Мінімізувати $f_1(x) = min\sum_{i=1}^{k} c_i x_i$ (для виконання умови по рекламній аудиторії)

Мінімізувати $f_2(x) = min\sum_{i=1}^{k} c_i x_i$ (для виконання фінансової угоди)

при обмеженнях:

$4x_1 + 8x_2 + \geq 45$ (умова по рекламній аудиторії)

$8x_1 + 24x_2 + \leq 100$ (фінансова умова)

$x_1 + 2x_2 \leq 10$ (обмеження по рекламних агентах)

$x_1 \leq 6$ (обмеження на рекламу на радіо)

$x_1, x_2 \geq 0$.

Оптимальний розв'язок цієї задачі, є наступним: $z = f_1(x) + f_2(x) = 10$, $x_1 = 5$ хвилин, $x_2 = 2,5$ хвилин.

Той факт, що оптимальне значення цільової функції не дорівнює нулеві, показує, що, принаймні, одна з вихідних цільових функцій не досягла свого оптимального значення. Оскільки $s_1^+ = 5$, виходить, обсяг рекламної аудиторії менше запланованого на 5 мільйонів. При цьому умова по бюджету виконана, оскільки $s_2^- = 0$.

Слід зазначити, що всі вище сформульовані задачі (1)–(6) також можуть бути формально записані в вигляді моделі багатокритеріальної оптимізації.

Задача 8. Розглянемо модель транспортної багатокритеріальної задачі.

Є пункти виробництва, проміжні пункти й пункти споживання однорідного продукту. Задані максимально можливі обсяги виробництва продукту кожним пунктом виробництва, об’єми споживання продукції кожним пунктом споживання, обмеження на об’єми перевезення продукту від кожного пункту виробництва до кожного проміжного пункту, обмеження на об’єми перевезення продукту від кожного проміжного пункту до кожного пункту споживання. Необхідно знайти план перевезень, що забезпечує ефективне функціонування системи й задовольняє обмеженням пунктів на можливі вироблені, споживані й передані об’єми однорідного продукту.

Нехай I – множина пунктів виробництва, J – множина проміжних пунктів, K – множина пунктів споживання. Позначимо через A_l – максимальний обсяг виробництва продукту пунктом i; B_k – об’єм продукту, який необхідно доставити k-ому пункту споживання; D_{jk} – максимальна кількість продукту, що може бути доставлене з j-ого проміжного пункту k-ому споживачеві; E_{ij} – максимальний об’єм продукту, що може бути доставлений з i-ого пункту виробництва в j-ий проміжний пункт. Тоді розглянута задача полягає в визначенні таких величин x_{ijk} – кількість продукту, що буде перевезено з пункту виробляється і транспортується через j-ий проміжний пункт k-му споживачеві, для якого виконуються обмеження на такі показники:

$\sum_{j\in J}\sum_{k\in K} x_{ijk} \le A_i,\ i\in I$ – обсяг виробництва

$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} x_{ijk} \ge B_k,\ k\in K$ – об’єм продукту

$\sum_{i\in I} x_{ijk} \ge D_{jk},\ j\in J,\ k\in K$ – максимальна кількість продукту, що може бути доставлена

$\sum_{k\in K} x_{ijk} \ge E_{ij},\ i\in I,\ j\in J$ – максимальний об’єм продукту

$x_{ijk} \ge 0,\ i\in I,\ j\in J,\ k\in K,$

і приймають екстремальні значення критерії, що визначають: $f_i(x) = \left(\sum_{j\in J}\sum_{k\in K}\left\langle x_{ijk}, A_i\right\rangle\right), i\in I$ – ефективність функціонування пунктів виробництва; $f_2 = \left(\sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\left\langle x_{ijk}, B_k\right\rangle\right), k\in K$ – ефективність функціонування пунктів споживання.

РОЗДІЛ 2. ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ ПРО ЕВКЛІДОВІ КОМБІНАТОРНІ МНОЖИНИ ТА ПОВ'ЯЗАНІ З НИМИ ОПТИМІЗАЦІЙНІ ЗАДАЧІ

Результати досліджень властивостей комбінаторних множин, занурених в арифметичний евклідів простір, дають можливість застосувати класичні підходи математичного програмування до розв'язування комбінаторних оптимізаційних задач, а також пропонувати та розвивати оригінальні методи розв'язування багатокритеріальних задач. Використовуючи властивості комбінаторних множин та їх опуклих оболонок, є доцільним удосконалювати апарат математичного програмування залученням некласичних комбінаторних множин, що дає можливість розглядати більш адекватні реаліям математичні моделі.

2.1. Огляд задач комбінаторної оптимізації та методів їх розв'язання

В багатьох наукових працях розглянуто оптимізацію приоритетопороджуючих функцій на комбінаторній множині частково упорядкованих елементів, а також функцій, які рекурентно задані на такій множині. Практично всі задачі теорії розкладів, планування та ін. зводяться до задач оптимізації на множині перестановок, розміщень та ін.

В монографії поєднується проблема багатокритеріальності та комбінаторних властивостей розв'язків.

Багатокритеріальна задача це задача про оптимізацію двох і більше критеріїв, яка має реальний економічний зміст і відіграє важливу роль в економіці, плануванні виробництва та ін. Одним з важливих застосувань такої задачі може бути задача про досягнення мінімуму собівартості деякої продукції та рентабельності виробництва. Іншими прикладами можуть бути задачі про максимум рентабельності і взагалі про оптимізацію деяких відносних показників якості (трудомісткості, продуктивності і т. п.). Такі моделі відображають тенденцію постійного зниження рівня собівартості в розрахунку на одиницю продукції та підвищення якісних показників виробництва при збільшенні масштабів виробництва. Як уже було зазначено, задачі багатокритеріальної оптимізації були розглянуті в багатьох роботах, але без врахування комбінаторних властивостей області допустимих значень, що не зовсім адекватно описують моделі прикладних задач.

Можна навести ряд прикладів, де множини – області допустимих розв'язків таких задач – мають переставні, сполучні та ін. властивості області допустимих значень, тобто ці задачі потрібно розглядати як задачі комбінаторної оптимізації з багатьма критеріями.

Отже є доцільним дослідження та побудова методів розв'язування задач з декількома цільовими функціями на комбінаторних множинах.

Як відомо, опуклими оболонками комбінаторних множин є многогранники [136, 141].

Дослідженням властивостей комбінаторних многогранників почали займатися досить давно. Комбінаторна теорія многогранників вивчає екстремальні властивості многогранників, розглядаючи множину його граней всіх вимірностей як деякий комплекс [12, 27]. Початок систематичного вивчення многогранників як множин розв'язку скінченної системи лінійних нерівностей можна віднести до кінця 19-го століття, хоча окремі властивості систем лінійних нерівностей можна знайти в більш ранніх роботах Ж.Б. Фурье, М.В. Остроградського, І. Фаркаша. Однак загальна задача вивчення геометричних властивостей многогранника як розв'язку скінченної системи лінійних нерівностей виникла, очевидно, тільки після робіт Г.Ф. Вороного [12, 27, 50]. Зокрема, Г. Ф. Вороним був одержаний критерій, за допомогою якого можна було визначити сумісність системи строгих нерівностей і вимірність многогранника її розв'язку. В подальшому вивчення систем лінійних нерівностей зацікавило багатьох математиків, зокрема Г. Мінковського, Г. Вейля [8, 17] та інших. Велике значення має вивчення комбінаторних властивостей многогранників в тісному зв'язку з задачами оптимізації, які важливі для практичних застосувань. Роль комбінаторних характеристик допустимих областей для побудови ефективних методів розв'язання задач евклідової комбінаторної оптимізації є досить суттєвою, оскільки їх використання дає можливість підвищити ефективність роботи існуючих методів та побудувати нові.

Основною ідеєю комбінаторних методів є перехід від повного перебору скінченої множини розв'язків до скороченого, направленого. Ці методи мають ряд позитивних якостей: гнучкість, універсальність, можливість застосування до різних задач комбінаторної оптимізації в будь-якій постановці. Найбільшого поширення набули методи комбінаторної оптимізації, що використовують методи гілок та меж [88], метод послідовного аналізу варіантів, методи побудови послідовності розв'язків, методи локальної оптимізації, метод динамічного програмування, апроксимаційно-комбінаторний метод [143] та ін. Евристичні алгоритми, що застосовуються при розв'язанні задач комбінаторної оптимізації, хоча досить швидко дають розв'язок, однак не гарантують його оптимальність.

Комбінаторні методи в останній час розвиваються досить ефективно [33–44, 49–62, 88, 119, 121, 134–144]. Очевидно, що швидкого поширення одержують алгоритми, які краще і простіше враховують природу класів задач, що розв'язуються.

Серед точних методів розв'язування задач дискретної оптимізації також широкого розвитку і розповсюдження одержав метод відсікання, ідея якого вперше була запропонована Данцигом, а потім була розвинута в багатьох роботах, зокрема в роботах Гоморі.

Ефективність методу відсікання знаходиться в прямій залежності від ефективності способу побудови відсікань. Реалізація різних підходів до побудови відсікань породила велику кількість методів цієї групи.

Розглянемо властивості комбінаторних множин та їх використання при побудові методів розв'язання задач.

2.2. Властивості комбінаторних множин

Як відомо, під комбінаторним об'єктом розуміють підмножину заданої дискретної множини, що задовольняє деяким властивостям. Як приклад, комбінаторним об'єктом є множина перстановок, на якій задається область значень задачі. Зокрема, перестановкою із n-елементів називається така впорядкована множина з n-елементів, які різняться між собою порядком їх розміщення. Слід зазначити, що використання комп'ютерів дозволяє генерувати перестановки досить швидко, хоча навіть найшвидша машина не зможе одержати всі перестановки n-елементної множини, якщо $n > 13$ за короткий час (з іншого боку, перестановки 8-елементної множини можна отримати за секунду). Це простий наслідок того факту, що $n!$ росте дуже швидко із зростанням n. Але розроблено ряд спеціальних методів, які дозволяють генерувати перестановки великої вимірності.

Розглянемо для подальшого використання та розв'язування задач три різні методи генерації послідовності всіх $n!$ перестановок n-елементної множин, що описано в [95]. Припустимо, що елементи множини перестановок запам'ятовуються у вигляді елементів масиву $P = \{P[1],...,P[n]\}$. У всіх трьох методах елементарною операцією, яка застосовується до масиву P є поелементна транспозиція, тобто обмін значеннями змінних $P[i]$ і $P[j]$ де $1 \le i, j \le n$. Ця операція згідно методів математичного програмування позначається через $P[i] :=: P[j]$. Очевидно, що вона еквівалентна послідовності команд

$$d := P[i]; P[i] := P[j]; P[j] := d,$$

де є деяка допоміжна змінна.

Перший з методів легко зрозуміти, якщо елементами, які переставляються, узяти числа $1,2,...,n$. На множині всіх послідовностей довжини n з елементами з множини $X = \{1,...,n\}$ визначається лексикографічний порядок:

$$\langle x_1, x_2, ..., x_n \rangle < \langle y_1, y_2, ..., y_n \rangle \Leftrightarrow \exists k \geq 1 \big(x_k \leq y_k \wedge (x_i = y_i) \forall i < k \big).$$

Зазначимо, що якщо замість чисел $1,2,...,n$ узяти букви $a,b,...,z$, то лексикографічний порядок визначає стандартну послідовність, в якій слова довжини n з'являються в словнику. Подібним же чином визначається антилексикографічний порядок $<'$, з тією різницею, що як черговість позицій в послідовності, так і впорядкування елементів множини X зворотні по відношенню до початкових:

$$\langle x_1, x_2, ..., x_n \rangle <' \langle y_1, y_2, ..., y_n \rangle \Leftrightarrow \exists k \geq 1 \big(x_k > y_k \wedge (x_i = y_i) \forall i < k \big).$$

Як приклад розглянемо перестановки множини $X = \{1,2,3\}$ в лексикографічному (а) і антилексикографічному (б) порядку:

(a)	(b)
1 2 3	1 2 3
1 3 2	2 1 3
2 1 3	1 3 2
2 3 1	3 1 2
3 1 2	2 3 1
3 2 1	3 2 1

Рис. 2.1. Перестановка множини

Алгоритм генерації перестановок в антилексикографічному порядку сформулювати набагато зручніше. Відмітимо, що послідовність перестановок множини $\{1,...,n\}$ в цьому випадку має наступні властивості:

1) в першій перестановці елементи йдуть в тій послідовності, що росте, а в останній – в убуваючій; іншими словами, остання перестановка є протилежна першій;

2) у останній позиції, визначають послідовність перестановок множини $\{1,...,n\} \setminus \{p\}$ в антилексикографічному порядку.

Ці властивості визначають рекурсивний алгоритм:

Алгоритм 2.1 [95]. (Генерація всіх послідовностей в антилексикографічному порядку.) Дано: *n*.

Результат. Послідовність перестановок множини $\{1,...,n\}$ в антилексикографічному порядку.

```
 procedure REVERSE(m);
(перетворення послідовності  P[1],..., P[m], масив P – глобальний*)
 begin i :=1; j :=m;
          while i < j do
                    begin P[i] :----: P[j]; i :---- i + 1; j :---- j - 1
                     end
 end; (*REVERSE*)
procedure ANTYLEX(m); (*масив P- глобальний*)
begin
        if m =1  then (*PI1l,..., P[n] містить нову перестановку *)
          write(P[1],..., P[n])
       else
             for i := 1 to m do
                   begin ANTYLEX(m – 1);
                               if i < m then
                                  begin P[i] :=: P[m]; REVERSE(m – 1)
                                 end
                 end
end; (*ANTYLEX*)
```

Щоб зрозуміти, як працює цей алгоритм, відзначимо перш за все, що виконання процедури $REVERSE\,(m)$ приводить до обігу чергування в послідовності елементів $P[1],...,P[m]$. Щоб довести правильність алгоритму, достатньо показати індукцією по *m*, якщо $P[1] < ... < P[m]$, то виклик $ANTYLEX\,(m)$ приводить до генерації всіх перестановок множини $\{P[1],...,P[m]\}$ в антилексикографічному порядку (при незмінних значеннях $P[m+1],...,P[n]$). Припустимо, що $p[i] = a_i, 1 \le i \le m$,

$a_i < \ldots < a_m$, і розглянемо цикл *for* $i := 1$ *to* m *do,* де після виконання першої ітерації цього циклу буде наступний результат:

$P[1]$	$P[2]$...	$P[m-2]$	$P[m-1]$	$P[m]$
a_1	a_2	a_{m-2}	a_{m-1}	a_m
a_{m-1}	a_{m-2}	a_2	a_1	a_m
a_m	a_{m-2}	a_2	a_1	a_{m-1}
a_1	a_2	a_{m-2}	a_m	a_{m-1}

(після виконання *ANTYLEX* $(m-1)$)

(після транспозиції $P[1] :=: P[m]$)

(після виконання *REVERSE* $(m-1)$)

(Скористаємося індуктивним припущенням про те, що *ANTYLEX* $(m-1)$ коректно генерує всі перестановки елементів $a_1,...,a_{m-1}$ в антилексикографічному порядку) Аналогічним способом, індукцією по *i*, доводимо, що *i*-а ітерація циклу *for* $i := 1$ *to* m *do* приводить до генерації всіх перестановок елементів $a_1,...,a_{m-i},a_{m-i+2},...,a_m$ при $P[m] = a_{m-i+1}$.

Згідно властивості 2 алгоритму означає, що генеруються всі перестановки елементів $a_i,...,a_m$ в антилексикографічному порядку.

Слід зазначити, що умова $P[i] = i, 1 \le t \le n$, на початку роботи програми була істотна тільки для полегшення розуміння роботи алгоритму. Сам алгоритм сформульований в термінах позицій, значення яких піддаються змінам, і в ньому жодним чином не використовується зміст змінних $P[1],...,P[n]$. Розглянемо тепер, скільки транспозицій виконує алгоритм 1 при генерації кожної наступної перестановки. Слід зазначити, що це число є величина змінна: кожна друга перестановка вийшла за рахунок однієї транспозиції $P[i] :=: P[j]$, але разом з ними є і такі, які вимагають $\lfloor (n-1)/2 \rfloor + 1 = \lfloor (n+1)/2 \rfloor$ транспозицій. Хоча середнє число транспозицій, що припадає на кожну перестановку, невелике, проте в деяких випадкових кращим був би алгоритм, в якому кожна наступна перестановка утворюється з попередньої за допомогою виконання однієї транспозиції. Це досить суттєво, коли з кожною перестановкою пов'язані деякі обчислення і коли існує можливість використання часткових результатів, одержаних для попередньої перестановки, якщо послідовні перестановки мало відрізняються один від одної.

Покажемо, що такий алгоритм можливий. Його основну схему можна описати за допомогою наступної рекурсивної процедури:

```
procedure B(m, i);
begin
        if (m mod 2=0) and (m > 2) then
          if i < m – 1 then B := i
         else B := m – 2
        else B := m – 1
end; (*B*)
procedure PERM(m); (* масив P – глобальний*)
begin
        if m=1 then (*P[1],..., P[m] – нова перестановка*)
write (P[1],..., P[n])
        else
             for i := 1 to m do
                 begin PERM(m – 1);
                        if i < m then P[B(m, i)] :=: P[m]
                 end
end; (*PERM*)
begin (* главная программа*)
        for i := 1 to n do P[i] := i;
        PERM(n)
end
```

Задачею цієї процедури є генерація всіх перестановок елементів $P[1],...,P[n]$ через послідовну генерацію всіх перестановок елементів $P[1],...,P[n-1]$ і заміну елементу $P[n]$ на один з елементів $P[1],...,P[n-1]$, що визначається з масиву $B[m,i], 1 \le i < m \le n$. Очевидно, що для того, щоб ця схема працювала правильно, необхідно визначити масив B так, щоб гарантувати, що кожна транспозиція рівна $p\left[B[m,i]\right] :=: P[m]$ в рядку вводила б новий елемент в $P[n]$.

Алгоритм 2.2. (Генерація всіх перестанонок за мінімальне число транспозицій.) Дані: n.

Результат. Послідовність перестановок множини $\{1,...,n\}$, в якому кожна подальша перестановка утворюється з попередньої шляхом виконання однієї транспозиції.

Зазначимо, що для непарного m транспозиція зводиться до $P[m-1]:=:P[m]$, для кожного $i<m$ для парного m значення $P[m]$ міняється послідовно на значення:

$$P[1],P[2],...,P[m-3],P[m-2],P[m-1].$$

Для кожного елементу $m\geq 1$ визначимо перестановку φ_m таким чином: $\varphi_m(i)$ – індекс, такий, що містить початкове значення змінної $P[i]$ після виконання процедури $PERM(m)$.

```
procedure PERM(m); (*масив P- глобальний*)
begin
        if m = 1 then (*P[1],..., P[n] містить новую перестановку*)
         write(P[1],..., P[n])
        else
           for i := 1 to m do
                begin PERM(m – 1);
                        if i < m then P[B[m, i]] :=: P[m]
                end
end
```

Наприклад, якщо спочатку змінні $P[1],...,P[4]$ містять послідовність 1 2 3 4, то легко переконатися, що після виконання $PERM(4)$ ця послідовність зміниться на 4 1 2 3. Це означає, що φ_4 є циклом 1 2 3 4.

Покажемо тепер, що алгоритм 2 коректний; точніше, доведемо, що для кожного $m\geq 1$ виконується наступна умова: Умова W_m. Виконання $PERM(4)$ викликає генерацію всіх перестановок елементів $P[1],...,P[m]$, причому φ_m є транспозиція $[m\ m-1]$, якщо m непарне

$(m>1)$, або цикл $[1,2,\ldots,m]$, якщо m парне. Доведення здійснюється індукцією по m так, як це звичайно робиться при доведенні коректності рекурсивних алгоритмів. Легко переконатися безпосередньо, що умови W_1 і W_2 виконуються. Припустимо, що $m \geq 3$. Доведемо виконання умови W_m, припускаючи істинність W_{m-1}. Доведення розіб'ємо на дві частини залежно від того, парне m чи ні. *Випадок 1, m непарне.* Через індуктивне припущення виконання перестановок команда $PERM(m-1)$ приводить кожного разу до зрушення значень $P[1],...,P[m-1]$ уздовж циклу $[1\,2...m-1]$. Таким чином, транспозиція в рядку вибирає кожного разу різні елементи в $P[m]$. Якщо спочатку, то в $P[m]$ поміщаються по черзі елементи. Отже, $PERM(m)$ генерує всі перестановки елементів $P[1],...,P[m]$.

Зазначимо, що зрушення відбувається $P[m],...,P[m-1]$ уздовж циклу $[1\,2...m-1]$, а потім виконання транспозиції $P[m]:=:P[m-1]$ еквівалентне зрушенню $P[m],\ldots,P[m]$ уздовж циклу $[1\,2...m-3\;m-2\;m\;m-1]$ довжини m. Якщо проаналізувати зміст зміни масиву P під час виконання процедури перестановок то зміни, якими піддається масив, можна побачити в таблиці 1. З цієї таблиці виходить, що кожен елемент з'являється в перестановці $PERM(m)$ генерує всі перестановки, а φ_m є циклом $[1\,2...m]$. Отже, доведемо правильність алгоритму.

Останній алгоритм генерації перестановок, який розглядається, будує послідовність, в якій різниця між двома послідовними перестановками ще менше ніж в двох попередніх: кожна наступна утворюється з попередньої за допомогою одноразової транспозиції сусідніх елементів [95]. На рис. 2.2 послідовності перестановок, одержані з допомогою: а) алгоритму 1; б) алгоритму 2; в) алгоритму 3, який описаний нижче.

$(а)$	$(б)$	$(в)$
1 2 3 4	1 2 3 4	1 2 3 4
2 1 3 4	2 1 3 4	2 1 3 4
1 3 2 4	2 3 1 4	2 3 1 4
3 1 2 4	3 2 1 4	2 3 4 1
2 3 1 4	3 1 2 4	3 2 4 1
3 2 1 4	1 3 2 4	3 2 1 4
1 2 4 3	4 3 2 1	3 1 2 4
2 1 4 3	3 4 2 1	1 3 2 4
1 4 2 3	3 2 4 1	1 3 4 2
4 1 2 3	2 3 4 1	3 1 2 4
2 4 1 3	2 4 3 1	3 4 1 2
4 2 1 3	4 2 3 1	3 4 2 1
1 3 4 2	4 1 3 2	4 3 2 1
3 1 4 2	1 4 3 2	4 3 1 2
1 4 3 2	1 3 4 2	4 1 3 2
4 1 3 2	3 1 4 2	1 4 3 2
3 4 1 2	3 4 1 2	1 4 2 3
4 3 1 2	4 3 1 2	4 1 2 3
2 3 4 1	4 2 1 3	4 2 1 3
3 2 4 1	2 4 1 3	4 2 3 1
2 4 3 1	2 1 4 3	2 4 3 1
4 2 3 1	1 2 4 3	2 4 1 3
3 4 2 1	1 4 2 3	2 1 4 3
4 3 2 1	4 1 2 3	1 2 4 3

Рис. 2.2. Послідовності перестановок, що одержані різними способами

Наступний алгоритм приписується Джонсону і Троттеру [95]. Його ідею найлегше проілюструвати на прикладі. Припустимо, що вже побудована послідовність перестановок елементів $2,3,...,n$, володіюча цією властивістю, наприклад: 23, 32 для $n=3$. Тоді необхідну послідовність перестановок елементів $1,2,...,n$ одержимо, вставляючи елемент 1 всіма можливими способами в кожну перестановку елементів $2,3,...,n$. Одержимо:

$$\{1\,2\,3\},\{2\,1\,3\},\{2\,3\,1\},\{3\,2\,1\},\{3\,1\,2\},\{1\,3\,2\}.$$

У загальному вигляді елемент 1 поміщається між першою і останньої позиціями по-черзі вперед і назад $(n-1)!$ раз. На основі цієї конструкції можна легко одержати рекурсивний алгоритм, що генерує необхідну послідовність перестановок для довільного *n*. Розглянемо нерекурсивний варіант цього алгоритму. У цьому варіанті для кожного $i, 1 \le i \le n$, булева змінна $PR[i]$ містить інформацію про те, чи переноситься елемент *i* вперед ($PR[i]$ – істина) або ж назад ($PR[i]$ – хибна), змінна $C[i]$ показує, яку з можливих $n-i-1$ позицій елемент 1 займає щодо елементів $i+1,...,n$ на своєму шляху вперед або назад. Позицію елементу 1 в таблиці P визначаємо на підставі його позиції в блоці, що містить $i, i+1,...,n$, а також на підставі числа елементів з $1,2,...,i-1$, які знаходяться зліва від цього блоку. Це число, буде значенням змінної *x*.

Алгоритм 2.3. (Генерація всіх перестановок з мінімальним числом транспозицій сусідніх елементів). Дано: *n*.

Результат: Послідовність перестановок множини $\{1,...,n\}$, в якій кожна подальша утворюється в результаті виконання однієї транспозиції сусідніх елементів.

```
begin
      for i := 1 to n do
        begin P[i] := i; C[i] := 1; PR[i]:= істина;
        end;
      C[n] := 0; (* так, щоб  C[i] ≠ n – i + 1 в рядку 10  для i = n*)
      write(P[1],..., P[n]);
      i := 1;
      while i < n do
            begin i := 1; x := 0;
                  while C[i] = n – i + 1 do
                        begin PR[i]:=not PR[i]; C[i] := 1;
                              if PR[i] then x := x + 1;
                              i:=i+1
                        end;
                   if i < n then
                  begin (* виконання транспозиції *)
                         if PR[i] then k := C[i] + x;
                              else k := n – i + 1 – C[i] + x;
                        P[k] :=: P[k + 1];
                        write(P[1],..., P[n]);
                        C[i] := C[i] + 1
                  end
      end
end
```

Зазначимо, що в цьому алгоритмі, як і в двох попередніх, не використовується інформація про значення змінних $P[1],...,P[n]$. Це очевидно, оскільки дані змінні з’являються тільки в рядку в останньому блоці.

Вкажемо на закінчення одну цікаву інтерпретацію послідовності, одержаної за допомогою алгоритму 2.3. Розглянемо з цією метою граф G_n, вершини якого відповідають всім перестановкам множини $\{1,...,n\}$ і в якому дві вершини, відповідні перестановкам f і g, сполучені ребром.

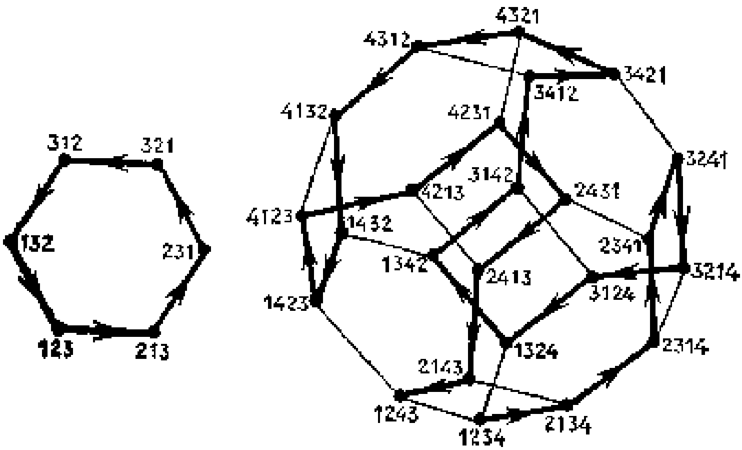


Рис. 2.3. Інтерпретація послідовності перестановок, одержаної за допомогою алгоритму 2.3

Кожна n-елементна множина $X = \{x_1,...,x_n\}$ має в точності 2^n підмножин. Щоб переконатися в цьому, достатньо кожній підмножині $Y \subseteq X$ співставити бінарну послідовність (з членами 0 або 1) $b_1, b_2, ... b_n$, визначувану таким чином:

$$b_i = \begin{cases} 0, \text{якщо } x_i \notin Y \\ 1, \text{якщо } x_i \in Y. \end{cases}$$

Тим самим встановлюється взаємнооднозначна відповідність між елементами всіх підмножин множини X і всіма бінарними послідовностями довжини n. Число таких послідовностей в точності рівне, а значить через встановлену відповідність має місце рівність $\left|\wp\left(X\right)\right| = 2^n$.

Визначена послідовність $b_1, b_2, \ldots b_n$ стає зручним машинним представленням підмножини Y, особливо в ситуації, коли потужність множини X невелика і послідовність $b_1, b_2, \ldots b_n$ може бути закодована у вигляді одного машинного слова. Таке представлення дає можливість використати простий метод генерації всіх підмножин. Достатньо відмітити, що кожна бінарна послідовність представляється у вигляді $b_{n-1} b_{n-2} \ldots b_0$. У деяких ситуаціях важливо, щоб кожна подальша одержана підмножина якнайменше відрізнялася від попередньої. Корисність алгоритму такого типу аналогічно випадку алгоритмів 2.1 і 2.2 генерації перестановок: при проведенні реальних обчислень, пов'язаних з кожною одержаною підмножиною, є можливість використовувати часткові результати, одержані для попередньої підмножини. Зазначимо, що у описаного вище алгоритму, заснованого на двійковому представленні чисел, послідовно одержувані підмножини можуть сильно відрізнятися одна від одної: наприклад, після $\left(n-1\right)$-елементної множини, що відповідає числу 011... 1, йде одноелементна множина, що відповідає числу 100... 0.

Розглянемо інший метод, при якому кожна подальша підмножина одержується з попередньої додаванням або видаленням одного елементу. Обґрунтовується він наступним простим спостереженням. Якщо послідовність $C_1, C_2, \ldots, C_m$ містить всі $m = 2^k$ бінарні послідовності довжини k, причому C_i відрізняється від C_{i+1} в точності в одній координаті $\left(i = 1, \ldots, m-1\right)$, то має місце послідовність:

$$C_1 0, C_2 0, \ldots, C_m 0, C_m 1, C_{m-1} 1, \ldots, C_1 1 .$$

Опишемо тепер нерекурентну версію цього алгоритму.

Алгоритм 2.4. (Генерація всіх підмножин *n*-елементної множини).

Дані: *n*.

Результат: Послідовність всіх підмножин *n*-елементної множини, в якій кожна подальша підмножина одержується з попереднього додаванням або видаленням одного елементу. Кожна підмножина представляється бінарною послідовністю $B[1],...,B[n]$.

```
begin
  for i := I to n do B[i] := 0; (*пуста множина*)
  i := 0; (* i=число згенерированих підмножин*)
  repeat
          write(B[1],..., B[n]);
          i := i + 1;p := 1;j :=i;
          while j mod 2=0 do
                    begin
                              j =j/2;p:=p+ l
                    end; (*p=Q(i) + 1*)
          if p ≤ n then [p] := 1 – B[p]
until p > n
end
```

Послідовність множин, породжених алгоритмом 2.4 для $n=4$ непарний, отже: $p=Q(i)+1$. Припустимо, що в перших 2^k ітераціях циклу були одержані всі 2^k бінарні послідовності, такі що $b_{k+1}=...=b_n=0$ (це очевидно справедливо для $k=0$). У останній з цих 2^k ітерацій змінна *i* приймає значення 2^k. Змінна *p* набуває значення *i*, отже, наступає зміна значення змінної з 0 на 1. Розглянемо тепер послідовність значень змінної *p*, згенерованих в наступних 2^k ітераціях циклу 3:

$$Q\left(2^k+1\right)+1,Q\left(2^k+2\right)+1,...,Q\left(2^{k+1}\right)+1.$$

Відмітимо, що $Q\left(2^k+m\right)=Q\left(2^k-m\right)$ для $0\le m\le 2^k-1$ (цей факт стає очевидним, якщо розглядати числа 2^k+m і 2^k-m, записаних в двійковій формі). Послідовність є дзеркальним відображенням послідовності значень змінної p, одержаних в перших 2^k ітераціях циклу. Звідси слідує, що і послідовності, одержані в перших 2^k ітераціях, з’являються в зворотному порядку в подальших 2^k ітераціях. Це дає всі бінарні послідовності, такі, у яких, одержані в перших 2^{k+1} ітераціях. Звідси стає ясно, що алгоритм генерує всі бінарні послідовності довжини n в такому ж порядку, що і попередній рекурсивний алгоритм. Послідовність підмножин, одержаних за допомогою алгоритму для n, представлена на рис. 2.4.

0	0	0	0
1	0	0	0
1	1	0	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	1	1	0
1	0	1	0
0	0	1	0
0	0	1	1
1	0	1	1
1	1	1	1
0	1	1	1
0	1	0	1
1	1	0	1
1	0	0	1
0	0	0	1

Рис. 2.4. Результат роботи алгоритму генерації підмножин n-елементної множини

Можна показати, що середнє число кроків, необхідних для генерації кожної наступної підмножини (не рахуючи процедури написання цієї підмножини), обмежене константою, не залежною від n. Послідовність підмножин, одержаних за допомогою алгоритму 2.4, можна одержати так само, як для послідовності перестановок, одержаних за допомогою алгоритму 2.3, проілюструвати на графі, вершини якого відповідають бінарним послідовностям довжини n і дві вершини якого сполучені ребром, якщо відповідні послідовності відрізняються в точності в одній позиції. Такий граф називатимемо (двійковим) n-мірним кубом. Очевидно, що послідовність, одержана за допомогою алгоритму 2.4, відповідає гамільтонову шляху в цьому графі. На рис. 2.5 це продемонстровано для $n = 1,2,3,4$.

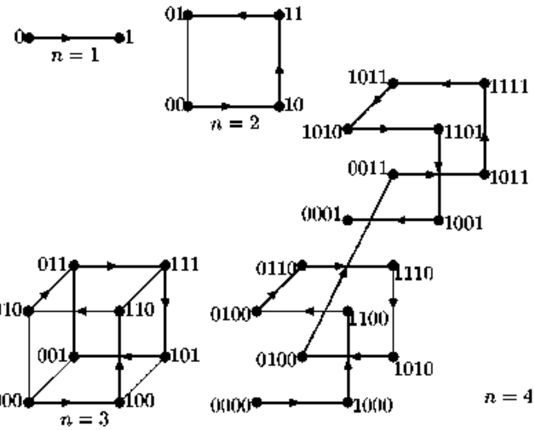


Рис. 2.5. Гамільтонові шляхи в n-мірних кубах

В деяких прикладних задачах частіше зустрічається поняття множини з повтореннями. Тоді розглянемо поняття мультимножини, тобто множини, елементи якої можуть з'являтися в цій множині кілька разів, число цих входжень є істотним і носить назву кратності елементу в множині. Множена з повтореннями, що містить наприклад, елемент a кратності 2, елемент b кратності 3 і елемент c кратності 1, позначається (a,a,b,b,b,c) або $(2a,3b,1c)$. Порядок елементів не має різниці:

$$(a,a,b,b,b,c)=(b,a,b,a,c,b)=...$$

Істотна тільки кратність кожного елементу – маємо

$$(a,a,b,b,b,c)\neq(a,b,c)$$

і відмінність від рівності множин

$$\{a,a,b,b,b,c\}=\{a,b,c\}$$

не більше кратності цього елементу в B. Нехай – множина з повтореннями, що містить r різних елементів $x_1,...,x_r$ з кратностями $k_1,...,k_r$ відповідно. Число $|X|=k_1+...+k_r$ називатимемо потужністю X. Кожній підмножині $A\subseteq X$ однозначно відповідає послідовність:

$$\langle m_1,...,m_r\rangle, 0\le m_1\le k_1,...,0\le m_r\le k_r,$$

де m_i позначає кратність елементу X_i в A. Звідси зразу ж випливає, що число всіх підмножин $A \subseteq X$ рівне:

$$(k_1+1)(k_2+1)\dots(k_r+1).$$

Ці підмножини, а точніше відповідні їм послідовності, можна генерувати способом, подібним тому, який був використаний в вище описаних алгоритмах.

Для цього достатньо зазначити, що якщо послідовність $C_1, C_2, \dots, C_m$ містить всі $p=(k_1+1)(k_2+1)\dots(k_s+1)$ послідовностей $m_1, \dots, m_s, 0 \le m_1 \le k_1, \dots, 0 \le m_s \le k_s$, то послідовність

$$C_1 0, C_2 0, \dots, C_p 0, C_p 1, C_{p-1} 1, \dots, C_1 1, C_1 2, C_2 2, C_p 2, C_p 3, \dots$$

довжини $p(k_{s+1}+1)$ містить всі послідовності $\langle m_1, \dots, m_{s+1} \rangle, 0 \le m_1 \le k_1, \dots, 0 \le m_{s+1} \le k_{s+1}$. Очевидно, що послідовність підмножин, одержана за допомогою такої побудови, матиме важливу таку властивість, що кожна подальша підмножина утворюється з попередньої додаванням або видаленням одного елементу. Якщо виключити рекурсію з цього алгоритму, то можна представити його рис. 2.6. за допомогою гамільтонового шляху в деякому графі. Цей малюнок інтерпретується так само, як і рис. 2.4.

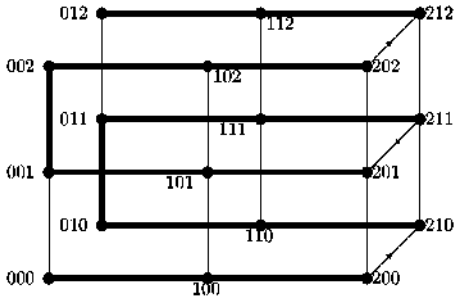


Рис. 2.6. Гамільтонів шлях в графі, відповідних підмножин множини з повтореннями $(x_1, x_1, x_2, x_3, x_3)$ алгоритму 2.4

Вище було розглянуто основне означення перестановок та методи генерації цієї множини. Але задачі з багатьма критеріями розглядаються на комбінаторних множинах, занурених в арифметичний евклідів простір, тому при їх розв'язанні є доцільним не тільки використовувати вище описані алгоритми, а і застосовувати відомі і досліджені властивості комбінаторних множин, що описані в багатьох роботах [4, 6, 7, 27, 31–44, 49–62, 134–144]. Тому далі розглянемо основні властивості комбінаторних множин.

Властивості загальної множини перестановок

Розглянемо термінологію та деякі позначення з [136, 141], необхідні для подальшого викладання результатів дослідження.

Множину перших k натуральних чисел позначимо N_k, а $N_0^k = N_k \bigcup \{0\}$. Вимірність підпростору $L \subset R^k : dim L$. Опуклу оболонку множини M позначимо $conv\, M$. Як уже було зазначено, мультимножиною є множина елементів якої можуть повторюватися. Мультимножина A задається основою $S(A)$, тобто набором всіх її різних елементів, і кратністю елементів $k_A(a)$ (або $k(a)$) – числом повторення кожного елемента a основи цієї мультимножини. Мультимножина B з основою $S(B)$ називається підмультимножиною мультимножини A з основою $S(A)$, якщо $S(B) \subset S(A)$ і для кожного елемента $a \in S(B)$ виконується нерівність $k_B(a) \le k_A(a)$.

Нехай задана мультимножина $A = \{a_1, a_2, ..., a_q\}$, її основа $S(A) = \{e_1, e_2, ..., e_k\}$, де $e_j \in R^1$ $\forall j \in N_k = \{1, ..., k\}$ і кратність елементів $k(e_j) = r_j, j \in N_k, r_1 + r_2 + ... + r_k = q$.

Впорядкованої n-вибіркою з мультимножини A називається набір:

$$a = (a_{i_1}, a_{i_2}, \ \ldots, a_{i_n}), \tag{2.1}$$

де $a_{i_j} \in A$ $\forall i_j \in N_n$, $\forall j \in N_n$, $i_s \ne i_t$, якщо $s \ne t$ $\forall s \in N_n$, $\forall t \in N_n$.

Означення 2.1 [136, 141]. Множина $E(A)$, елементами якої є n-вибірки вигляду (2.1) з мультимножини A, називається евклідовою комбінаторною множиною, якщо для довільних її елементів $a' = (a'_1, a'_2, ..., a'_n)$, $a'' = (a''_1, a''_2, ..., a''_n)$ виконуються умови: $(a' \ne a'') \Leftrightarrow (\exists\, j, m \in N_n : a'_j = a''_{m,} a'_m = a''_j, a'_j \ne a''_j)$, тобто два елементи множини $E(A)$ відмінні один від іншого, якщо вони незалежно від інших відмінностей розрізняються порядком розміщення елементів, що їх утворюють.

Множина перестановок з повтореннями з *n* дійсних чисел, серед яких *k* різних, називається загальною множиною перестановок і позначається $P_{nk}(A)$. Це множина упорядкованих *n*-вибірок вигляду (2.1) з мультимножини *A* за умови $n = q > k$.

При $n = k = q$ маємо множину перестановок без повторень. Позначимо її P_n . Очевидно, що $P_n(A) = P_{nn}(A)$. У тих випадках, коли конкретно не будемо вказувати вид множини перестановок, будемо записувати ці множини як $P(A)$.

E-комбінаторні множини цікаві тим, що дозволяють занурення їх в арифметичний евклідів простір.

Означення 2.2 [136, 141]. Нехай *E* – евклідова комбінаторна множина, а *e* – елемент *E*. Відображення $f : E \to E_f \subset R^n$ називається зануренням множини *E* в арифметичний евклідів простір, якщо *f* ставить множину *E* у взаємно однозначну відповідність множині $E_f \subset R^n$ за правилом: для $e = \left(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n}\right) \in E$, $x = f(e), x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in E_f$, маємо $x_j = a_{i_j} \ \forall j \in N_n$.

Множина E_f називається спеціальною комбінаторною множиною, або коротко *c*-множиною. Зазначимо, що *c*-множина є *e*-множиною.

Розглянемо властивості загальної множина перестановок при зануренні в евклідів арифметичний простір.

За означенням $P_{nk}(A)$ в точках $x \in P_{nk}(A)$ справедлива рівність:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} a_i \ . \tag{2.2}$$

Отже, точки $P_{nk}(A)$ належать гіперплощині (2.2) простору R^n .

Нехай елементи мультимножини *A* задовольняють умові:

$$a_1 \le a_2 \le ... \le a_n , \tag{2.3}$$

а елементи $e_1, e_2, ..., e_k$ її основи – умові:

$$e_1 < e_2 < ... < e_k . \tag{2.4}$$

Як відомо [136, 141]), опуклою оболонкою множини $P_{nk}(A)$, елементи якої впорядковані згідно (2.3) є загальний переставний многогранник $M_{nk}(A) = convP_{nk}(A)$:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_j \le \sum_{j=1}^{n} a_j & (2.5) \\ \sum_{j=1}^{i} x_{\alpha_i} \ge \sum_{j=1}^{i} a_j \ , & (2.6) \end{cases}$$

$$\alpha_j \in N_n,\ \alpha_j \ne \alpha_t,\ \forall j \ne t,\ \forall j,t \in N_i,\ \forall i \in N_n .$$

Якщо елементи мультимножини A впорядковані так, що:

$$a_1 \ge a_2 \ge \ldots \ge a_n , \tag{2.7}$$

а елементи її основи:

$$e_1 > e_2 > ... > e_k \tag{2.8}$$

то систему обмежень (2.5), (2.6) загального переставного многогранника $M_{nk}(A)$ можна записати в вигляді рівносильної їй системи:

$$\begin{cases} \sum_{i\in\omega} x_i \le \sum_{i=1}^{|\omega|} a_i \quad \forall \omega \subset N_n ; & (2.9) \\ \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{j=1}^{n} a_i , & (2.10) \end{cases}$$

де $|\omega|$ – кількість елементів множини індексів ω.

Окремі випадки $M_{nk}(A)$ розглянуто в роботах [7, 27, 136, 141].

Розглянемо властивості многогранника $M_{nk}(A)$, почавши з опису m-граней цього многогранника, $m \in N_{n-2}^0$.

Нехай для елементів мультимножини A та її основи $S(A)$ виконуються умови (2.9), (2.10), а також справедливі рівності $n_0 = 0, n_1 = r_1, n_2 = r_1 + r_2, ..., n_k = r_1 + r_2 + ... + r_k = q = n$.

Теорема 2.1 [27, 136]. а) якщо F – m-грань многогранника $M_{nk}(A)$, що означається системою (2.9), (2.10). Тоді існують такі підмножини $\omega_1 \subset \ldots \subset \omega_{n-m} = N_n$, для яких нерівності (2.9) обертаються на рівності при довільному $x \in F$, тобто відповідні обмеження – жорсткі для *F*. При цьому F – множина розв'язків системи, одержаної з (2.9), (2.10) заміною в (2.9) нерівностей рівностями для $\omega = \omega_\sigma$ при $\sigma \in N_{n-m-1}$;

б) якщо для підмножин $\omega_1 \subset \ldots \subset \omega_\lambda = N_n$ нерівності в (2.9), (2.10) замінити рівностями, то множина *F* розв'язків отриманої системи є *m*-грань многогранника $M_{nk}(A)$:

$$m = dim F = k - \left\{\lambda + \sum\left(|\omega_\sigma| - |\omega_{\sigma-1}| - 1\right)\right\}$$

і підсумовування ведеться по всіх індексах $\sigma \in N_\lambda$, для кожного з яких знайдеться таке $j \in N_k$, що $n_{j-1} \le |\omega_{\sigma-1}|$ та $|\omega_\sigma| \le n_j$ (вважається $|\omega_0 = 0|$).

Наслідок 2.1 [136]. Множина розв'язків системи (2.9), (2.10) є *i*-гранню, $i \in N^0_{n-2}$ многогранника $M^+_n(A)(a_1 > a_2 > ... > a_n \ge 0)$ у тому і тільки в тому випадку, коли кожен з цих розв'язків перетворює в рівність нерівності цієї системи лише для підмножин $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_{n-i-1}$, що мають властивість:

$$\omega_1 \subset \omega_2 \ldots \subset \omega_{n-i-1} \subset N_n . \tag{2.11}$$

Наслідок 2.3 [136]. Якщо $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ – вершина многогранника $M_{nk}(A)$, що визначається (2.9), (2.10), то справедливі умови:

$$\{\alpha_1^1\} \subset \{\alpha_1^2,\ \alpha_2^2\} \subset \ldots \subset \{\alpha_1^n,\ \alpha_2^n, \ldots,\ \alpha_n^n\} = N_n, \tag{2.12}$$

$$\sum_{t=1}^{i} x_{\alpha_t^i} = \sum_{t=1}^{i} a_t \quad \forall i \in N_n , \tag{1.13}$$

і навпаки, якщо виконуються умови (2.12), (2.13), то точка x – вершина загального переставного многограника $M_{nk}(A)$.

Теорема 2.2 [27, 136, 141]. Вершинами загального переставного многогранника $M_{nk}(A)$, суміжними з вершиною $x = (a_{\alpha_1}, a_{\alpha_2}, \ldots, a_{\alpha_n})$, є усякі вершини, які одержані з x переставленням компонент рівних e_i, e_{i+1} $\forall i \in N_{k-1}$ і тільки вони.

Твердження 2.1 [136]. Кількість R суміжних з довільною вершиною многогранника $M_{nk}\left(A\right)$ вершин обчислюється за формулою:

$$R = r_1 r_2 + r_2 r_3 + \ldots + r_{k-1} r_k \ . \qquad (2.14)$$

Означення 2.3 [136]. Сукупність нерівностей (2.6) системи (2.5), (2.6), які мають однакове значення величини *і* називають *і*-ю спілкою нерівностей цієї системи, а верхню нерівність (2.5) системи – нерівністю нульової спілки.

Означення 2.4 [136, 141]. Точку $x^0 = \left(x_1^0, \ldots, x_n^0\right)$ називають характеристичною точкою $\left(n-2\right)$-площини переставного многогранника $M_{nk}\left(A\right)$, що визначається довільною нерівністю (2.6) системи (2.5), (2.6), якщо координати цієї точки визначаються таким чином:

$$x_{\alpha_1}^0 = \ldots = x_{\alpha_i}^0 = \frac{a_1 + \ldots + a_i}{i}, \ x_{\alpha_{i+1}}^0 = x_{\alpha_{i+2}}^0 = \ldots = x_{\alpha_n}^0 = \frac{a_{i+1} + \ldots + a_n}{n-i},$$

де $\alpha_j \in N_n$, $\alpha_j \neq \alpha_t, \forall j \neq t, \forall j,t \in N_i, \forall i \in N_n$.

Зауваження 2.1 [136, 141]. Кількість нерівностей, які входять в систему (2.5), (2.6), дорівнює 2^n, бо в спілці i міститься $\binom{n}{i}$ нерівностей, де $\binom{n}{i}$-число сполучень з n елементів по i.

Нехай для мультимножини $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ виконуються умови (2.3), (2.4), а кратності елементів мультимножини A рівні $\{r_1, \ldots, r_k\}$.

Теорема 2.3 [56, 57, 136]. Виключення з системи обмежень (2.5), (2.6), що описує загальний переставний многогранник $M_{nk}\left(A\right)$ при $k\left(e_1\right) = r_1 > 1$ всіх нерівностей спілок $2, 3, \ldots, r_1$, а при $k\left(e_k\right) = r_1 > 1$, де $e_1, e_k \in S\left(A\right)$, усі нерівності спілок $n - r_k, n - r_k + 1, \ldots, n-2$, перетворює її в незвідну систему обмежень многогранника $M_{nk}\left(A\right)$.

Далі розглянемо властивості загальної множини розміщень.

Властивості загальної множини розміщень

Розглянемо множину *k*-розміщень без повторення, тобто A – множина, $q = k$, $A = S\left(A\right)$. За такої умови множину всіх упорядкованих *n*-виборок з мультимножини *A* вигляду (2.3) називають множиною n-розміщень без повторення з k різних дійсних чисел множини A. Позначимо цю множину розміщень $A_k^n\left(A\right)=A_q^n$.

Якщо $n=k$, то множина A_q^n є множиною $P_n\left(A\right)$ перестановок n-різних дійсних чисел, що складають A.

Розглянемо множину q-розміщень з повтореннями з k різних дійсних чисел з мультимножини A, в якій q елементів.

Розглянемо загальну множину n-розміщень.

Нехай $A=\left\{a_1,a_2,...,a_q\right\}$ як і раніше – мультимножина з основою $S\left(G\right)=\left(e_1,e_2,...,e_k\right)$ та первинною специфікацію $\left[A\right]=\left(q_1,q_2,...,q_k\right)$ де $q_i\le k\forall i\in N_k$.Сукупність усіх упорядкованих n-виборок вигляду (2.3) з мультимножини A будемо називати загальною множиною n-розміщень і позначити її $A_{qk}^n\left(A\right)=A_{qk}^n$. Зазначимо, що оскільки елементи первинної специфікації мультимножини A задовольняють умови $q_i\le k$, то в кожному елементі множини A_{qk}^n не більше q_i елементів $e_i\in S\left(A\right)\forall i\in k$. Якщо ж $q_i<k\forall i\in k$, то, очевидно, що в кожному елементі загальної множини розміщень $A_{qk}^n\left(A\right)$ немає однакових чисел e_i, $i\in N_k$ (на відміну від множини $A_{qk}^n\left(A\right)$, де є k елементів, що складаються з однакових чисел e_i, $i\in N_k$). Зазначимо також, що при $k=q$, тобто при $q_i=1\quad\forall i\in N_k$, множина $A_{qk}^n\left(A\right)$ збігається з множиною $A_k^n\left(A\right)=A$ розміщень без повторень: $A_{kk}^n\left(A\right)=A_k^n\left(A\right)$, а при $q_i=n\ \forall i\in N_k$, тобто при $q=nk$, множина $A_{qk}^n\left(A\right)$ перетворюється на множину $A_k\left(A\right)$ розміщень з повтореннями: $A_{qk}^n\left(A\right)=A_k^n\left(A\right)$.

Якщо $n=q$, то множина $A_{qk}^n\left(A\right)$ є загальною множиною перестановок $P_{nk}\left(A\right)$ з елементів мультимножини A.

Як відомо з [27, 136], опуклою оболонкою точок загальної комбінаторної множини розміщень є загальний многогранник розміщень $M_{qk}^n\left(A\right)=convA_{qk}^n\left(A\right)$. Загальний многогранник розміщень

$M_{qk}^{n}\left(A\right)$ можна представити сукупністю всіх розв'язків такої системи нерівностей:

$$\sum_{j=1}^{|\omega|} a_{q-j+1} \le \sum_{i\in\omega} x_i \le \sum_{j=1}^{|\omega|} a_j \,, \forall\omega \subset N_n . \qquad (2.15)$$

Означення 2.5. Вектор x є вершиною загального многогранника розміщень $M_{qk}^{n}\left(A\right)$ тоді і тільки тоді, коли він представляє собою перестановку чисел, $a_1,...,a_s,...,a_{q-r+1},...,a_q$, де $s\in N_n, r\in\left\{N_n \cup 0\right\}$, $s+r=n$.

Наряду з відомими евклідовими комбінаторними множинами перестановок, розміщень, сполучень, розбиттів виділяються більш складні структури – полікомбінаторні множини. Інтерес до таким множин обувлено різними прикладними задачами, оскільки значна їх кількість досить добре описується з допомогою полікомбінаторних конструкцій [51, 137]. Отже, розглянемо властивості загальної множини поліпереставновок та полірозміщень.

Властивості загальної множини поліперестановок

Розглянемо опуклу оболонку поліпереставної множини $P_{nk}^{S}\left(A,H\right), M_{nk}^{s}\left(A,H\right)=convP_{nk}^{s}\left(A,H\right)$. Якщо далі при викладі матеріалу не буде потреби підкреслювати значення параметрів n,k,s, будемо використовувати також позначення $P\left(A,H\right)=P_{nk}^{s}\left(A,H\right)$ та $M\left(A,G\right)=M_{nk}^{s}\left(A,H\right)$.

Нехай $A^{n_i}\subset A$ – n_i-елементна мультимножина $\left(n_i=|N_i| \,\forall i\in N_s\right)$, що утворена елементами A $a_1^{N_i},...,a_{n_i}^{N_i}$ з номерами з множини N_i, $n_1+...+n_s=n$. Упорядкуємо, не порушуючи спільності подальших міркувань, компоненти мультимножини A^{N_i}:

$$a_1^{N_i} \ge a_2^{N_i} \ge ... \ge a_{n_i}^{N_i} .$$

Покладемо $N_i^{'}=\left\{\left(\sum_{j=1}^{i-1} n_j\right)+1, \left(\sum_{j=1}^{i-1} n_j\right)+2,...,\sum_{j=1}^{i} n_j\right\} \forall i\in N_s$.

Теорема 2.4. Множина $M\left(A,H\right)$ визначається сукупністю всіх розв’язків системи:

$$\begin{cases} \sum\limits_{j\in K_i^{'}} x_j - \sum\limits_{j=1}^{n_i} a_j^{N_i}, \forall i \in N_s; \\ \sum\limits_{j\in \omega^i} x_j \le \sum\limits_{j=1}^{|\omega^i|} a_j^{N_i}, \forall \omega^i \subset N_i^{'}, \forall i \in N_s. \end{cases} \qquad (2.16)$$

Назвемо групою $\left(i,|\omega^i|\right)$ нерівностей системи (2.16) сукупність нерівностей цієї системи з фіксованими значеннями пари чисел $i,|\omega^i| \quad \forall \omega^i \subset N_i^{'}, \forall i \in N_s$.

Нехай мультимножина $A^{N_i} = \left\{a_1^{n_i},...,a_{n_i}^{N_i}\right\}$ має основу $S\left(A^{N_i}\right) = \left\{e_1^i,...,e_{k_i}^i\right\}$, первинну специфікацію $\left(A^{N_i}\right) = \left\{p_1^i,...,p_{k_i}^i\right\}$, $p_1^i + ... + p_{k_i}^i = n_i$. Нехай $a_j^{N_i} \ge a_{j+1}^{N_i}, \forall j \in N_{n_i-1}, i \in N_s$. Якщо $p_1^i > 1$, то очевидно, що в цьому випадку при виконанні нерівностей групи $\left(j,1\right)$ виконуються і нерівності групи $\left(j,2\right),...,\left(j,p_j^i\right)$. Дійсно, так як $x_q \le a_1^{N_i}$, то $x_q + x_m \le a_1^{N_i} + a_1^{N_i}$ $\left(\forall q,m \in \omega^i \subset N_i^{'}, i \in N_S\right)$ і так далі, $\sum\limits_{q=1}^{p_1^i} x_{\alpha_q} \le p_1^i a_1^{N_i}, \alpha_q \in \omega^i \subset N_i^{'}, i \in N_S$. Тобто в системі (2.16), що описує $M\left(A,H\right)$, можна залишити нерівності спілок $\left(i,1\right),\left(i,p_1^i+1\right),\left(i,p_1^i+2\right),...,\left(i,n_i-1\right)$. Аналогічні міркування можна провести і у випадку, коли $p_{k_i}^i > 1$.

Многогранник $M\left(A,H\right)$ будемо називати загальним (на відміну від випадку $M\left(A^i,H\right)$, коли $A-$ множина) многогранником евклідової переставної множини з повтореннями, або загальним поліпереставним многогранником.

Нехай $M_i \in d_i-$ вимірним многогранником $\forall i \in N_S$. Як відомо (див, наприклад [27]), під добутком многогранників $M_1,...,M_S$ розуміють множину $\bigotimes\limits_{i=1}^{S} M_i = \left\{x \in R^{d_1+...+d_S} \mid x = \left(x_1,...,x_S\right), x_i \in M_i \ \forall i \in N_S\right\}$.

Далі сформулюємо наступну лему з [136], що приводиться згідно [27].

Лема 2.1.

1. Добуток многогранників є многогранником.

2. $dim\left(\underset{i=1}{\overset{S}{\otimes}} M_i\right) = \sum_{i=1}^{S} dim M_i$, де $dim A$ – вимірність множини A.

3. n-вимірні грані многогранника $\underset{i=1}{\overset{S}{\otimes}} M_i$ утворюють множину з елементами вигляду $\underset{i=1}{\overset{S}{\otimes}} F_i$, де F_i – є n_i-вимірна грань многогранника M_i та $n_1 + ... + n_S = n$.

Позначимо n_i кількість елементів основи мультимножини $A^{N_i} = \left\{a_1^{N_1}, ..., a_i^{N_i}\right\}$.

Теорема 2.5. $M\left(A,H\right) = \underset{i=1}{\overset{S}{\otimes}} M_{n_i k_i}\left(A^{N_i}\right)$.

Теорема 2.6. Множина $P\left(A,H\right)$ збігається з множиною вершин многогранника $M\left(A,H\right)$.

Теорема 2.7. Вершина $a\left(\pi\right) \in vertM\left(A,H\right)$ є суміжною до вершини $a\left(\sigma\right) \in vertM\left(A,H\right)$ тоді і тільки тоді, коли $a\left(\sigma\right)$ утворюється з $a\left(\pi\right)$ переставленням двох нерівних одна одній компонент – $a_i^{N_i}$ та $a_{i+1}^{N_i}$, $j \in N_{n_i - 1}, i \in N_S$.

Теорема 2.8. Точки множини $M(A, H)$ належать $(n-2)$-сфері $W \subset R^n$, що описуються системою рівнянь: $\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} a_i$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - t^*\right)^2 = r^2$$

де t^*, r обчислюються за формулами:

$$t^* = \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}, \; r = \left(\sum_{j=1}^{n}\left(a_i - \left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right) / n\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

відповідно.

Лема 2.2. Вписаний в $(n-1)$-сферу S_{k-1} k-многогранник M_k перерізається з S_{k-1} в вершинах $vert\, M_k$ цього многогранника і тільки в них.

Теорема 2.9. Точка множини $M(A,H)$ і тільки вона задовольняють системам обмежень, що складаються з (2.6), та рівнянь сфери.

Теорема 2.10. Нехай мультимножина $A^{N_i}=\left\{a_1^{N_i},...,a_{n_i}^{N_i}\right\}$, де $a_1^{N_i}\ge...\ge a_n^{N_i}, \forall i\in N_S$, має основу $S\left(A^{N_i}\right)=\left\{e_1^i,...,e_{k_i}^i\right\}$, де $e_1^i>...>e_{k_i}^i, \forall i\in N_S$ та первинну специфікацію $\left(A^{N_i}\right)=\left\{p_1^i,...,p_{k_i}^i\right\}, p_1^i+...+p_{k_i}^i=n_i,\ \forall i\in K_S$.

Нехай $n_0^i=0, n_1^i=p_1^i,\quad n_2^i=p_1^i+p_2^i,...,n_{k_i}^i=p_1^i+...+p_{k_i}^i=n_i, \forall i\in K_S$.

а) якщо F – m-грань многогранника $M(A,H)$, тоді знайдуться такі підмножини $\omega_0^i\subset\omega_1^i\subset...\subset\omega_{n_i-m_i}^i=N_i', \forall i\in N_S, m_1+...+m_S=m$, для яких нерівності з (2.16) обертаються у рівності при будь-якому $x\in F$, тобто відповідні обмеження є жорсткими для F. При цьому F-множина розв'язків системи, одержаної з (2.16) заміною нерівностей рівностями для $\omega_{\sigma_i}^i, \forall\sigma_i\in N_{n_i-m_i}^o, \forall i\in N_S$;

б) якщо для підмножин $\varnothing=\omega_0^i\subset\omega_1^i\subset...\subset\omega_{q_i}^i=N_i', \forall i\in N_S$ в системі (2.16) нерівності замінити рівностями, то множина F розв'язків одержаної системи є m-гранню многогранника $M(A,H)$, де $m=m_1+...+m_S$, а $m_i=n_i-\left\{q_i-\sum\left(|\omega_{\sigma_i}^i|-|\omega_{\sigma_i-1}^i|-1\right)\right\}$ і підсумовування проводиться по всіх індексах $\sigma_i\in N_{q_i}$, для кожного з яких знайдеться таке $j\in N_{k_i}$, що $n_{j-1}^i\le|\omega_{\sigma_i-1}^i|$ та $|\omega_{\sigma_i}^i|\le n_j^i$ (вважаємо, що $\left|\omega_0^i\right|=0$), $\forall i\in N_S$

Властивості загальної множини полірозміщень

Представимо множину N_q у вигляді впорядкованого розбиття на s, де $s<q$, непустих попарно непересічних підмножин $N_1,...,N_s$, тобто для них виконуються умови: $N_i\cap N_j=\varnothing$, $N_i\ne\varnothing$, $N_j\ne\varnothing$, $\forall i,j\in N_s$, а так само впорядковане розбиття числа k на s доданки

$k_1, k_2, ..., k_s$, що задовольняє умова $1 \le k_i \le q_i$, $\forall i \in N_s, |N_i| = q_i$. Очевидно, що $q_1 + q_2 + ... + q_s = q$, $k_1 + k_2 + ... + k_s = k$.

Позначимо H – множину елементів виду: $h = \left(h(1), ..., h(k)\right) = \left(h^1, ..., h^s\right)$, де $h(j) \in N_n$, $j \in N_k$, а h^i – довільна перестановка елементів множини J_i $\forall i \in N_s$.

Нехай підмультимножина A^i мультимножини A, складається з тих елементів A, номера яких належать множині N_i: $A^i = \left\{a^i_1, ..., a^i_{k_i}\right\}$, $|N_i| = k_i$.

Означення 2.6. Множину

$$A^{ns}_{qk}\left(A, H\right) = \left\{\left(a_{h(1)}, ..., a_{h(k)}\right) \middle| a_{h(i)} \in A \; \forall i \in N_n, \forall h \in H\right\} \subset R^k$$

називають загальною множиною поліросміщень, зазначених $A^{ns}_{qk}\left(A, H\right) = A^{ns}_{qk}$.

Не втрачаючи загальності, упорядкуємо елементи мультимножини A по неспаданню: $a_1 \le \ldots \le a_k$. Очевидно, що це впорядкування зберігається й для кожної підмультимножини A^i $i \in N_s$, з A.

Відомо [51, 137], що опуклою оболонкою множини поліросміщень $M^{ns}_{qk}\left(A, H\right)$ є многогранник поліросміщень $M^{ns}_{qk}\left(A, H\right) = conv\, A^{ns}_{qk}\left(A, H\right)$, множиною вершин якого є елементи множини поліросміщень: $vert\, M^{ns}_{qk}\left(A, H\right) = A^{ns}_{qk}\left(A, H\right)$.

Теорема 2.11. Множина $M^{ns}_{qk}\left(A, H\right)$ визначається сукупністю всіх розв'язків системи:

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n_i} x_j \le \sum\limits_{j=1}^{n_i} a^i_j, i \in N_s, & (2.17) \\ \sum\limits_{j=1}^{m_i} x_{\alpha_j} \ge \sum\limits_{j=1}^{m_i} a^i_j, \quad m_i \in N_{q_i - 1}, \alpha_j \in N_i, \forall i \in N_s & (2.18) \end{cases}$$

$\alpha_j \ne \alpha_t, \forall j \ne t, \forall j, t \in N_i$.

Многогранник $M^{ns}_{qk}\left(A, H\right)$ будемо називати загальним многогранником евклідової множини поліросміщень. Розглянемо деякі його властивості і його зв'язок із загальною множиною поліросміщень.

Очевидно, що із системи лінійних нерівностей (2.17)–(2.18) можна виділити s підсистем лінійних нерівностей, що описують многогранники розміщень $M_{q_i k_i}^{n_i}\left(A^i\right)$, що є опуклою комбінацією множини розміщень $a_{h^i}, i \in N_s$. Отже,

$$M_{q_i k_i}^{n_i}\left(A^i\right)=\left\{x \in R^{n_i} \left| \sum_{j=1}^{n_i} x_j \le \sum_{j=1}^{n_i} a_{q_i-j}^i, \sum_{j=1}^{m_i} x_{\alpha_j} \ge \sum_{j=1}^{m_i} a_j^i \right.\right\},$$

$$m_i \in N_{q_i-1}, \alpha_j \in J_i, \alpha_j \ne \alpha_t, \forall j \ne t, \forall j,t \in J_i, \forall i \in N_s.$$

Розглянемо добуток многогранників $M_1,...,M_s$ як множину $\underset{i=1}{\overset{S}{\otimes}} M_i=\left\{x \in R^{d_1+...+d_s} \mid x=\left(x_1,...,x_s\right),\ x_i \in M_i \quad \forall i \in N_s\right\}$, де M_i – d_i мірний многогранник та скористаємося лемою 2.1.

Зрозуміло, що кожний з многогранників $M_{q_i k_i}^{n_i}\left(A^i\right)$ являє собою многогранник розміщень. По означенню добутку многраников і відповідно до леми справедлива рівність $\underset{i=1}{\overset{s}{\otimes}} M_{q_i k_i}^{n_i}\left(A^i\right)=\left\{x \in R^{d_1+...+d_s} \mid x=\left(x_1,...,x_s\right),\ x_i \in M_{q_i k_i}^{n_i}\left(A^i\right) \ \forall i \in N_s\right\}$, тобто точка $x \in \underset{i=1}{\overset{s}{\otimes}} M_{q_i k_i}^{n_i}\left(A^i\right)$ задовольняє кожній з s підсистем системи (2.17), (2.18). Отже, можна стверджувати, що якщо a_{h^i} – вершина многогранника $M_{q_i k_i}^{n_i}\left(A^i\right)$, то $a(h)=\underset{i=1}{\overset{s}{\otimes}} a_{h^i}$. Відповідно $a(h)=\left(a_{h^1},...,a_{h^s}\right)$, де $a(h) \in P_{qk}^{ns}(A,H)$. Справедливі наступні теореми [51, 137].

Теорема 2.12. $M_{qk}^{ns}(A,H)=\underset{i=1}{\overset{s}{\otimes}} M_{q_i k_i}^{n_i}\left(A^i\right)$.

Теорема 2.13. Множина полірозміщень $A_{qk}^{ns}(A,H)$ збігається із множиною вершин многогранника $M_{qk}^{ns}(A,H)$.

Теорема 2.14. Вершина $a(h) \in vert\, M_{qk}^{ns}(A,H)$ є суміжною з вершиною $a(z) \in vert M_{qk}^{ns}(A,H)$ тоді й тільки тоді, коли $a(z)$ утвориться з $a(h)$ перестановкою двох нерівних один одному компонент: a_i^i і a_j^i, $j \in N_{q_i-1}$, $i \in N_s$.

2.3. Задачі оптимізації на евклідових комбінаторних множинах

Основною задачею комбінаторної оптимізації є, згідно [136], задача знаходження екстремуму та екстремалі, тобто пари:

$$F\left(q^*\right)=\underset{q\in Q}{extr}\,F\left(q\right) \tag{2.19}$$

$$q^* = arg\,\underset{q\in Q}{extr}\,F\left(q\right), \tag{2.20}$$

де Q – скінчена комбінаторна множина, на якій задано деякий функціонал F.

Розв'язком задачі (2.19), (2.20) називається пара $<F\left(q^*\right),q^*>$.

Введення поняття *e*-комбінаторної множини дає можливість виокремити з сукупності задач комбінаторної оптимізації (2.19), (2.20), ті задачі, в яких $Q=E$, а саме:

$$F\left(x^*\right)=\underset{x\in E}{extr}\,F\left(x\right); \tag{2.21}$$

$$x^* = arg\,\underset{x\in E}{extr}\,F\left(x\right). \tag{2.22}$$

Введення відображення f (занурення в R^k) згідно [136] дає можливість замінити розв'язок задачі (2.21), (2.22), розв'язком такої задачі знайти:

$$\Phi\left(x^*\right)=\underset{x\in E_f}{extr}\,\Phi\left(x\right), \tag{2.23}$$

$$x^* = arg\,\underset{x\in E_f}{extr}\,\Phi\left(x\right), \tag{2.24}$$

де $\Phi\left(x\right)$ – функція k змінних, що означається на множині $E_f,\Phi:E_f\to R^1$, яка відповідає функціоналу $F\left(x\right),x\in E$.

Під відповідністю функції Φ функціоналу $F\left(a\right)$, де $a\in E,x=f\left(a\right)$ розуміється, згідно [136], співвідношення: $F\left(a\right),\Phi\left(f\left(a\right)\right)\forall a\in E$. Функція $\Phi\left(x\right)$ може бути визначеною на множині $E_\Phi\supset E_f$.

Означення 2.7 [136]. Задача (2.23), (2.24) називається евклідовою задачею комбінаторної оптимізації, або *e*-задачею оптимізації.

Інколи зручно задачу (2.23) (2.24) зобразити так:

$$C\left(y^*\right)=\underset{x\in E_\phi}{extr}\,C\left(y\right), \tag{2.25}$$

$$y^* = arg \underset{x \in E_\phi}{extr}\, C(y), \tag{2.26}$$

при обмеженнях

$$\phi^i(y) \le 0 \quad \forall i \in N_r, \tag{2.27}$$

$$\phi^{r+i}(y) = 0 \quad \forall i \in N_s, \tag{2.28}$$

де $x = (x_1, ..., x_n)$, $y = (x_1, ..., x_n, y_{n+1}, ..., y_m) \in R^m$, m – натуральна константа $(m \ge n), C(y), \varphi^i(y) \forall i \in N_{r+s}$ – функції m змінних. Обмеження (2.27), (2.28) називають додатковими обмеженнями *е*-задачі.

Означення 2.8 [136]. Задача (2.25)–(2.28) при $m = n$ називається повністю комбінаторною задачею, а при $m > n$ – частково комбінаторною. Змінні $y_{n+1}, ..., y_m$ називаються неперервними, а $x_1, ..., x_n$ – комбінаторними. Якщо $r + s = 0$, тобто додаткових обмежень немає, то *е*-задача (2.25)–(2.28) називається евклідовою безумовною задачею комбінаторної оптимізації, в іншому випадку – умовною *е*-задачею.

Якщо функції $C(y), \varphi^i(y) \forall i \in N_{r+s}$ є лінійними, то задача (2.25)–(2.28) називається лінійною задачею.

В залежності від того, який вигляд має комбінаторної оптимізації (2.21), (2.22) називають [136]:

– задачею на перестановках без повторень $(E = P_k(A))$;

– задачею на загальній множині перестановок $(E = P_{nk}(A))$ і т. д.

Згідно даних вище означень задачею лінійної оптимізації на загальній множині перестановок без додаткових обмежень називається, задача знаходження пари $< \Phi(x^*), x^* >$:

$$\Phi(x^*) = \underset{x \in P_{nk}(A)}{extr} \sum_{i=1}^{k} c_i x_i, \tag{2.29}$$

$$x^* = arg \underset{x \in P_{nk}(A)}{extr} \sum_{i=1}^{n} c_i x_i, \tag{2.30}$$

де $a_i \in R^1 \forall i \in N_k$.

Нехай є задача знайти:

$$\sum_{i=1}^{k} c_i x^* = \underset{x \in M_{nk}(A)}{extr} \sum_{i=1}^{n} c_i x_i, \tag{2.31}$$

$$x^* = arg \operatorname*{extr}_{x \in M_{nk}(A)} \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \ . \qquad (2.32)$$

Якщо задача (2.31), (2.32) розв’язується таким методом лінійного програмування, який дає вершину допустимої області, то розв’язки задач (2.29), (2.30) та (2.31), (2.32) еквівалентні, оскільки як відомо [136]:

$$P_{nk}(A) = vertM_{nk}(A) \, .$$

Лінійні додаткові обмеження суттєво ускладнюють розв’язок задачі.

По вигляду цільової функції або додаткових обмежень можна назвати евклідову комбінаторну задачу відповідно *e*-задачею дробово-лінійної, угнутої, нелінійної оптимізації тощо.

РОЗДІЛ 3. ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА ТА ФОРМАЛЬНА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ НА КОМБІНАТОРНИХ МНОЖИНАХ

Існування оптимізаційних задач з багатьма критеріями на комбінаторних множинах вимагає розробки ефективних методів та алгоритмів оптимізації, які дозволяють розв'язувати як окремі задачі, так і цілі їх класи. Це робить необхідним вивчення властивостей указаних оптимізаційних задач, що в свою чергу приводить до дослідження властивостей множин їх розв'язків та областей визначення.

В даному розділі формулюється якісно нова постановка задачі комбінаторної оптимізації, що об'єднує проблему багатокритеріальності та комбінаторні властивості розв'язків. Описуються властивості множин оптимальних розв'язків та їх застосування до розв'язування багатокритеріальних задач, а також пропонуються методи для їх розв'язання.

3.1. Постановка задачі

Розглянемо багатокритеріальну комбінаторну задачу вигляду:

$$Z(\Phi,E): \quad max\{\Phi(a) \mid a \in E\},$$

що полягає в максимізації векторного критерію $\Phi(a)$ на деякій комбінаторній множині, де $\Phi(a)=(\Phi_1(a),\Phi_2(a),...,\Phi_l(a))$, $\Phi_i : R^n \to R^1, i \in N_l$.

В залежності від того, який вигляд має комбінаторна множина розрізняють при $E = P_{nk}(A) = P_{nk}$ задачу $Z(\Phi,E)$ багатокритеріальну комбінаторну на множині перестановок, якщо $E = A_{qk}^n(A) = A_{qk}^n$, то задача $Z(\Phi,E)$ є задачею на множині розміщень і т. д.

Як відомо, одним з основних, фундаментальних понять багатокритеріальної оптимізації взагалі є поняття оптимального по Парето, тобто ефективного розв'язку, оптимального по Слейтеру (слабо ефективного розв'язку), оптимального по Смейлу (строго ефективного розв'язку).

Розроблено багато різних принципів прийняття рішень в ситуаціях такого роду. Але найбільш цікавими є традиційні, які пов'язані із виділенням із всієї множини розв'язків та оцінок $Y = \{ y = \Phi(a) \mid a \in E \}$ множини непокращуваних або оптимальних по Парето, оптимальних по Слейтеру, оптимальних по Смейлу векторів.

Розглянемо задачу багатокритеріальної комбінаторної оптимізації на множині перестановок, тобто $E = P_{nk}(A)$. Тоді, під розв'язком задачі $Z(\Phi, P_{nk}(A))$ будемо розуміти знаходження елементів однієї із наступних множин: $P(\Phi, P_{nk}(A))$ – множини Парето-оптимальных (ефективних) розв'язків, $Sl(\Phi, P_{nk}(A))$ – оптимальних по Слейтеру (слабо ефективних) розв'язків, $Sm(\Phi, P_{nk}(A))$ – оптимальних по Смейлу (строго ефективних) розв'язків.

Задачі пошуку елементів із зазначених множин $P(\Phi, P_{nk}(A))$, $Sl(\Phi, P_{nk}(A))$ чи $Sm(\Phi, P_{nk}(A))$ позначимо відповідно $Z_P(\Phi, P_{nk}(A))$, $Z_{Sl}(\Phi, P_{nk}(A))$ чи $Z_{Sm}(\Phi, P_{nk}(A))$. Згідно [116, 117] для кожного $a \in P_{nk}(A)$ справедливі твердження:

$$a \in Sl(\Phi, P_{nk}(A)) \Leftrightarrow \{ y \in P_{nk}(A) \mid \Phi(y) > \Phi(a) \} = \varnothing, \qquad (3.1)$$

$$a \in P(\Phi, P_{nk}(A)) \Leftrightarrow \{ y \in P_{nk}(A) \mid \Phi(y) \geq \Phi(a), \Phi(y) \neq \Phi(a) \} = \varnothing \qquad (3.2)$$

$$a \in Sm(\Phi, P_{nk}(A)) \Leftrightarrow \{ y \in P_{nk}(A) \mid \Phi(y) \geq \Phi(a), y \neq a \} = \varnothing. \qquad (3.3)$$

Очевидно, що

$$Sm(\Phi, P_{nk}(A)) \subset P(\Phi, P_{nk}(A)) \subset Sl(\Phi, P_{nk}(A)). \qquad (3.4)$$

Із скінченності допустимої області $P_{nk}(A)$ випливає, що множина $P(\Phi, P_{nk}(A))$ не порожня і зовнішньо стійка [116, 130]: $\forall y \in P_{nk}(A)$ $\exists\, a \in P(\Phi, P_{nk}(A)) : \Phi(a) \geq \Phi(y)$. У випадку нескінченності множини A це питання вимагає окремого дослідження, але за умови комбінаторності вона завжди скінчена.

Будемо розглядати елементи множини перестановок з повтореннями як точки арифметичного евклідового простору R^n.

При відображенні множини $P_{nk}(A)$ в евклідів простір R^n можна сформулювати задачу $Z(F,X)$ максимізації деякого векторного критерію $F(x)$ на множині X, причому кожній точці $a \in P_{nk}(A)$ буде відповідати точка $x \in X$, така, що $F(x) = \Phi(a)$.

$$Z(F,X): max\{F(x) \mid x \in X\},$$

де $F(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_l(x))$, $f_i : R^n \to R^1, i \in N_l$, X – непорожня множина у R^n, що визначається таким чином $X = vert M_{nk}(A) = M_{nk}(A) = conv P_{nk}(A) = M(A)$.

Задача $Z(F,X)$ може містити також додаткові лінійні обмеження, що утворять опуклу многогранну множину $D \subset R^n$ наступного вигляду: $D = \{x \in R^n \mid Bx \le d\}$, де $d \in R^m$, $B = [b_{ij}]_{m \times n}$, $b_{ij} \in R^1$. Таким чином, допустима множина X має вигляд: $X = vert M(A) \bigcap D$. Як правило, введення додаткових обмежень ускладнює задачу, однак зменшує допустиму область.

3.2. Властивості області допустимих розв'язків

Для комбінаторних багатокритеріальних задач розв'язок представляє узагальнення поняття точки максимуму числової функції: розв'язок Парето-оптимальний, якщо значення кожного із критеріїв можна поліпшити лише за рахунок погіршення значень інших критеріїв.

Властивостям і методам відшукання Парето-оптимальних розв'язків присвячено досить багато літератури, але для задачі $Z(F,X)$ комбінаторної оптимізації необхідно врахувати специфіку й комбінаторні властивості області допустимих розв'язків, тому є актуальним розглянути дане питання.

З множини розв'язків X необхідно вибрати такі, для яких виконувалася б умова належності комбінаторній множині $x \in P_{nk}(A)$ і які були б «кращі» ніж інші. Визначимо оптимальні розв'язки, тобто такі, які мають переваги над множиною інших розв'язків. Прямий перебір деякого найкращого розв'язку, як правило є трудомістким. Тому виберемо найкращий розв'язок з двох даних.

Означення 3.1. Якщо з двох заданих розв'язків x_1 і x_2 множини X, вибирається розв'язок x_1, то розв'язок x_1 переважає над розв'язком x_2.

Всі пари вигляду (x_1, x_2), де x_1, $x_2 \in X$, для яких розв'язок x_1 переважає, над розв'язком x_2, утворюють деяку множину. Відношення строгої переваги, що використовується при побудові множини позначимо символом $\succ$.

Відношення $\succ$ повинне бути іррефлексивним, також слід вважати відношення $\succ$ асиметричним, оскільки інакше можуть одночасно виконуватися співвідношення $x_1 \succ x_2$ і $x_2 \succ x_1$, що суперечить означенню.

У багатьох випадках доцільно припускати введене відношення $\succ$ ще і транзитивним. Транзитивність відношення означає, що розв'язок x_1 переважає перед x_2, а $x_2 \succ x_3$, тобто x_2 переважає перед x_3, то з двох розв'язків x_1 і x_2 буде вибрано x_1.

Множину всіх оптимальних розв'язків множини *X* позначатимемо через $opt_{\succ} X$. Залежно від структури *X* і виду відношення $\succ$ множина $opt_{\succ} X$ може містити єдиний елемент, скінченну або нескінченну множину елементів, а також не містити жодного елементу. Якщо врахувати комбінаторну природу множини допустимих розв'язків задачі $Z(F, X)$, то $opt_{\succ} X$ – є скінченною множиною, елементи якої є точки множини розміщень, перестановок, тобто $x \in P_{nk}$, чи $x \in A_{qk}^n$ та ін.

Отже для задачі $Z(F, X)$ множина $opt_{\succ} X$ містить принаймні два елементи. Розглянемо два довільні оптимальні розв'язки x_1 і x_2. Оскільки передбачено, що розв'язки є оптимальними, то для них не може виконуватися відношення переваги $\succ$. Таким чином, згідно зазначеної умови, для розв'язків може виконуватися лише одне з трьох наступних співвідношень: $x_1 \succ x_2$, або $x_2 \succ x_1$, або рівні один одному.

Сформулюємо теорему, яка гарантує існування оптимальних розв'язків для комбінаторних багатокритеріальних задач оптимізації $Z(F, X)$.

Теорема 3.1. Так як множина допустимих розв'язків $X = vert\, M(A) \cap D$ задачі $Z(F, X)$ не порожня і містить скінченне число елементів, а відношення $\succ$ асиметричне і транзитивне, то множина оптимальних розв'язків непуста , тобто $opt \succ X \neq \varnothing$.

Доведення цього твердження носить конструктивний характер і його можна сформулювати у вигляді алгоритму:

Введемо позначення $X = X_1 = \left\{ x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n_1} \right\}$.

Нехай $n_1 = 1$, то $X_1 = \{x_{11}\} = opt_{\succ} X_1$. Тому далі вважатимемо $n_1 > 1$.

Перший крок алгоритму полягає в попарному порівнянні розв'язку x_{11} з кожним з решти розв'язків множини. Якщо для деякого $i \in \{2, 3, \ldots, n_1\}$ виконується співвідношення $x_{11} > x_{1i}$, то розв'язок x_{1i} з множини X_1 видаляють; і він не може бути оптимальним. Інакше, тобто коли $x_1 \square x_{1i}$, або $x_{1i} > x_{11}$ то розв'язок x_{1i} зберігають. Після виконання всіх порівнянь розв'язок x_{11} також слід видалити з множини X_1. При цьому, якщо ні для якого $i = 2, 3, \ldots, n_1$ не виконалось співвідношення $x_{1i} > x_{11}$, то розв'язок x_{11} є оптимальним і його потрібно запам'ятати. Множину розв'язків, що залишилася в результаті вилучення, позначимо через:

$$X_2 = \{x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n_2}\}, \quad n_2 < n_1.$$

Якщо $X_2 = \varnothing$, то розв'язок x_{11} оптимальний (він зберігається в пам'яті), оскільки через асиметричність відношення $\succ$ із співвідношення $x_{11} \succ x_{1i}$ випливає, що співвідношення $x_{1i} > x_{11}, i = 2, 3, \ldots, n_1$, не може мати місця. В такому випадку процедура відшукання множини $opt_{\succ} X_1$ закінчена. Якщо ж $X_2 \neq \varnothing$, то переходимо до наступного кроку алгоритму.

Другий крок аналогічний першому і полягає в попарному порівнянні розв'язку x_{21} з кожним із розв'язків $x_{22}, \ldots, x_{2n_2}$. Всі розв'язки x_{2i}, для яких виконується відношення переваги $x_{21} > x_{2i}$ для x_{21} із множини X_2 виключають. Крім того, видаляють розв'язок x_{21}. При цьому, якщо ні для якого $i = 2, 3, \ldots, n_2$ не виконується співвідношення $x_{2i} > x_{21}$, то $x_{21} \in opt_{\succ} X_2$. Більш того $x_{21} \in opt_{\succ} X_1$ і розв'язок x_{21} слід запам'ятати. Насправді, співвідношення $x_{11} \succ x_{21}$ не може мати місця, оскільки розв'язок x_{21} не був видалений з X_1 на першому кроці. Співвідношення $x_{1i} \succ x_{2i}$ для $x_{1i} \in X_1 \setminus X_2, i \neq 1$ також не може бути виконано, оскільки $x_{11} \succ x_{1i}$ і відношення $\succ$ транзитивне: з $x_{11} \succ x_{1i}$ і $x_{1i} \succ x_{21}$ слідує, що $x_{11} \succ x_{21}$. Множину розв'язків, що залишилася, після вилучення позначимо $X_3 = \{x_{31}, x_{32}, \ldots, x_{3n_3}\}, n_3 < n_2$. Якщо $X_3 \neq 0$, то переходимо на наступний крок і т.д.

Алгоритм, згідно транзитивності відношення $\succ$, дає можливість знайти розв'язок x_{k1}, оптимальний на множині X_k, тобто $opt_{\succ} X_1$, а значить, і на початковій множині $X = vertM(A) \cap D$.

Оскільки множина $X = vertM(A) \cap D$ містить скінченне число елементів, то через скінчене число кроків процедура закінчить свою роботу. Розв'язки, що зберігаються в пам'яті, утворюють шукану непусту множину $opt_{\succ} X$.

Можна оцінити «трудомісткість» сформульованого алгоритму, тобто визначити якнайменше і найбільше можливе число попарних порівнянь, які потрібно для знаходження всієї множини $opt_{\succ} X$.

Найменше число порівнянь $n_1 - 1$ має місце, якщо $x_{11} \succ x_{1i}$, $i = 2, 3, \ldots, n_1$. У «найдовшому варіанті» доведеться порівнювати між собою всі можливі пари розв'язків, і тому максимальне число порівнянь рівне $n_1(n_1 - 1)/2$.

Далі розглянемо деякі властивості множини розв'язків. Як уже було зазначено, після відображенні комбінаторної множини P_{nk} в евклідів простір R^n розглядається задача $Z(F, X)$ максимізації деякого векторного критерію $F(x)$ на множині X, здійснюється вибір розв'язків з даної множини: $P(F, X)$ – Парето-оптимальних (ефективних розв'язків), множини $Sl(F, X)$ оптимальних за Слейтером (слабко ефективних) розв'язків, або множини $Sm(F, X)$ оптимальних за Смейлом (строго ефективних) розв'язків. Тоді для кожного $x \in X$ справедливі твердження вигляду (3.1)–(3.4), записані стосовно до задачі $Z(F, X)$:

$$x \in Sl(F,X) \Leftrightarrow \left\{ y \in X \mid F(y) > F(x) \right\} = \varnothing, \tag{3.5}$$

$$x \in P(F,X) \Leftrightarrow \left\{ y \in X \mid F(y) \geq F(x), F(y) \neq F(x) \right\} = \varnothing, \tag{3.6}$$

$$x \in Sm(F,X) \Leftrightarrow \left\{ y \in X \mid y \neq x, F(y) \geq F(x) \right\} = \varnothing, \tag{3.7}$$

$$Sm(F,X) \subset P(F,X) \subset Sl(F,X). \tag{3.8}$$

Оскільки допустима область X обмежена, то множина $P(F, X)$ не порожня і зовні стійка. Сформулюємо наступні теореми:

Теорема 3.2. Елементи множин $Sm(F,X)$ – строго ефективних, $P(F,X)$ – Парето-оптимальних, $Sl(F,X)$ – слабо ефективних розв'язків багатокритеріальної комбінаторної задачі виду $Z(F,X)$ на перестановках P_{nk} знаходяться у вершинах переставного многогранника $M_{nk}(A)$.

Доведення. Враховуючи співвідношення (3.8) між введеними множинами ефективних розв'язків і той факт, що множина допустимих розв'язків X є підмножиною множини перестановок P_{nk}, справедливе наступне співвідношення:

$$Sm(F,X) \subset P(F,X) \subset Sl(F,X) \subset P_{nk}(A). \tag{3.9}$$

Як уже було зазначено, відповідно до [136, 141] множина перестановок P_{nk} збігається з множиною вершин загального переставного многогранника $vert\, M_{nk}(A)$, який представлений системою обмежень:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_j \le \sum_{j=1}^{n} a_j, & (3.10) \\ \sum_{j=1}^{i} x_{\alpha_j} \ge \sum_{j=1}^{i} a_j, & (3.11) \end{cases}$$

$\alpha_j \in N_n,\ \alpha_j \ne \alpha_t,\ \forall j \ne t,\ \forall j,\ t \in N_i,\ \forall i \in N_n,\ P_{nk}(A) = vert\, M_{nk}(A)$.

Таким чином, справедливе включення:

$$Sm(F,X) \subset P(F,X) \subset Sl(F,X) \subset vert\, M_{nk}(A). \tag{3.12}$$

Теорема доведена.

Нехай функції $f_i(x), i \in N_l$, векторного критерію $F(x)$ є лінійними, тобто $f_i(x) = \langle c_i, x \rangle, i \in N_l$. Важливі властивості допустимої області X і множин різних видів ефективних розв'язків, зазначені в теоремі 3.2, а також лінійність функцій векторного критерію дозволяють звести розв'язання задачі $Z(F,X)$ до розв'язання задачі $Z(F,G)$ визначеній на неперервній допустимій множині $G = M \cap D$.

Аналіз задачі $Z(F,X)$ будемо проводити з урахуванням властивостей конуса $K = \{x \in R^n \mid Cx \ge 0\}$ перспективних напрямків

[116, 117, 128] задачі $Z(F,X)$ та опуклих замкнутих конусів $0^+M(y)=\{x\in R^n \mid \pi_i x\le 0, i\in N(y)\}$, де $N(y)=\{i\in N_q \mid \pi_i y=\gamma_i\}$, що можуть бути побудовані для всіх точок $y\in vert\,M$. Очевидно, що $N(y)\ne\varnothing$, $X\subseteq y+0^+M(y)$. Позначимо $K_0=\{x\in R^n \,|\, Cx=0\}$ – ядро відображення $C: R^n\to R^l$, $int\,K=\{x\in R^n \,|\, Cx>0\}$ – внутрішність конуса *K*. З формул (3.5)–(3.7) випливає, що $\forall x\in X$ справедливі співвідношення:

$$x\in Sl(C,X)\Leftrightarrow (x+int\,K)\cap X=\varnothing,$$

$$x\in P(C,X)\Leftrightarrow x+(K\setminus K_0)\cap X=\varnothing \tag{3.13}$$

$$x\in Sm(C,X)\Leftrightarrow (x+K)\cap X\setminus\{x\}=\varnothing.$$

Справедливі наступні теореми.

Теорема 3.3. $P(F,G)\bigcap vert\,M\subset P(F,X)$, $Sl(F,G)\bigcap vert\,M\subset Sl(F,X)$, $Sm(F,G)\bigcap vert\,M\subset Sm(F,X)$.

Доведення. Оскільки $vert\,M\bigcap D\subset G$, то

$$P(F,G)\bigcap vert\,M\bigcap D\subset P(F,G\bigcap vert\,M\bigcap D)=P(F,X).$$

Співвідношення

$$Sl(F,X)=Sl(F,vert\,M\bigcap D)\supset Sl(F,G)\bigcap vert\,M\bigcap D,$$

$Sm(F,X)=Sm(F,D\bigcap vert\,M)\supset Sm(F,G)\bigcap vert\,M$ доводяться аналогічно.

Теорема 3.4. Якщо допустима множина *X* задачі $Z(F,X)$ не містить обмежень, що описують опуклу многогранну множину *D*, або $M\subseteq D$, тобто $X=vert\,M$, то $\forall x\in R^n$ справедливі твердження: $x\in Sl(F,X)\Leftrightarrow x\in Sl(F,M)\bigcap vert\,M$, $x\in P(F,X)\Leftrightarrow x\in P(F,M)\bigcap vert\,M$, $x\in Sm(F,X)\Leftrightarrow x\in Sm(F,M)\bigcap vert\,M$.

Доведення. З теореми 3.3, з огляду на умову даної теореми, випливає, що $\forall\, x\in R^n$ справедливі висловлення: $x\in Sl(F,M)\bigcap vert\,M\Rightarrow x\in Sl(F,X)$, $x\in P(F,M)\bigcap vert\,M\Rightarrow x\in P(F,X)$, $x\in Sm(F,M)\bigcap vert\,M\Rightarrow x\in Sm(F,X)$.

Доведемо зворотні імплікації. Нехай $x \in Sl(F,X)$, звідки за теоремою 3.2 випливає, що $x \in vert\,M$. Припустимо, від супротивного, що $x \notin Sl(F,П)$. З огляду на лінійність функцій $f_i(x), i \in N_l$, векторного критерію $F(x)$ за теоремою 1 [116, 117] виконується умова $int\,K \bigcap (П(x) - x) \neq \varnothing$, тобто в конусі $(x + int\,K)$ лежать деякі точки границі многогранника *M*, отже існує точка $x^1 \in vert\,M$, що належить цьому конусу. Останнє в силу формули (3.5) означає, що $x \notin Sl(F,X)$ і приводить до протиріччя з умовою теореми. Інші твердження даної теореми доводяться аналогічно цьому. Доведення завершено.

Якщо допустима область *X* задачі $Z(F,X)$ містить додаткові обмеження, тобто $X = vert\,M \bigcap D$ і $M \bigcap D \neq M$, то справедливі лише достатні умови оптимальності розв'язків.

Теорема 3.5. $\forall x \in vert\,M : x \in P(F,M) \bigcap D \Rightarrow x \in P(F,X)$,
$x \in Sl(F,M) \bigcap D \Rightarrow x \in Sl(F,X)$, $x \in Sm(F,M) \bigcap D \Rightarrow x \in Sm(F,X)$.

Доведення. Оскільки $G = M \bigcap D$, то справедливі імплікації $\forall x \in vert\,M : x \in P(F,M) \bigcap D \Rightarrow x \in P(F,M \bigcap D) = P(F,G) \Rightarrow x \in P(F,X)$
$x \in Sl(F,M) \bigcap D \Rightarrow x \in Sl(F,X)$, $x \in Sm(F,M) \bigcap D \Rightarrow x \in Sm(F,X)$.

Таким чином, теореми 3.2–3.5 встановлюють взаємозв'язок між задачею $Z(F,X)$ і задачею $Z(F,G)$, визначеної на неперервній допустимій множині. Це дає можливість застосовувати класичні методи неперервної оптимізації до розв'язування векторних комбінаторних задач на перестановках, розміщеннях та інших комбінаторних множинах і на цій основі розвивати нові оригінальні методи розв'язання, використовуючи властивості комбінаторних множин і їх опуклих оболонок.

При встановленні різних видів ефективності розв'язків, якщо виконуються необхідні умови оптимальності розглянутого розв'язку, то гарантувати його ефективність не можна, однак, якщо ці умови не виконуються, то даний розв'язок не ефективний. Якщо використовуються достатні умови, то розв'язок, що їх задовольняє, ефективний, у протилежному випадку питання про ефективність розв'язків залишається відкритим. Якщо ж застосовуються необхідні і достатні умови, то питання вирішується однозначно: розв'язок ефективний тоді і тільки тоді, коли він задовольняє цим умовам.

Наряду з множиною різних видів оптимальності розв'язків є доцільним розглянути поняття оптимальних оцінок багатокритеріальних комбінаторних задач, які відіграють важливу роль у теорії багатокритеріальної оптимізації.

Отже, одним із основних понять Парето-оптимального розв’язку багатокритеріальних задач є поняття оцінки. Тобто, у багатокритеріальній задачі кожний розв’язок $x \in X$ повністю характеризуються своєю оцінкою $y = (y_1, ..., y_l)$, де $y_i = f_i(x)$, $i \in N_l$. Тому вибір оптимального розв’язку зводиться до вибору оптимальної оцінки з множиною Y всіх досяжних оцінок.

Множина оцінок для комбінаторної евклідової багатокритеріальної задачі оптимізації $Z(F,X)$ визначається таким чином:

$$Y = F(X) = \left\{ y \in R \middle| y = F(x), x \in E \right\}.$$

Отже, вибір розв’язку з евклідової комбінаторної множини *E* рівносильний вибору відповідної оцінки з *Y*. Розглянемо властивості Парето-оптимальних оцінок.

Так як множина Парето-оптимальних розв’язків у багатокритеріальних комбінаторних задача позначена $P(F,X)$, тоді множину Парето-оптимальних оцінок позначимо $P_y(F,X)$.

У багатокритеріальних задачах порівнюються по перевазі векторні оцінки, тобто значення векторного критерію $F(f(x)) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_l(x))$.

Наряду з множиною Парето-оптимальних розв’язків комбінаторної багатокритеріальної задачі доцільно розглядається множина парето-оптимальних векторів в наступних роботах [76, 77, 108].

Означення 3.2. Вектор $f(x^*)$ для парето-оптимального розв’язку x^* називають парето-оптимальним вектором розв’язку або парето-оптимальною оцінкою, а множина всіх таких векторів – множиною парето-оптимальних векторів або оцінок.

Позначимо

$$P(Y) = f\left(P_f(F,X)\right) = \left\{ f(x^*) \in Y \mid \text{ при деякому } x^* \in P_f(F,X) \right\},$$

де *Y* означає множина можливих векторів, тобто $Y = f(x)$.

Природно, що найбільш просто порівнювати по перевазі ті векторні оцінки, які відрізняються один від одного лише однією компонентою [76, 77, 108]. Тому інформація про переваги зміни значення одного приватного критерію при фіксованих значеннях всіх інших критеріїв є найбільш доступна і достовірна, і саме її доцільно визначати в першу чергу й використати для аналізу задачі, але такі ситуації бувають рідко, тому є необхідним більш глибоко досліджувати структуру області допустимих розв'язків.

Для подальшого розгляду поняття Парето-оптимального розв'язку й оцінки комбінаторних багатокритеріальних задач оптимізації сформулюємо:

Твердження 3.1. Максимум лінійної функції однокритеріальної комбінаторної задачі:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{k} c_j x_j \ , \tag{3.14}$$

де $c_{\alpha_1} \geq ...c_{\alpha_s} \geq 0 > c_{\alpha_{s+1}} \geq ... \geq c_{\alpha_k}$, $s \in N_k$, $\alpha \in N_k$, на евклідовій комбінаторній множині E (перестановок, розміщень) досягається в точці $x^* = \left(x_1^*,...,x_k^*\right) \in E$, що задовольняє умовам:

$$x^*_{\alpha_i} = a_i \forall i \in N_s \, ; \; x^*_{\alpha_{s+i}} = a_{\eta-r+i} \forall i \in N_r \, , \tag{3.15}$$

якщо елементи мультимножини A впорядковані в такий спосіб:

$$a_{i_1} \geq a_{i_2} \geq \ldots \geq a_{i_k} \ , \tag{3.16}$$

де r, s-константи, що задовольняють умовам $r + s = k$, $r, s \in N_k$.

Позначимо x^0 – оптимальний розв'язок, то $f\left(x^0\right) = y^0$ – оптимальна оцінка даного розв'язку, тоді $F\left(f\left(x\right)\right) = \left(f_1\left(x\right), f_2\left(x\right),..., f_l\left(x\right)\right)$ можна записати таким способом $F\left(y\right) = \left(y_1, y_2,..., y_l\right)$.

Означення 3.3. Функція $F\left(y\right) = \left(y_1, y_2,..., y_l\right)$, що визначена на множині оцінок $Y \subset R^m$, є зростаючою по відношенню $\geq$, якщо з виконання нерівності $y \geq y'$ для векторів $y, y' \in Y$, завжди виконується нерівність $F\left(y\right) \geq F\left(y'\right)$.

Це означення являє собою узагальнене поняття зростаючої функції однієї змінної на випадок функції багатьох змінних.

Теорема 3.6. Якщо функція $F\left(y\right)$ зростає по відношенню $\geq$ і x^0 – точка максимуму функції $F\left(f\left(x\right)\right) = F\left(f_1\left(x\right), f_2\left(x\right), \ldots, f_l\left(x\right)\right)$ на евклідовій комбінаторній множині E, то $f\left(x^0\right) \in P_y\left(F, X\right)$, що означає $x^0 \in P\left(F, X\right)$.

Доведення. Якщо x^0 – точка максимуму функції $F\left(f\left(x\right)\right)=F\left(f_1\left(x\right),f_2\left(x\right),\ldots,f_l\left(x\right)\right)$, то відповідно до означення Парето-оптимального розв'язку [77, 108], вона належить множині Парето-оптимальних розв'язків, а по означенню Парето-оптимальних оцінок виконується наступне співвідношення $f\left(x^0\right)\in P_y\left(F,X\right)$.

Теорема 3.6 сформульована в термінах розв'язків. Але її можна переформулювати у термінах оцінок.

Теорема 3.7. Нехай функція $F\left(y\right)$ визначена на множині оцінок $Y\subset R^m$. Для того, щоб точка $y^0\in Y$ була Парето-оптимальною оцінкою, тобто $y^0\in P_y\left(F,X\right)$ для комбінаторної багатокритеріальної задачі оптимізації $Z\left(F,X\right)$, достатньо, щоб вона була точкою максимуму на множині *Y* функції $F\left(y\right)$, що зростає по відношенню $\geq$.

Доведення. Доведення випливає з теореми 3.6. Нехай, за умовою $y^0\in Y$ і $F\left(y^0\right)\geq F\left(y\right)$ для всіх $y\in Y$. Припустимо обернене: що для деякої оцінки $y'\in Y$ виконується нерівність $y'\geq y^0$. Звідси, оскільки функція F зростаюча, одержуємо нерівність $F\left(y'\right)>F\left(y^0\right)$, що суперечить попередній. У свою чергу, якщо максимум досягався в точці, що належить вершині многогранника, тобто $x^0\in M$, то вона є Парето-оптимальним розв'язком задачі $Z\left(F,X\right)$, згідно теореми 3.6 і співвідношення $f\left(x^0\right)=y^0$, тоді точка $y^0\in P_y\left(F,X\right)$. Теорема доведена.

У багатокритеріальній оптимізації широко використовується метод лінійної згортки для знаходження Парето-оптимальних розв'язків. Цей метод можна використати й для знаходження розв'язків евклідових комбінаторних багатокритеріальних задач. З огляду на специфіку області допустимих розв'язків комбінаторної задачі, слід зазначити, що функція $F\left(x\right)=\left(f_1\left(x\right),...,f_l\left(x\right)\right)=\sum_{i=1}^{l}\mu_i f\left(x_i\right)$ є зростаючою по відношенню $\geq$ на евклідовій комбінаторній множині *E*, якщо всі числа $\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n$ додатні. Отже, максимізація функції $\sum_{i=1}^{l}\mu_i f_i\left(x\right)$ на евклідовій комбінаторній множині *E* (розміщень, перестановок) приводить до знаходження Парето-оптимального розв'язків.

Теорема 3.8. Розв'язок $x^0 \in S$ комбінаторної багатокритеріальної задачі $Z(F,S)$ є Парето-оптимальним, якщо існують числа $\mu_i \geq 0, i \in N_l$, $\sum_{i=1}^{l} \mu_i = 1$ такі, що максимізують лінійну згортку

$$\sum_{i=1}^{l} \mu_i f_i\left(x^0\right) = \max_{x \in S} \quad \sum_{i=1}^{l} \mu_i f_i(x)$$

критеріїв $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_l(x)$ на евклідовій комбінаторній множині *E*.

Доведення. Множина допустимих розв'язання *X* задачі багатокритеріальної комбінаторної оптимізації $Z(F,X)$ є скінченою і обмеженою, тому що $X = vertM(A) \cap D$. Тоді, відповідно до твердження, існує розв'язок $x^0 \in X$ задачі $Z(F,X)$, який є оптимальним, а відповідно Парето-оптимальним для комбінаторної багатокритеріальної задачі. Теорема доведена.

Теорема 3.8 показує, що при деяких припущеннях, підбираючи коефіцієнти $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_l$, будь-який Парето-оптимальний розв'язок можна одержати в результаті розв'язків відповідної однокритеріальної задачі максимізації. Аналогічний висновок справедливий і для оцінок.

Твердження 3.2. Якщо компоненти вектор-функції $F(x) = \left(f_1(x), \ldots, f_l(x)\right)$ неперервні на евклідовій комбінаторній множині *E* (розміщень, перестановок), то $P(F,S) \neq \varnothing$.

Справедливість даного твердження очевидно.

Твердження 3.3. Для комбінаторної багатокритеріальної задачі $Z(F,X)$ існує хоча б один Парето-оптимальний розв'язок й, відповідно, хоча б один Парето-оптимальний вектор, тобто $P(F,X) \neq \varnothing$, $P_y(F,X) \neq \varnothing$.

З вище сформульованих теорем і тверджень випливає наступний спосіб відшукання одного з множини Парето-оптимальних розв'язків: знайти точку, що реалізує максимальне значення функції $\sum_{i=1}^{l} f_i(x)$ на множині допустимих розв'язання *X*.

Твердження 3.4. Мінімум лінійної функції однокритеріальної комбінаторної задачі:

$$f\left(x\right)=\sum_{j=1}^{k}c_j x_j \ ,$$

де $c_{\alpha_1} \geq ...c_{\alpha_s} \geq 0 > c_{\alpha_{s+1}} \geq ... \geq c_{\alpha_k}$, $s \in N_k$, $\alpha \in N_k$, на евклідовій комбінаторній множині E (розміщень, перестановок) досягається в точці $x^* = \left(x_1^*,...,x_k^*\right) \in E$, що задовольняє умовам:

$$x_{\alpha_i}^* = a_i \forall i \in N_s \, ; \; x_{\alpha_{s+i}}^* = a_{\eta - r + i} \forall i \in N_r \, ,$$

якщо елементи мультимножини A впорядковані таким способом:

$$a_{i_1} \leq a_{i_2} \leq \ldots \leq a_{i_k} \, ,$$

де r, s-константи, що задовольняють умовам $r+s=k$, $r,s \in N_k$.

Враховуючи вище сказане, можна визначити умови знаходження розв’язку багатокритеріальної задачі $Z\left(F,X\right)$ без додаткових обмежень. Таку багатокритеріальну задачу назвемо багатокритеріальною безумовною задачею з лінійними критеріями на комбінаторній множині. Тоді можна сформулювати наступне твердження.

Твердження 3.5. Якщо P_i – множина перестановок $\alpha^i = \left(\alpha_1^i,...,\alpha_k^i\right)$ елементів множини перших натуральних чисел, що задовольняють умові:

$$c_{\alpha_1^i}^i \geq c_{\alpha_2^i}^i \geq ... \geq c_{\alpha_s^i}^i \geq 0 > c_{\alpha_{s+1}^i}^i \geq ... \geq c_{\alpha_k^i}^i \, ,$$

то множина абсолютних розв’язків задачі $Z\left(F,X\right)$ не порожня, якщо не порожня множина, що є перетином множини розв’язків, знайдених для всіх критеріїв даної задачі:

$$\bigcap_{i=1}^{l} R_i = R \neq \varnothing \, .$$

Розглянуте вище твердження не дає відповіді на питання: які розв’язки знайдені – ефективні, слабо ефективні або строго ефективні.

Оскільки одним з основних понять багатокритеріальних задач, як було зазначено вище, є поняття Парето-оптимального розв’язку. Для комбінаторних багатокритеріальних задач воно представляє узагальнене поняття точки максимуму числової функції на комбінаторному многограннику M, тобто розв’язок Парето-оптимальний, якщо значення будь-якого з критеріїв можна поліпшити лише за рахунок погіршення значень решти критеріїв.

Як було зазначено, властивостям і методам відшукання Парето-оптимальних розв'язків присвячено достатньо багато літератури, але для вище сформульованої задачі комбінаторної оптимізації $Z(F,X)$ необхідно врахувати специфіку і комбінаторні властивості області допустимих розв'язків.

Твердження 3.6. Оптимальні розв'язки багатокритеріальних комбінаторних задач на комбінаторних множинах знаходяться у вершинах многогранників, де для множини перестановок $P_{nk} = vert\, M_{nk}(A)$, а для множини розміщень $A_{qk}^{n} = vert\, M_{qk}^{n}(A)$ і визначають Парето-оптимальну множину.

Доведення. Якщо розглядати багатокритеріальну комбінаторну задачу $Z(F,X)$ без додаткових обмежень, то згідно твердження 3.5 оптимальний розв'язок – це точки комбінаторної множини. Як відомо $vertM_{qk}^{n}(A) = A_{qk}^{n}$, а $vert\, M_{nk}(A) = P_{nk}$, то при накладенні додаткових умов *D*, ефективні розв'язки також будуть у вершинах, оскільки умови, які утворюють многогранну множину *D* тільки звужують область, яка описує область допустимих розв'язків $X = vert\, M \cap D$. Зрозуміло, що випадок $X = \varnothing$ не розглядається.

Теорема доведена.

Завдяки наявності вказаного вище прямого зв'язку між множиною ефективних розв'язків і Парето-оптимальних векторів та описаних вище властивостей можна застосувати алгоритм знаходження множини Парето-оптимальних векторів для задачі комбінаторної оптимізації $Z(F,X)$, аналогічний [108].

Алгоритм

Крок 1. Для всіх можливих точок $x = (x_1,...,x_n) \in E$, де E – евклідова комбінаторна множина перестановок P_{nk} чи розміщень A_{qk}^{n} визначаємо множину можливих векторів $Y = \{y^1, y^2,..., y^l\}$.

Крок 2. Утворюємо множину парето-оптимальних векторів, вибравши $P(Y) = f(P_f(X))$ ті, які співпадають з множиною розв'язків *Y*.

Крок 3. Перевіряємо виконання нерівності $y^i \geq y^j$, якщо воно виконується, то перейти до кроку 4, інакше перейти до кроку 5.

Крок 4. Видаляємо з поточної множини векторів $P(Y)$ вектор y^j, переходимо до кроку 5.

Крок 5. Перевіряємо виконання нерівності $j < i$, якщо вона виконується, то покладаємо $j = j + 1$ і повертаємося до Кроку 3. У іншому випадку необхідно перейти до кроку 8.

Крок 6. Перевіряємо справедливість нерівності $y^i \geq y^j$, якщо вона виконується, переходимо до кроку 7, інакше повертаємося до кроку 5.

Крок 7. Видаляємо з поточної множини векторів $P(Y)$ вектор y^i і переходимо до кроку 8.

Крок 8. Перевіряємо виконання нерівності $i < l - 1$, якщо воно виконується, то покладаємо $i = i + 1$, а потім $j = i + 1$. Після цього необхідно повернутися до кроку 3, інакше розрахунки закінчуються. Множина парето-оптимальних векторів побудована повністю.

Суть алгоритму полягає у тому, що шукана множина парето-оптимальних векторів утворюється послідовним видаленням завчасно відомих неоптимальних векторів.

Алгоритм ускладнюється, якщо область можливих розв'язків визначається не тільки комбінаторними умовами, які описують комбінаторний многогранник деякої евклідової комбінаторної множини, а накладаються ще додаткові обмеження.

Досліджені розв'язки комбінаторної багатокритерійної задачі, їх властивості та підхід до знаходження ефективних оцінок дають можливість розробити загальний підхід до розв'язання багатокритеріальних задач на комбінаторних множинах. Далі розглянемо розв'язування багатокритеріальної задачі на комбінаторній множині перестановок.

3.3. Дослідження та розв'язання багатокритеріальної задачі оптимізації на комбінаторній множині перестановок

Дослідимо задачу $Z(F,X)$ багатокритеріальної комбінаторної оптимізації при умові $X = vertM(A) \cap D$. Якщо задача $Z(F,X)$ не містить лінійних обмежень, що утворюють опуклу многогранну множину $D \subset R^n$, або $M \subseteq D$, тобто $X = vert\,M$, то, використовуючи необхідні і достатні умови оптимальності процес її розв'язання зводиться до пошуку ефективних розв'язків задачі $Z(F,G)$ на неперервній допустимій множині $G = M$ з наступним вибором з них лише тих, які є вершинами многогранника *M*.

Аналізуючи теореми 3.3 і 3.5, приходимо до співвідношень, що існують між задачами $Z(F,X)$ і $Z(F,G)$:

а) якщо $x \in R(F,G) \bigcap vertM$, то $x \in R(F,X)$;

б) якщо ж $x \notin R(F,G) \bigcap vertM$, то з цього не випливає, що $x \notin R(F,X)$, де $R(F,X)$ визначає множину $P(F,X)$, $Sm(F,X)$ або $Sl(F,X)$.

Якщо задача $Z(F,X)$ містить додаткові лінійні обмеження, то пропонується наступний підхід до її розв'язування:

1. Знаходимо ефективні розв'язки задачі $Z(F,M)$.

2. Перевіряємо їх належність множині D. Якщо $x \in P(F,M) \bigcap D$, то звідси випливає, що $x \in P(F,X)$.

3. Розглядаємо допустимі розв'язки $x \in X$ задачі $Z(F,X)$, які є неефективними в задачі $Z(F,G)$, тобто $x \in X \setminus P(F,G) \bigcap D$ і перевіряємо їх на ефективність. Для цього скористаємося необхідними і достатніми умовами, сформульованими в [108, 117].

Твердження 3.7. Допустимий розв'язок x^0 ефективний тоді і тільки тоді, коли він є оптимальним розв'язком наступної задачі:

$$Z^1(F,X): max\left\{\sum_{i=1}^{m} f_i(x) \,|\, x \in X,\ f_i(x) \geq f_i(x^0), i \in N_m\right\}.$$

Якщо розв'язок x^0 неефективний, то в результаті розв'язання цієї задачі знаходимо ефективний розв'язок x^*, який більше переважає, ніж x^0, тобто $F(x^*) \geq F(x^0)$.

Продовжуючи дослідження і розвиваючи результати робіт [107–109, 116–118, 128], запропонований підхід до розв'язання задачі $Z(F,X)$, оснований на лінійній згортці (агрегації) часткових критеріїв задачі і подальшому зведенні пошуку розв'язку початкової задачі до розв'язку серії скалярних (однокритеріальних) задач, перевірки оптимальності отриманих розв'язків. Методи розв'язків однокритеріальних задач основані на ідеях декомпозиції, відтинаючих площин Келлі, релаксації. Далі розглядається метод, при реалізації якого враховується той факт, що число обмежень досить велике. Тоді доцільним є використання процедури релаксації, тобто тимчасового відкидання деяких обмежень і розв'язання задачі на більш широкій області, тобто за обмеженнями, що залишилися.

Для побудови алгоритму, насамперед, на початковому етапі необхідно визначити початкову точку. Розглянемо однокритеріальну задачу без додаткових обмежень, тобто без обмежень, що описують многогранник *D*.

Твердження 3.8. Якщо для елементів мультимножини *A* і коефіцієнтів цільової функції задачі $extr\left\{ f\left(x\right) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \mid x \in vert\, M_{nk} \right\}$ виконуються відповідно умови:

$$a_1 \ge a_2 \ge \ldots \ge a_n \text{ і } c_1 \ge c_2 \ge \ldots \ge c_n, \tag{3.17}$$

то максимум функції $f\left(x\right)$ на допустимій множині перестановок досягається в точці $x^* = \left(x_1^*,...,x_n^*\right) \in vert\, M_{nk}\left(A\right)$, що задається наступним чином:

$$x_i^* = a_i \ \forall i \in N_n, \tag{3.18}$$

а мінімум відповідно в точці $y = \left(y_1, y_2, ..., y_n\right)$, де:

$$y_{i+1} = a_{n-i} \ \forall i \in N_{n-1} \bigcup \left\{0\right\}.$$

Слід зазначити, що згідно [136, 141], число *q* лінійних нерівностей, що входять у систему (3.10), (3.11), яка описує переставний многогранник M_{nk}, дорівнює 2^n. Сукупність нерівностей системи (3.10), (3.11), що мають однакове значення *i* верхньої межі суми, будемо називати *i*-групою нерівностей цієї системи. Зокрема, у кожну групу *i* входить C_n^i нерівностей. Звідси загальне число нерівностей дорівнює $\sum_{i=0}^{n} C_n^i = 2^n.$ Оскільки з *n* координат a_j, $j \in N_n$, тільки *k* різні, то із системи нерівностей (3.10), (3.11) можна виключити деякі нерівності. З огляду на виконання умови повторення деяких елементів мультимножини, для кожного $j \in N_{m-1}, m \le n,$ має місце умова $a_j = a_{j+1}$. У цьому випадку при виконанні нерівностей першої групи в системі (3.10), (3.11) будуть також справедливі нерівності 2, 3, …, i_n груп. Дійсно, оскільки $x_j \ge a_1, j \in N_n$, то для кожного $i \in N_m$ виконується умова $\sum_{j=1}^{i} x_{\alpha_j} \ge i a_1$. Отже, із системи (3.10), (3.11) можна виключити нерівності груп 2, 3,…,*m* і загальне число нерівностей буде дорівнює $N = 1 + n + \sum_{j=m+1}^{n} C_n^j$. Якщо набір значень мультимножини *A* має властивість $a_j = a_{j+1} \ \forall \ j \in N_{n-1} \setminus N_{n-m}$, тоді в системі (3.10), (3.11) досить залишити тільки нерівності груп 1,2, …, $n-i-1, n-1...$

Важливо правильно організувати на першому етапі розв'язання задачі вибір активних обмежень – нерівностей. Для розв'язання задачі $Z(F,X)$ з урахуванням (3.10), (3.11) необхідно взяти на початковому етапі лише частину обмежень, що визначають область *X*. Тому що одержання оптимального розв'язку задачі $Z(F,X)$ є більш важливим, ніж побудова всієї множини розв'язків, отже досить включити тільки ті обмеження множини *X*, що визначають область X' і дають оптимальний розв'язок цієї задачі. Але при цьому варто врахувати, що точка, яка отримана при розв'язанні задачі з обмеженнями області X', не завжди може бути перестановкою.

Введемо наступні позначення. Допустиму область задачі $Z(F,G)$ запишемо в вигляді $G = \left\{ x \in R^n \mid Hx \le g \right\}$, $g = \left(g_1, g_2, ..., g_q \right)$, $H \in R^{q \times n}$, *H*-матриця, яка використовується для матрично-векторної форми запису обмежень виду (3.10), (3.11) і лінійних нерівностей, що описують многогранник *D*, де всі обмеження зведені до одного ($\le$) виду нерівностей. Позначимо N_q множину, елементи якої визначають номера обмежень системи (3.10), (3.11) і додаткових обмежень, що описують опуклу многогранну множину *D*: $N_q = \left\{ 1,2,...,2^n + m \right\}$.

Позначимо множину $G_i = \left\{ x \in R^n \middle| \langle h_i, x \rangle \le g_i \right\}, i \in N_q$; для довільного $x^s \in R^n$ визначимо множину $N^a\left(x^s\right) = \left\{ i \in N_q \middle| \langle h_i, x^s \rangle = g_i \right\}$ і $N^n\left(x^s\right) = \left\{ j \in N_q \middle| \langle h_j, x^s \rangle < g_j \right\}$ – відповідно активні і неактивні обмеження в точці x^s; $h_i \in R^n, g_i \in R,\ i \in N_q$ – відповідно *i*-ий вектор-рядок матриці *H* *i*-я компонента вектора g.

Введемо в розгляд задачу $Z\left(F,G^s\right): max\left\{ F(x) \mid x \in G^s \right\}$, де $G^s = \left\{ x \in R^n \middle| \langle h_i, x \rangle \le g_i, i \in Q_s \subset N_q \right\}$, Q_s – множина індексів обмежень, що описують допустиму область задачі $Z\left(F,G^s\right)$, яка розв'язується на *s*-му кроці алгоритму, $Q_s = N_q \setminus R_s$, R_s-множина номерів обмежень, які не були включені в цю задачу на *s*-му кроці.

Означення 3.4. Величина $r_i(x) = \langle h_i, x \rangle - g_i$, $i \in N_q$, називається відхиленням точки $x \in R^n$ від границі множини G_i, а величина $r(x) = max\{r_i(x) \mid i \in N_q\}$ називається відхиленням точки $x \in R^n$ від границі множини G.

Очевидно, що для $i \in N_p$:

$$r_i(x) = \sum_{j=1}^{i} x_{\alpha_j} - \sum_{j=1}^{i} a_j, \tag{3.19}$$

а для $i \in N_q \setminus N_p$, маємо:

$$r_i(x) = \langle b_i, x \rangle - d_i, \tag{3.20}$$

де b_i – i-ий вектор-рядок матриці B, $d_i \in R$.

Теорема 3.8. Ефективний (Парето-оптимальний, слабо, строго ефективний) розв'язок x_0 задачі $Z(F, G^s)$ є ефективним в тому ж розумінні розв'язком задачі $Z(F, G)$ тоді і тільки тоді, коли виконується умова $r(x) \le 0$.

Доведення. Необхідність цього твердження очевидна, оскільки допустимий розв'язок x_0 задачі $Z(F, G^s)$ є допустимим розв'язком задачі $Z(F, G)$ тоді і тільки тоді, коли виконується умова $r(x) \le 0$. Достатність твердження випливає з побудови задачі $Z(F, G)$ і означення $r(x)$.

Основна ідея методу розв'язання полягає в наступному:

1) зводимо багатокритеріальну задачу $Z(F, X)$ до однокритеріальної $Z'(F', X)$ методом лінійної згортки;

2) вибираємо обмеження початкової системи, що визначають область $X^0 \subset X$, розв'язуємо задачу $Z'(F', X^0)$ за допомогою симплекс-методу і знаходимо оптимальну точку;

3) перевіряємо обмеження, що не були враховані. Якщо додаткові обмеження не виконуються, то будуємо відсікання по суміжних вершинах, що відтинає вершину, яка не є допустимою. Додаємо це обмеження до обмежень нашої релаксованої задачі.

4) розв’язуємо задачу далі симплексом-методом з цими обмеженнями. Якщо одержали оптимальний розв’язок, що є перестановкою, тобто вершиною переставного многогранника, то перевіряємо додаткові обмеження. Якщо не задовольняє тим, що залишилися обмеженням (додатковим), то варто додати найбільш порушене обмеження.

5) будуємо суміжні вершини (перестановки) переставного многогранника, перевіряємо, чи задовольняють вони новим обмеженням. Якщо задовольняють обмеженням, що залишилися не включеними, то знаходимо значення цільової функції в цій точці $f\left(x^l\right)$. Додаємо до наших обмежень обмеження $f\left(x\right) \geq f\left(x^l\right)$.

6) якщо $f\left(x^R\right)$ зменшується, то відкидаємо неактивні (несуттєві) обмеження в точці x^R.

Та обставина, що жодне з обмежень не відкидалося, якщо $f\left(x^R\right) = \overline{f}$, гарантує, що порівнюється тільки скінчене число задач Z^l.

Загальна ідея запропонованого методу полягає в послідовному включенні обмежень задачі, що описують область допустимих розв’язків. Реалізація методу у вигляді алгоритму описана нижче.

Для перевірки належності точки множини перестановок $P_{nk}\left(A\right)$, доцільно скористатися наступними теоремами.

Теорема 3.9 [136, 141]. Якщо $x = \left(x_{1,} x_2 ..., x_n\right)$ – точка, координати якої упорядковані таким способом $x_{\alpha_j} \leq x_{\alpha_{j+1}}$ $\forall j \in N_{n-1}$ і виконується обмеження:

$$x_{\alpha_1} + x_{\alpha_2} + ... + x_{\alpha_i} \geq a_1 + a_2 + ... + a_i \,,$$

що належать групі нерівностей *і*-ої системи (3.10)–(.311), то виконуються в цій же точці і всі інші нерівності *і*-ої групи цієї системи.

Вище сформульована теорема та теорема 2.2 дають можливість при реалізації алгоритму для розв’язання задачі $Z\left(F, X\right)$ мінімізувати витрати часу на перевірку належності знайденої точки комбінаторним обмеженням і зменшити кількість обмежень у вихідній системі.

Запропонований алгоритм складається з двох частин і дає можливість розв’язати задачу $Z\left(F, X\right)$ без врахування всіх обмежень, що визначає допустиму область розв’язків у частині 1, а також тих обмежень, що визначають допустиму область у частині 2.

Оскільки $q=2^n$ – кількість обмежень у системі, то позначимо N_q – множина всіх елементів, що визначають номер обмежень системи (3.10), (3.11) і додаткових обмежень, де $N_q=\{1,2,...,2^n+1+m\}$. Тоді Q_l – множина індексів обмежень, що включені на даному кроці алгоритму, де $Q_l = N_q \setminus R_l$, де R_l – множина номерів обмежень, що не були включені.

Означення 3.5. Величина:

$$r_i(x)=\sum_{j=1}^{i} x_{\alpha_j} - \sum_{j=1}^{i} a_j, i \in N_q \tag{3.21}$$

називається відхиленням точки $x \in R^n$ від границі множини X_i, що описується системою нерівностей групи *i*, а величина $r(x)=max\{r_i(x) \mid i \in N_q\}$ відхиленням точки $x \in R^n$ від границі множини *X*.

Введемо наступні позначення. Допустиму область задачі $Z(F,G)$ запишемо в наступному вигляді: $G=\{x \in R^n \mid Hx \le b\}$, де $H \in R^{p\times n}, p=2^n+m+1,$ *H*-матриця, що використовується для матрично-векторної форми запису обмежень виду (3.10), (3.11), де всі обмеження зведені до одного ($\le$) виду нерівностей. $N^a=\{i \in N_q \mid d^i x^l = b^i\}$, $N^n=\{i \in N_q \mid d^i x^l < b^i\}$ – відповідно множини номерів активних і неактивних обмежень у точці x^l.

Перейдемо до викладу алгоритму розв'язання.

Алгоритм розв'язання багатокритеріальної комбінаторної задачі на перестановках

Початковий крок

Покладемо $s=0$. Зведемо багатокритеріальну комбінаторну задачу $Z(F,G)$ до однокритеріальної за допомогою лінійної згортки: задаємо вагові додатні коефіцієнти $\lambda_j, j \in N_l$, які визначають ступінь важливості кожного критерію, і максимізуємо лінійну комбінацію цільових функцій, тобто розв'язуємо задачу:

$$Z(f,G^s), \text{ де } f(x)=\sum_{i=1}^{l}\lambda_i\langle c_i,x\rangle,\ \lambda_i \ge 0,\ i \in N_l,\ \sum_{i=1}^{l}\lambda_i=1,\ G^s=R^n.$$

У випадку, якщо який-небудь з коефіцієнтів $\lambda_i = 1$ а всі інші, $\lambda_j = 0$, $i \neq j$, $i, j \in N_l$, то розглядається однокритеріальна задача з *i*-ю цільовою функцією.

Основна частина

1. Вибираємо початкову точку x^s довільним чином, як елемент загальної множини перестановок, або згідно твердженню 3.8, упорядкувавши коефіцієнти $\lambda_i \cdot c_i, i \in N_l$, цільової функції, $f(x) = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i \langle c_i, x \rangle$ обчислюємо значення $\overline{f} = f(x^s)$.

2. Визначимо обмеження в точці x^s, що відповідають і описують вершину загального переставного многогранника, $M_{nk}(A)$ де $x^s \in M_{nk}^s(A)$, $M_{nk}^s(A) \supset M_{nk}(A)$. Вважаємо $Q_s = N_p$.

3. Знаходимо відхилення $r_i(x^s)$ $\forall i \in R_s = N_q \setminus Q_s$ по формулах (3.19), (3.20).

4. Вибираємо, $r(x^s) = max\{r_i(x^s) | i \in R_s\}$ і номер, $i \in R_s$ при якому відхилення досягається.

5. Перевіряємо нерівності $r(x^s) \leq 0$. Якщо $r(x^s) > 0$, то переходимо до наступного пункту алгоритму, інакше – знаходимо ефективний розв’язок задачі $Z(F, X)$. Для знаходження наступного ефективного розв’язку переходимо на початковий крок алгоритму, задавши інші вагові коефіцієнти λ_j, $\lambda_j \geq 0$, $j \in N_l$, $\sum_{j=1}^{l} \lambda_i = 1$.

6. Додаємо одержане обмеження з номером $i \in R_s$ до обмежень задачі $Z(f, G^s)$, тобто формуємо допустиму множину підзадачі $Z(f, G^s)$ таким чином:

$$G^{s+1} = G^s \cap \left\{ x \in R^n \,\middle|\, \langle h_i, x \rangle \leq g_i \right\}. \qquad (3.22)$$

7. Якщо

$$f(x^s) < \overline{f},$$

то визначаємо множину $N^n\left(x^s\right) \subset Q_s$ і замінюємо множину Q_s на $Q_s = Q_s \setminus N^n\left(x^s\right)$, вважаємо $\overline{f} = f\left(x^s\right), s = s+1$.

8. Розв'язуємо задачу

$$Z\left(f, G^s\right): max\left\{ f\left(x\right) = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i \left\langle c_i, x\right\rangle \left| x \in G^s \right. \right\}$$

двоїстим симплекс-методом. Якщо ця задача не має розв'язку, то є нерозв'язна і задача $Z\left(F, G\right)$. Інакше одержуємо оптимальний розв'язок x^s цієї задачі. Якщо він не є елементом загальної множини перестановок $P_{nk}\left(A\right)$, то переходимо до п. 9. Інакше, вважаючи $Q_s = N_p$, переходимо до п. 3 алгоритму.

9. Знаходимо суміжні з точкою x^s вершини переставного многогранника і будуємо відсікання, що проходить через ці вершини, виду

$$\left\langle h_i, x\right\rangle \le g_i, \tag{3.23}$$

якому не задовольняє одержана точка x^s. Формуємо систему обмежень, що описує множину G^s, по формулі (3.22) розв'язуємо сформовану нову задачу і переходимо до п. 9.

Зауваження. Розглянемо, як знаходиться суміжна вершина.

Відповідно до теорії лінійного програмування [1, 3, 45–47], на підставі симплекса-таблиці, що визначає деяку вершину x^0 многогранника розв'язків, для одержання суміжної з нею вершини необхідно взяти небазисну змінну x_j в задачі лінійного програмування, вектор P_j якої має хоча б одну додатню компоненту, вибрати *t*-й рядок симплекс-таблиці з умови:

$$\frac{b_t}{\alpha_{tj}} = \min_{i:\alpha_{ij}>0} \frac{b_i}{\alpha_{ij}} = \Theta_j, \tag{3.24}$$

де α_{ij} – коефіцієнти при невідомих x_j у рядку i, b_i – вільний член у відповідних обмеженнях задачі лінійного програмування $Z\left(F, G\right)$ [47]. Далі потрібно ввести в базис P_j замість P_t, одержавши симплекс-таблицю для деякої суміжної з x^0 вершини.

Побудова відсікань здійснюється згідно [34, 40, 49]. Позначимо J – сукупність номерів небазисних змінних, для яких можна визначити співвідношення (3.24), а I – множина номерів базисних змінних. На основі останньої симплекса-таблиці ЗЛП, запишемо обмеження, що визначається базисною змінною (з номером i):

$$x_i + \alpha_{i,(\beta+1)} x_{j_1} + \ldots + \alpha_{i,(\beta+\gamma)} x_{j_\gamma} = b_i ,$$

де $i \in I, \beta = |I|, \gamma = |J|, I \cup J = J_{m+1}, \beta + \gamma = m+1, j_\tau \in J \; \forall \tau \in J_\gamma$.

Нехай $x^* = \left(x_1^*, \ldots, x_m^*\right)$ – оптимальний розв'язок задачі лінійного програмування $Z\left(F, G\right)$, тобто розв'язок, що відповідає останній симплекс-таблиці. Як відомо з [47]: якщо $j_\tau \left(j_\tau \in J, \forall \tau \in J_\gamma, \gamma = |J| \right)$ – номера небазисних змінних у розв'язку задачі лінійного програмування $Z\left(F, G\right)$, а величина Θ_j, обчислюється за формулі (3.24), то всі суміжні з x^* вершини допустимої області нерівність:

$$\frac{z_{j_1}}{\Theta_{j_1}} + \frac{z_{j_2}}{\Theta_{j_2}} + \ldots + \frac{z_{j_\gamma}}{\Theta_{j_\gamma}} \geq 1 , \tag{3.25}$$

задовольняють як рівність, а точка x^* нерівності (3.25) не задовольняє.

Відповідно до цієї теореми, будуємо відсікання (3.24) у вигляді (3.25).

Відмітимо, що процес побудови відсікання завершується одержанням точки, що належить множині X, чи здійснюється перехід на грань многогранника допустимої області задачі лінійного програмування з продовженням відсікання на цій грані. Якщо при відсіканні точки x^* за допомогою деякої нерівності-відсікання (3.25) у знайдених суміжним з нею вершинах ця нерівність виконується як рівність, то розв'язок, надалі, шукається на грані області, а нерівність-відсікання перетворюється в рівність і приєднується до системи обмежень вихідної задачі, і процес розв'язання задачі продовжується. Отже, при відсіканні кількість вершин області зменшується на одну і може залишитися одна вершина. Якщо вона буде належати множині X, то ця точка є розв'язком задачі $Z\left(F, X\right)$, у протилежному випадку, задача розв'язку не має.

Теорема 3.10. Робота алгоритму закінчується після розв'язання скінченного числа підзадач $Z^l\left(F,X_i^l\right)$ і приводить до оптимального розв'язку задачі $Z\left(F,X\right)$, чи до побудови такої множини обмежень, на якій поточна підзадача буде нерозв'язною.

Доведення. Оскільки X скінченна множина, то воно має скінченне число підмножин. При зменшенні $F\left(x\right)=\sum_{i=1}^{m} c_i f_i\left(x\right)$ від ітерації до ітерації жодна підмножина не може повторюватися, тому що жодне обмеження не відкидається, якщо $F\left(x\right)=F\left(x'\right)$, і в крайньому випадку одне обмеження додається, то $F\left(x\right)$ може залишатися постійним лише протягом скінченного числа ітерацій. Отже, за скінченне число кроків процедура повинна закінчитися на першому чи на другому етапах.

Теорема 3.11. Якщо X – опуклий многогранник у R^m, то алгоритм за скінченне число кроків знаходить оптимальний розв'язок задачі $Z\left(F,X\right)$, чи закінчується на першому кроці алгоритму з висновком про те, що ця задача недопустима. Кількість кроків алгоритму не перевищує величини R, де R – число вершин опуклого многогранника X.

Слід зазначити, що метод розв'язання задачі на перестановках не дає відповіді на питання, який розв'язок знайдений: ефективний, слабко ефективний чи строго ефективний. Це можна перевірити, користуючись співвідношеннями:

$$x\in Sl\left(C,X\right)=\sigma\left(x,C\right)=\varnothing,\ x\in P\left(C,X\right)=\pi\left(x,C\right)=\varnothing,$$

$$x\in Sm\left(C,X\right)=\eta\left(x,C\right)=\varnothing,\ \sigma\left(x,C\right)\subset\pi\left(x,C\right)\subset\eta\left(x,C\right),$$

$$K=\left\{x\in R^n\,\middle|\,Cx\geq 0\right\},K_0=\left\{x\in R^n\,\middle|\,Cx=0\right\},$$

$$int\,K=\left\{x\in R^n\,\middle|\,Cx>0\right\},\ K_2=K\setminus\left(K_0\cup int\,K\right),\ K=K_0\cup int\,K\cup K_2$$

$$x\notin Sl\left(C,X\right)\Leftrightarrow\left(x+int\,K\right)\cap X\neq\varnothing,$$

$$x\in P\left(C,X\right)\Leftrightarrow x+\left(K_1\cup K_2\right)\cap X=\varnothing \qquad (3.26)$$

$$x\in Sm\left(C,X\right)\Leftrightarrow\left(x+K\right)\cap X\setminus\left\{x\right\}=\varnothing.$$

Щоб перевірити чи належить точка x одній з множин Sl , $P,$ Sm , то необхідно перевірити виконання умов (3.26): усі точки будуть або на границях, або у вершині. Потрібно перевірити сумісність $\left\{ \begin{matrix} Cx \geq 0 \\ Ax \leq B \\ Dx \leq G \end{matrix} \right\}$.

Необхідно зауважити, що розглянутий метод для розв'язування задачі багатокритеріальної комбінаторної оптимізації на множині перестановок можна застосувати і до подібних задач комбінаторного типу на інших евклідових комбінаторних множинах.

3.4. Розв'язання багатокритеріальної задачі оптимізації на комбінаторних множинах розміщень

У даному пункті розглядаються багатокритеріальні задачі, тобто такі, у яких оптимізуються одночасно кілька критеріїв – задача має декілька цільових функцій на множині розміщень та полірозміщень. На практиці такі задачі виникають при необхідності формалізації окремих вимог у вигляді критеріїв, оптимальні значення яких необхідно знайти, причому об'єднання цих критеріїв є неможливим, а область допустимих значень визначається полікомбінаторними властивостями. Слід зазначити, що описаний метод розв'язування може бути адаптований і для багатокритеріальних задач на множині розміщень, але більш цікавим є випадок, коли задача має область допустимих розв'язків з полікомбінаторними властивостями (поліпереставними, полірозміщеннями).

Розглянемо структуру безумовної багатокритеріальної задачі на полірозміщеннях.

Через N_m, N_s позначаємо множини m та s перших натуральних чисел відповідно, $N_m = \{1,...,m\}$, $N_s = \{1,...,s\}$.

Критерії, що оптимізуються, можна представити набором функцій:

$$f_1(x) = \sum_{j=1}^{k} c_j^1 x_j \rightarrow min;$$

$$f_2(x) = \sum_{j=1}^{k} c_j^2 x_j \rightarrow min;$$

$$\ldots$$

$$f_s(x) = \sum_{j=1}^{k} c_j^s x_j \rightarrow min;$$

$$f_{s+1}(x)=\sum_{j=1}^{k} c_j^{s+1} x_j \to max;$$

$$\ldots$$

$$f_m(x)=\sum_{j=1}^{k} c_j^{m} x_j \to max. \qquad (3.27)$$

Тобто з m функцій s мінімізуються, а $m-s$ навпаки максимізуються. Але у практичному застосування часто виникає потреба у зменшенні одних критеріїв та збільшенні інших. Частинним випадком цієї ситуації буде випадок, коли всі функції максимізуються або мінімізуються.

Набір функцій (3.27) як відомо можна представити у вигляді вектор-функції:

$$\vec{F}\left(-f_1,..,-f_s, f_{s+1},.., f_m\right) \qquad (3.28)$$

максимум якої нам необхідно знайти.

Умова належності розв’язків множині полірозміщень може виникати з додаткових умов, що накладаються на змінні в самій постановці задачі. У побудованій математичній моделі на розв’язок накладається умова належності множині полірозміщень у вигляді:

$$x=\left(x_1,...,x_k\right)\in A_{qk}^{ns}\left(A,H\right). \qquad (3.29)$$

Враховуючи, що $A_{qk}^{ns}\left(A,H\right)=vert\, M_{qk}^{ns}$, згідно [137] дану умову можна описати у вигляді:

$$\begin{cases} \sum\limits_{j\in\omega^i} x_j \ge \sum\limits^{\left|\omega^i\right|} a_j^{N_i} \\ \sum\limits_{j\in\omega^i} x_j \le \sum\limits^{\left|\omega^i\right|} a_{\eta_i-j+1}^{N_i} \end{cases} \quad \forall\,\omega^i \subset N_i', \forall i\in N_s \qquad (3.30)$$

З урахуванням усіх вище означених умов, задачу можна сформулювати наступним чином: знайти множину значень (3.29), що є оптимальними для функції (3.27).

Таку задачу назвемо комбінаторною багатокритеріальною безумовною задачею на множині полірозміщень. Якщо на множину допустимих розв’язків накладаються додаткові умови вигляду:

$$a_{ij}x_j \le b_j \text{, де } i \in N_m, j \in N_k, \tag{3.31}$$

то задача вигляду (3.27), (3.29), (3.31) є комбінаторною багатокритеріальною з додатковими обмеженнями.

Підхід до розв'язування комбінаторних багатокритеріальних задач на поліроміщеннях

При розв'язуванні багатокритеріальних комбінаторних задач постає питання визначення ефективного розв'язку, що пов'язане з порівнянням альтернатив на множині цільових функцій. Слід зазначити, що такий розв'язок може виявитись не оптимальним для жодної з цільових функцій, проте, він є найкращим компромісним розв'язком з урахуванням усіх цільових функцій (критеріїв) одночасно.

Означення 3.5 [66]. Альтернатива x_0 має назву ефективної, якщо на множині допустимих альтернатив X, що визначається умовами (3.30), (3.31), не існує такої альтернативи $\overline{x}$, для якої виконувались би нерівності:

$$\begin{aligned} f_i(\overline{x}) \ge f_i(x_0), \forall i \in I_1 \\ f_i(\overline{x}) \le f_i(x_0), \forall i \in I_2 \end{aligned} \tag{3.32}$$

і хоча б одна з них була строгою.

Це означає, що жодна з допустимих альтернатив не може покращити значення деякої цільової функції, не погіршуючи при цьому хоча б одну з цільових функцій, що залишились. Ефективну альтернативу називають також оптимальною по Парето. Усі такі альтернативи складають множину Парето-оптимальних розв'язків $P(F,X)$ комбінаторної задачі на поліроміщеннях. Крім Парето-оптимальних (ефективних) розв'язків визначають також і інші множини розв'язків задач комбінаторної багатокритеріальної оптимізації на поліроміщеннях, такі як $Sl(F,X)$-множина оптимальних по Слейтеру (слабко ефективних) розв'язків, $Sm(F,X)$-множина оптимальних по Смейлу (строго ефективних) розв'язків. Такі множини для багатокрітеріальних задач на перестановках були розглянуті в попередньому пункті.

Вивчення властивостей даних множин є необхідним для дослідження досить важливого та актуального питання стійкості оптимізаційних багатокритеріальних задач на полікомбінаторних множинах та стійкості їх розв'язків. Це пов'язано з тим, що вихідні дані задач, які є математичними моделями різноманітних процесів, в більшості випадків не можуть бути визначені однозначно. Вони задаються з деякою похибкою і залежать від багатьох параметрів, а тому потребують уточнення в процесі розв'язування задачі. Для багатьох задач такі зміни значень критеріїв приводять до суттєвих змін результату, а це в свою чергу до неточності істинного розв'язку. Тому необхідним кроком є дослідження питання стійкості розв'язків задач, виділення класів стійкості та розробка методів, які б дозволяли змінити чисельний розв'язок некоректних задач із непередбаченим впливом збурень у вихідних даних задачі.

А тому подальші дослідження планується проводити у напрямку вивчення таких умов стійкості для різних класів багатокритеріальних комбінаторних оптимізаційних задач, у тому числі і задач на комбінаторних та полікомбінаторних множинах.

Комбінований метод для розв'язування комбінаторної багатокритеріальної задачі оптимізації на полірозміщеннях

Розглядається метод, що є поєднанням двох раніше розглянутих методів: методу обмежень [66] та методу комбінаторного відсікання [34, 40, 49].

Як зазначалося, комбінаторні багатокритеріальні задачі є досить актуальними при розв'язанні ряду прикладних задач, але розроблені існуючі методи не повністю адекватно можуть дати розв'язок таких задач. Є доцільним розробити новий підхід до їх розв'язання.

Розглянемо метод обмежень [66], адаптований до вищезазначених позначень.

Нехай задана деяка множина цільових функцій $f_i(x)$, де

$$f_i(x) = \sum_{j=1}^{k} c_{ij} x_j, i \in N_m$$

причому s перших функцій треба мінімізувати, а наступні $m-s$ – максимізувати, що записано у вигляді вектор-функції (3.28) На результуючий вектор $X = \{x_j\}, j \in N_k$ накладені обмеження виду (3.31) а також умова належності розв'язку множині полірозміщень (3.29).

Алгоритм розв'язування задачі

1. Умова належності розв'язку множині полірозміщень записується у вигляді системи нерівностей, що описують відповідну комбінаторну множину. Покладаємо значення цілочислової змінної $k = 0$.

2. Об'єднується система (3.30) пункту 1 з системою лінійних обмежень (3.31) задачі.

3. Визначаються для кожної з функцій такі розв'язки, що задовольняють обмеження (3.30) і (3.31), а також мінімізують та максимізують функції, підставивши відповідні значення у кожну з функцій.

4. Застосовуються наступні відображення:

а) для функцій, що мінімізуються:

$$W_i\left(f_i\left(X\right)\right)=\frac{\sum_{j=1}^{k}c_{ij}x_j-\sum_{j=1}^{k}c_{ij}x_j^0}{\sum_{j=1}^{k}c_{ij}x_{i\,max}-\sum_{j=1}^{k}c_{ij}x_j^0},\ \forall i\in N_s \qquad (3.33)$$

б) для функцій, що максимізуються:

$$W_i\left(f_i\left(X\right)\right)=\frac{\sum_{j=1}^{k}c_{ij}x_j^0-\sum_{j=1}^{k}c_{ij}x_j}{\sum_{j=1}^{k}c_{ij}x_j^0-\sum_{j=1}^{k}c_{ij}x_{i\,min}},\forall i\in N_{m-s} \qquad (3.34)$$

де x_j^0 – розв'язок, що задовольняє умовам (3.29), (3.31), та оптимізує *і*-ту цільову функцію, а $x_{max}\left(x_{min}\right)$ – розв'язки, що максимізують (мінімізують) відповідний критерій на допустимій множині розв'язків.

5. Записується наступна задача лінійного програмування:

$$k_0=x_{n+1}\to min$$

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{k}c_{ij}x_j\le\sum_{j=1}^{k}c_{ij}x_j^0+\frac{k_0}{\rho_i}\left(\sum_{j=1}^{k}c_{ij}x_{i\,max}-\sum_{j=1}^{k}c_{ij}x_j^0\right),\forall i\in N_s\\ \sum_{j=1}^{k}c_{ij}x_j\ge\sum_{j=1}^{k}c_{ij}x_j^0-\frac{k_0}{\rho_i}\left(\sum_{j=1}^{k}c_{ij}x_j^0-\sum_{j=1}^{k}c_{ij}x_{i\,min}\right),\forall i\in N_{m-s}\\ a_{ij}x_j\le b_j,i\in N_n\\ \sum_{j\in\omega^i}x_j\ge\sum^{\left|\omega^i\right|}a_j^{N_i}\\ \sum_{j\in\omega^i}x_j\le\sum^{\left|\omega^i\right|}a_{q_i-j+1}^{N_i}\end{cases} \qquad (3.35)$$

Розв'язуємо її двоїстим симплекс-методом.

Зауваження до пункту 5. Компромісним розв'язком даної багатокритеріальної задачі буде такий ефективний розв'язок *x*, для якого відносні відхилення однакові та мінімальні, тобто:

$$\rho_1 W_1(X) = \rho_2 W_2(X) = ... = \rho_m W_m(X) = k_{0min}. \tag{3.36}$$

6. Задача пункту 5 перетворюється до вигляду:

мінімізувати $k_0 = x_{n+1}$ при обмеженнях

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n} d_{1j} x_j + d_{1n+1} x_{n+1} + d_1 \geq 0;\\
&\sum_{j=1}^{n} d_{ij} x_j + d_{in+1} x_{n+1} + d_i \geq 0;\\
&...\\
&\sum_{j=1}^{n} d_{mj} x_j + d_{mn+1} x_{n+1} + d_m \geq 0;
\end{aligned} \tag{3.37}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_1 \leq 0\\
&\sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j - b_k \leq 0
\end{aligned}\right\}, \quad x_j \geq 0, j \in N_n, \tag{3.38}$$

де коефіцієнти в (3.37), (3.38) визначаються наступним чином:

$$d_{ij} = \begin{cases} -\rho_i c_{ij}, \forall j \in N_n; i \in N_s \\ \rho_i c_{ij}, \forall j \in N_n; i \in N_{m-s} \end{cases} \tag{3.39}$$

$$d_{i,n+1} = \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\left(x_{ij}^{(0)} - x_{ij\,min}\right), i \in N_s \\ \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\left(x_{ij\,max} - x_{ij}^{(o)}\right), i \in N_{m-s} \end{cases} \tag{3.40}$$

$$d_i = \begin{cases} \rho_i \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}^{(0)}, i \in N_s \\ -\rho_i \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}^{(o)}, i \in N_{m-s}. \end{cases} \tag{3.41}$$

Покладаємо $\rho_i = \frac{1}{m}, \forall i \in N_m$.

7. Перевіряємо належність вектора-розв'язку $x=\left(x_1,...,x_n\right)$ полікомбінаторній множині (3.29). Якщо $x=\left(x_1,...,x_n\right)\in A_{qk}^{ns}\left(A,H\right)$, то розв'язок знайдено і алгоритм завершено, інакше переходимо до пункту 8.

8. Перевіряємо $k>1$. Якщо «так», то робимо перехід на крок 10. Інакше – перехід на крок 9.

9. Збільшуємо k на одиницю: $k=k+1$. Додаємо до системи обмежень сформовану нерівність-відсікання:

$$\frac{x_{i_1}}{\Theta_{i_1}}+\frac{x_{i_2}}{\Theta_{i_2}}+...+\frac{x_{i_\gamma}}{\Theta_{i_\gamma}}\geq 1 \tag{3.42}$$

у вигляді рівності

$$-\frac{x_{i_1}}{\Theta_{i_1}}-\frac{x_{i_2}}{\Theta_{i_2}}-...-\frac{x_{i_\gamma}}{\Theta_{i_\gamma}}+x_{n+q}=-1\,, \tag{3.43}$$

ввівши допоміжну змінну $x_{n+q}\geq 0$. У формулах (3.42), (3.43) $i_1,...,i_\gamma$ – номери небазисних змінних в останній точці x^*, γ – їх кількість, а $\Theta_{ij}\forall j\in N_\gamma$ знаходиться так:

$$\Theta_i=\min_{j:a_{ij}>0}\frac{b_i}{a_{ij}}=\frac{b_t}{a_{tj}} \qquad (3.44).$$

Переходимо на крок 5.

10. Перевіряємо: $\Theta_{n+q-1}=0$ (Θ_{n+q-1} обчислюється за формулою (3.44). Якщо «ні», переходимо на крок 9. Якщо «так», то в останній приєднаній до системи рівності (3.43) замінити введену там допоміжну змінну на 0. Переходимо на крок 5 алгоритму.

Приклад розв'язання задачі. Нехай задана мультимножина $A=\left\{1,2,3,3,4\right\}$, що містить 5 елементів. Отже $N_5=\left\{1,2,3,4,5\right\}$. Нехай задано $s=2$, виберемо розбиття N_5 на множини $N_1=\left\{1,3,5\right\};N_2=\left\{2,4\right\}$. Нехай задано $k=2$ та вибрані $k_1=1,k_2=1$. Тоді множина *H* утворюється у вигляді: $H=\{(1,2);(1,4);(3,2);(3,4);(5,2);(5,4)\}$. А отже, множина полі розміщень матиме такий вигляд: $A_{54}^{22}(A,H)=\{(1,2);(1,3);(3,2);(3,3);(4,2);(4,3)\}$.

Математична постановка: знайти множину значень $x \in A_{54}^{22}(A,H)$, що є оптимальними для функцій

$$f_1(x)=2x_1+3x_2$$

$$f_2(x)=-x_1-2x_2$$

Розв'язання:

Запишемо многогранник полірозміщень (3.30) у вигляді системи обмежень:

$$\begin{cases} x_1 \ge 1 \\ -x_1 \ge -4 \\ x_2 \ge 2 \\ -x_2 \ge -3 \\ x_1 + x_2 \ge 3 \\ -x_1 - x_2 \ge -7 \end{cases}.$$

Скориставшись формулами (3.33)–(3.34), перетворимо функції. Для цього проаналізуємо кожну з функцій на найбільше та найменше значення:

x_1	x_2	F_1	F_2
1	2	8	–5
1	3	11	–7
3	2	12	–7
3	3	15	–9
4	2	14	–8
4	3	17	–10

Отже, отримаємо наступні функції:

$$W_1=\frac{1}{2}\frac{17-2x_1-3x_2}{17-8}=\frac{17-2x_1-3x_2}{18}\le x_3$$

$$W_2=\frac{1}{2}\frac{-x_1-2x_2+10}{-5+10}=\frac{-x_1-2x_2+10}{10}\le x_3 .$$

Згідно методу обмежень, необхідно розв'язати таку задачу: мінімізувати x_3 при умовах:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 18x_3 \geq 17 \\ x_1 + 2x_2 + 10x_3 \geq 10 \\ x_1 \geq 1 \\ -x_1 \geq -4 \\ x_2 \geq 2 \\ -x_2 \geq -3 \\ x_1 + x_2 \geq 3 \\ -x_1 - x_2 \geq -7 \end{cases}$$

При переході до двоїстої задачі отримаємо:

$$17y_1 + 10y_2 + y_3 - 4y_4 + 2y_5 - 3y_6 + 3y_7 - 7y_8 \to max$$

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 + y_3 - y_4 + y_7 - y_8 \leq 0 \\ 3y_1 + 2y_2 + y_5 - y_6 + y_7 - y_8 \leq 0 \\ 18y_1 + 10y_2 \leq 1 \end{cases}$$

Розв'яжемо дану задачу симплекс-методом:

Ci			17	10	–4	–3	3	–7	1	2	0
	Bx	A0	A1	A2	A4	A6	A7	A8	A3	A5	A9
0	A3	0	2	1	–1	0	1	–1	1	0	0
0	A5	0	3	2	0	–1	1	–1	0	1	0
0	A9	1	18	10	0	0	0	0	0	0	1
		0	–17	–10	4	3	–3	7	–1	–2	0

Ci			17	10	–4	–3	3	–7	1	2	0
	Bx	A0	A1	A2	A4	A6	A7	A8	A3	A5	A9
17	A1	0	1	0,5	–0,5	0	0,5	–0,5	0,5	0	0
0	A5	0	0	0,5	1,5	–1	–0,5	0,5	–1,5	1	0
0	A9	1	0	1	9	0	–9	9	–9	0	1
		0	0	–1,5	–4,5	3	5,5	–1,5	7,5	–2	0

Ci			17	10	–4	–3	3	–7	1	2	0
	Bx	A0	A1	A2	A4	A6	A7	A8	A3	A5	A9
17	A1	0	1	0,66	0	–0,33	0,33	–0,33	0	0,333	0
–4	A5	0	0	0,333	1	–0,67	–0,33	0,333	–1	0,667	0
0	A9	1	0	–2	0	6	–6	6	0	–6	1
		0	0	0	0	0	4	0	3	1	0

Отже, ми отримали у результаті наступні значення $x_1 = 4, x_2 = 3, x_3 = 0$.

$x = (4,3) \in A_{54}^{22}(A,H)$ – шуканий розв’язок.

Отримано розв’язок багатокритеріальної задачі комбінаторної оптимізації на множині полірозміщень з двома критеріями при відсутності додаткових лінійних обмежень за допомогою комбінованого методу. Перспективною є розробка відповідних комп’ютерних алгоритмів для автоматизації пошуку розв’язання з використанням комбінованого методу.

Доцільним є розгляд питання про відкидання та приєднання обмежень при розв’язуванні даного класу задач, що може значно спростити їх розв’язування. Цікавим є напрямок побудови математичних моделей, які б задовольняли умовам стійкості і могли давати адекватні розв’язки поставлених задач.

РОЗДІЛ 4. ПІДХІД ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ КОМБІНАТОРНОЇ ЗАДАЧІ ОПТИМІЗАЦІЇ ЗА ДОПОМОГОЮ ТЕОРІЇ ГРАФІВ

Багато задач дослідження операцій, такі як планування роботи підприємства, розподіл ресурсів, задача управління, мережне планування описуються моделями дискретної оптимізації. Із задач дискретного моделювання виділяються задачі комбінаторної оптимізації, які виникають в найрізноманітніших галузях людської діяльності [4, 31–44, 49–62, 134–144].

Комбінаторні оптимізаційні задачі є досить складними з обчислювальної точки зору. Методи розв'язання цих задач розвиваються в двох основних напрямах: точні і наближені. Такий поділ є досить умовним внаслідок того, що кожен конкретний клас задач (навіть окрема задача) пред'являють свої вимоги до методу розв'язання.

Останнім часом почалося вивчення властивостей окремих класів дискретних оптимізаційних задач і використання цих властивостей при побудові алгоритмів розв'язання. Є ряд публікацій, що охоплюють певні класи задач і методи їх розв'язання. Зокрема, в даний час розроблений ряд методів ітераційного типу, достатньо універсальних і дозволяючих разом з тим враховувати конкретну специфіку задачі. У цьому розумінні представляють інтерес задачі комбінаторного типу, описані в роботах [4, 7, 31–44, 49–62, 76–86, 117–119, 121, 134–144].

Задачі на комбінаторних множинах цікаві тим, що область допустимих розв'язків є деяким комбінаторним многогранником, властивості якого вивчені і досліджені. Знання специфічних властивостей комбінаторного многогранника дає можливість використовувати їх для побудови нових і для вдосконалення існуючих методів розв'язання комбінаторних оптимізаційних задач.

Широкий клас задач по своїй математичній постановці зводиться до відповідних класів задач комбінаторної оптимізації, зокрема, у ряді задач функціонал, що оптимізується, задається на комбінаторній множині. Прикладами комбінаторних множин є множина перестановок, перестановок з повтореннями, розміщень, розбиття і інші. Відомо що елементи множини перестановок можна інтерпретувати як вершини деякого опуклого многогранника. Слід зазначити, що особливості комбінаторних властивостей многогранників тісно пов'язані із задачами оптимізації, які важливі для практичних застосувань. Многогранники тісно пов'язані з вивченням властивостей графів. Графи многогранників мають багато цікавих властивостей. На основі їх вивчення і застосування розв'язується велике число задач, що представляють інтерес в економіці, плануванні транспорту, оптимального календарного планування, багатоетапного планування про призначення економічного запису, кодування і збереження інформації, забезпечення системного підходу до аналізу і управління економікою та іншими.

Графи можна використовувати, коли досліджувана задача моделюється за допомогою графа, вершини якого представляють – вершини многогранника.

Використання властивостей графів комбінаторних многогранників можуть послужити підвищенню ефективності «традиційних» і розробці нових методів комбінаторної оптимізації.

Комбінаторні моделі можуть бути застосовані для представлення оптимізаційних задач, що виникають при оптимальному розміщенні на графах. Слід зазначити, що ряд задач формулюється в термінах точок і зв'язків між ними, такі як складання розклади, проектування електронних схем, аналіз мереж в електротехніці та ін. Тому ефективні алгоритми розв'язання задач теорії графів мають велике практичне значення.

В даному розділі розглядається комбінаторна задача знаходження вершини переставного многогранника, яка відповідає значенню заданої цільової функції.

Запропонований підхід до знаходження на комбінаторній множині перестановок з повтореннями з використанням спеціальних властивостей переставного многогранника і властивостей його графів, точок – вершин переставного многогранника по значенню цільової функції.

Робота є продовженням робіт [23–27], в яких розглядається алгоритми на графах.

Зокрема на основі описаних специфічних властивостей комбінаторного многогранника будуються нові методи і вдосконалюються існуючі для розв'язання комбінаторних оптимізаційних задач.

Слід зазначити, що методи розв'язання комбінаторних задач розвиваються дуже ефективно. Серед точних методів широке розвитку набули різні методи відсікання [34, 37, 40, 49, 119], ідея яких була вперше запропонована Данцигом, а потім розвинена в багатьох інших роботах, зокрема, Гоморі. Для групи методів відсікаючих площин використовується ідея «регулярізациі» задачі. Вона полягає в зануренні початкової дискретної області допустимих розв'язків у відповідну безперервну опуклу область, тобто в тимчасовому відкиданні умов дискретності. Далі до одержаної регулярної задачі застосовуються стандартні методи оптимізації. Слід зазначити, що ефективність методу відсікання знаходиться в прямій залежності від ефективності способу побудови відсікань, а це викликає певні труднощі. Різні підходи до побудови відсікань, і різні модифікації методу відсікань, для задач комбінаторної оптимізації розглянуто в роботах [49, 50].

Очевидно, що швидко розвиваються методи, які краще і простіше враховують властивості і специфіку класів комбінаторних задач. Тому є актуальним розробка нових методів на основі специфічних властивостей комбінаторних множин.

Отже, розглянемо новий метод, який дає можливість знайти розв'язки комбінаторної задачі, враховуючи властивості і структуру множини перестановок, на якій розглядається задача. Зокрема, опишемо побудову послідовності значень лінійної цільової функції за розкладаннями точок множини перестановок по гіперплощинах.

4.1. Постановка задачі на комбінаторній множині перестановок

Розглянемо задачу евклідової комбінаторної оптимізації вигляду:

$$Z\left(\Phi, P\left(A\right)\right): max\left\{\Phi\left(a\right) | a \in P\left(A\right)\right\}, \tag{4.1}$$

яка полягає в максимізації функції $\Phi\left(a\right)$ на множині перестановок $P\left(A\right)$, де $\Phi\left(a\right)=\sum_{j=1}^{n}c_j x_j$.

При відображенні множини $P\left(A\right)$ у евклідів простір R^n, можна сформулювати задачу лінійного програмування $Z\left(F,X\right)$ максимізації критерію $F\left(x\right)$ на множині X, причому кожній точці $a \in P_{nk}\left(A\right)$ відповідатиме точка $x \in X$, така, що $F\left(x\right)=\Phi\left(a\right)$.

$$Z\left(F,X\right): max\left\{F\left(x\right) | x \in X\right\}, \tag{4.2}$$

де $F\left(x\right)=\sum_{j=1}^{n}c_j x_j$, X – непорожня множина в R^n, яка визначається таким чином $X = vert\, M\left(A\right)$, $M = conv\, P\left(A\right)$.

Слід зазначити, що іноді є доцільним розв'язувати задачу вигляду: знайти

$$x^* = \underset{x \in M\left(A\right)}{arg\, max}\, F\left(x\right), \tag{4.3}$$

по значення функції $y^* = F\left(x^*\right)$. Так само має сенс розглядати задачу, де значення цільової функції знаходиться в інтервалі:

$$F\left(\overline{x}\right) \le F\left(x\right) \le F\left(\overline{\overline{x}}\right).$$

Тоді задача прийме вигляд: визначити:

$$\bar{x} = \underset{x \in M(A)}{arg\,max}\, F(x), \text{ якщо } \bar{y} = F(\bar{x}),$$

$$\bar{\bar{x}} = \underset{x \in M(A)}{arg\,max}\, F(x), \text{ якщо } \bar{\bar{y}} = F(\bar{\bar{x}})$$

при умові $\left|\bar{x} - \bar{\bar{x}}\right| \to min$.

Продовжуючи дослідження і розвиваючи результати робіт [23–27], запропонований підхід до розв'язання таких задач, заснований на впорядковуванні значень цільової лінійної функції $F(x)$ і побудова гамільтонова шляху для точок, в яких ці значення знаходяться. Далі під задачею розуміємо задачу (4.3).

Для побудови методу, перш за все, на початковому етапі необхідно визначити початкову точку. Розглянемо однокритеріальну задачу без додаткових обмежень, тобто без обмежень, що описують многогранник $M(A)$. Згідно твердження 3.8, якщо для елементів мультимножини A і коефіцієнтів цільової функції задачі:

$$extr\left\{ f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \mid x \in vert\, M(A) \right\}$$

виконуються відповідно умови $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n$ і

$$c_{i_1} \le c_{i_2} \le \ldots \le c_{i_n}, \tag{4.4}$$

$i_n \in N_n$, то максимум функції $f(x)$ на допустимій множині досягається в точці $x^* = \left(x^*_{i_1}, \ldots, x^*_{i_n}\right) \in vert\, M(A)$, яка задається таким чином:

$$x^*_{i_j} = a_j \;\; \forall\, j \in N_n,$$

а мінімум відповідно в точці $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, де

$$y_{i_{j+1}} = a_{n-j} \;\; \forall\, j \in N_{n-1} \bigcup \{0\}.$$

Як вже було зазначено, загальне число q лінійних нерівностей, що входять в систему, яка описує переставний многогранник $M(A)$ дорівнює $\sum_{i=0}^{n} C_n^i = 2^n$, а це задача великої вимірності і є дуже складною при розв'язанні традиційними методами лінійного програмування. Тому є необхідність в розробці нових методів, які базуються на властивостях множини допустимих розв'язків і цільових функцій.

Для даної задачі $Z(F,X)$ область допустимих розв'язків включає переставний многогранник, вершини якого є точками загальної множини перестановок. Сформулюємо деякі важливі властивості многогранника.

Теорема 4.1 [141]. Множина $P(A)$ лежить на сімействі *n*-площин вигляду:

$$\frac{s}{n-s}x_1+\frac{s}{n-s}x_2+\ldots+\frac{s}{n-s}x_{n-s}-x_{n-s+1}-\ldots-x_n+a_t^s=0,$$

$$t=1,2,\ldots,\gamma_s\leq\frac{n}{s!(n-s)!},$$

при цьому *s* може приймати значення 1, 2, …, $n-1$.

Вище сформульована теорема та критерій вершини дають можливість при реалізації методу для розв'язання задачі $Z(F,X)$ мінімізувати витрати часу на перевірку належності знайденої точки комбінаторним обмеженням многогранника і зменшити кількість обмежень в початковій системі.

Теорема 4.2 [141]. Вершини $M(A)$, суміжні з вершиною $a=\left(a_{i_1},a_{i_2},\ldots,a_{i_n}\right)$, мають вигляд $\beta=(a_{j_1},a_{j_2},\ldots,a_{j_n})$, де кожна з послідовностей $\left(j_1,j_2,\ldots,j_n\right)$ одержана з $\left(i_1,i_2,\ldots,i_n\right)$ в результаті перестановки таких індексів i_r і i_t, що $\left|i_r-i_t\right|=1, a_{i_r}\neq a_{i_t}$

Вище сформульовані теореми дають можливість розглядати многогранник перестановок, як деякий граф, оскільки задача формулюється в термінах точок і зв'язків між ними, тобто в термінах графів. Більшість задач на графах стосується визначення компонентів зв'язності, пошуку маршрутів, відстані.

4.2. Метод розв'язання задачі комбінаторної оптимізації з використанням графів

Як було визначено вище, в статті розглядається задача, в якій необхідно визначити точку екстремуму – вершину переставного многогранника $M(A)$ по відомому значенню цільової функції. Для цього спочатку необхідно знайти значення цільової функції в кожній точці, побудувати для цих значень ланцюжок (граф), який відображає переходи від точки до точки, і з'ясувати залежність між ними.

Скористаємося теорією графів.

Існує ряд задач, постановка яких укладається в рамки задач комбінаторної оптимізації, зокрема задач на множині перестановок з повтореннями.

Як було визначено вище, розв'язання таких задач вельми складний процес. У даному розділі розглядається задача, в якій необхідно визначити точку екстремуму – вершину переставного многогранника $M(A)$ по відомому значенню цільової функції. Для цього спочатку необхідно знайти значення цільової функції в кожній точці, побудувати для цих значень ланцюжок (граф), який відображає переходи від точки до точки, де точки з'єднуються дугами і з'ясувати залежність між ними.

На підставі твердження 3.8 можна визначити точку максимуму і мінімуму. Позначимо вершину x_0, яка визначає точку мінімуму, початок мережі, з якої дуги тільки виходять. Тоді вершина, що визначає точку максимуму x_n – кінець мережі, в яку дуги тільки входять.

Скористаємося теорією графів.

Довільна вершина переставного многогранника x і ребро u графа Г є інцидентними, оскільки вершина x є одним з кінців ребра u, тобто входить в пару вершин, що визначають ребро u.

Як відомо, ступенем вершини називають число інцидентних їй ребер. Вершини ступеня 1 називаються кінцевими. Вершини ступеня 0, очевидно, не зв'язані ребрами з іншими вершинами, і їх називають ізольованими.

Враховуючи, що кожне ребро переставного многогранника інцидентне рівне двом вершинам графа, легко помітити, що сума ступенів всіх вершин графа рівна подвоєному числу його ребер. З цієї властивості виходить, що в будь-якому графі число вершин непарного ступеня парне.

Нехай $\Gamma=\langle X,C\rangle$ – деякий граф, $X=\{1,2,...,n\}$. Бінарна матриця $\|a_{ij}\|$ така, що

$$a_{ij}=\begin{cases}1, \textit{якщо вершини } i \textit{ и } j \textit{ суміжні,}\\ 0-\textit{в протилежному випадку,}\end{cases}$$

визначає матрицю суміжності графа переставного многогранника. Суміжність вершин многогранника перестановок визначається згідно теореми 4.2.

Слід зазначити що, граф многогранника перестановок є гамільтонів. Гамільтонів граф за означенням повинен містити простий цикл, що проходить через кожну його вершину. Такий цикл називається гамільтоновим. Гамільтоновим ланцюгом називають простий ланцюг, що містить всі вершини графа.

Знаменита задача про комівояжера є комбінаторною задачею на множині перестановок і пов'язана із знаходженням гамільтонового циклу найкоротшої сумарної довжини. У цій задачі вважається, що є n міст, які неодмінно повинен відвідати комівояжер, – всі і рівно по одному разу, пройшовши шлях між містами якнайменшої сумарної довжини шляху. Якщо між містами є дороги, то вони інтерпретуються як ребра графа порядку n з вказаною довжиною. Вершини такого графа – вершини переставного многогранника, і є містами.

Задача комівояжера є приклад комбінаторної задачі на графах і має велике практичне і теоретичне значення. Через свою обчислювальну складність, рівносильна цілому класу переборних задач, вона часто використовується математиками для порівняльного аналізу і вивчення складності алгоритмів оптимізації в дискретній математиці.

Легко переконається, що в повному графі порядку n існує рівно $(n-1)!$ гамільтонових циклів. Дійсно, зафіксувавши будь-яку з n вершин повного графа, з неї $(n-1)$ способами можна перейти в іншу – наступну, одержуючи простий ланцюг з двох вершин. Далі вибрати наступну вершину можна $(n-2)$ способами, і т. д., одержуючи $(n-1)(n-2)...2*1=(n-1)!$ гамільтонових циклів.

Оскільки $n! \sim a\sqrt{n}n^n e^{-n} = a\sqrt{n}\left(\dfrac{n}{e}\right)$ при $n \to \infty$, можна припустити, що відшукання гамільтонових циклів пов'язане з величезним перебором варіантів.

Послідовності перестановок можна інтерпретувати як граф G_n, вершини якого відповідають всім точкам множини перестановок $P_{nk}(A)$.

У графі дві вершини, що відповідають перестановкам f і g, сполучені ребром тоді і тільки тоді, коли g утворюється з f однією транспозицією сусідніх елементів (таким чином, кожна вершина сполучена в точності з $n-1$ іншими вершинами). Згідно теореми 4.2, ці вершини є суміжними, за критерієм суміжності вершин.

Також слід відмітити, що послідовність перестановок, утворена графом, відповідає гамільтонову шляху в G_n, тобто шляху, що містить кожну вершину графа в точності один раз. Теорема 4.1 указує на можливість розбиття множини $P_{nk}(A)$ на підмножини, що лежать у взаємно паралельних площинах, так само згідно [141], початкову множину $P_{nk}(A)$ можна розкласти на множини меншої вимірності, об'єднання яких породжує множину $P_{nk}(A)$:

$$P_{nk}(A) = \bigcup_{t=1}^{k} P_{nk}^{t}(A).$$

У деяких ситуаціях важливо, щоб кожна подальша одержана підмножина якомога менше відрізнялася від попередньої.

Послідовність підмножин, можна проілюструвати на графі, вершини якого відповідають бінарним послідовностям довжини і дві вершини якого сполучені ребром, якщо відповідні послідовності відрізняються в точності в одній позиції. У такому графі побудована послідовність відповідає гамільтоновому шляху.

Для генерації всіх $n!$ перестановок n-елементної множини існує багато методів, які були коротко описані в другому розділі даної роботи та які висвітлені в [4, 95]. Найпоширенішими є наступні методи генерації:

1) кожна подальша перестановка утворюється з попередньої шляхом виконання однієї транспозиції;

2) кожна наступна утворюється з попередньої за допомогою одноразової транспозиції сусідніх елементів.

Послідовності перестановок, одержані за допомогою вище зазначених методів можна інтерпретувати як граф G_n, вершини якого відповідають всім точкам множини перестановок $P(A)$.

У графі дві вершини, відповідних перестановок f і g, сполучені ребром тоді і тільки тоді, коли g утворюється з f однією транспозицією сусідніх елементів (таким чином, кожна вершина сполучена в точності з $n-1$ іншими вершинами). Згідно теореми 4.2, ці вершини є суміжними.

Розглянемо

Приклад 4.1. Нехай, дана множина $A = \{1,2,3,4\}$, за допомогою якого утворюється множина перестановок $P(A)$. Визначена функція

$$F(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + c_4 x_4,$$

коєфіциенти якій впорядковані таким чином $c_1 \le c_2 \le c_3 \le c_4$ і приймають значення $\{1,2,3,4\}$, а $y^* = F(x^*)$ значення функції в деякій точці.

Необхідно знайти:

$$x^* = arg\, extr F(x), \text{ де } x^* \in P(A).$$

Розв'язання. Як відомо $M(A) = conv\,P(A)$. Представимо розкладання графа переставного многогранника $M(A)$ по гіперплощинах, де виділено зафіксований елемент для функції. Згідно твердженню 3.8 і умови впорядкування коефіцієнтів, у вершині знаходиться точка, в якій досягається максимальне значення цільової функції.

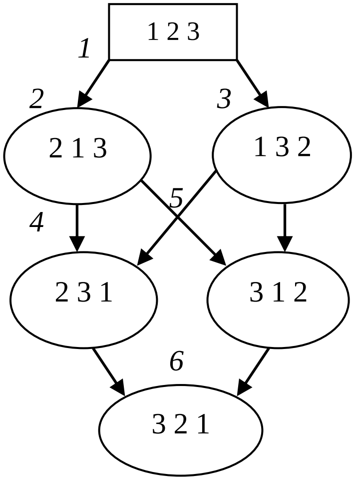


Рис. 4.1. Гіперплощина *A*

На рис. 4.1 розглядається гіперплощина *A* яка задається рівнянням $x_4 = 4$, а решта три цифри переставляються між собою.

Стрілки указують перехід від точки до точки по зменшенню значень цільових функцій. Слід зазначити, що практично всі зв'язки визначені, але між сусідніми елементами всередині (на рис. 4.1) зв'язок необхідно вивчити, тоді можна буде представити повний гамільтонів шлях на графі переставного многогранника.

Таким чином, можна зобразити гіперплощину *B*, яка одержана з *A* за допомогою однієї транспозиції, тому її рівняння має вигляд $x_4 = 3$. Відповідно існують гіперплощини *C*, *D*, які будуть представлені рівняннями $x_4 = 2$, $x_4 = 1$ і містити по шість точок. Позначимо ці гіперплощини 3-грані. Помітимо, що всі ці грані лежать на гіперграні вигляду $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 + 2 + 3 + 4$. Позначимо її символом **A**. Тоді **A** = $A \bigcup B \bigcup C \bigcup D$, а на рисунку 4.2 гіперплощина **A** має вигляд.

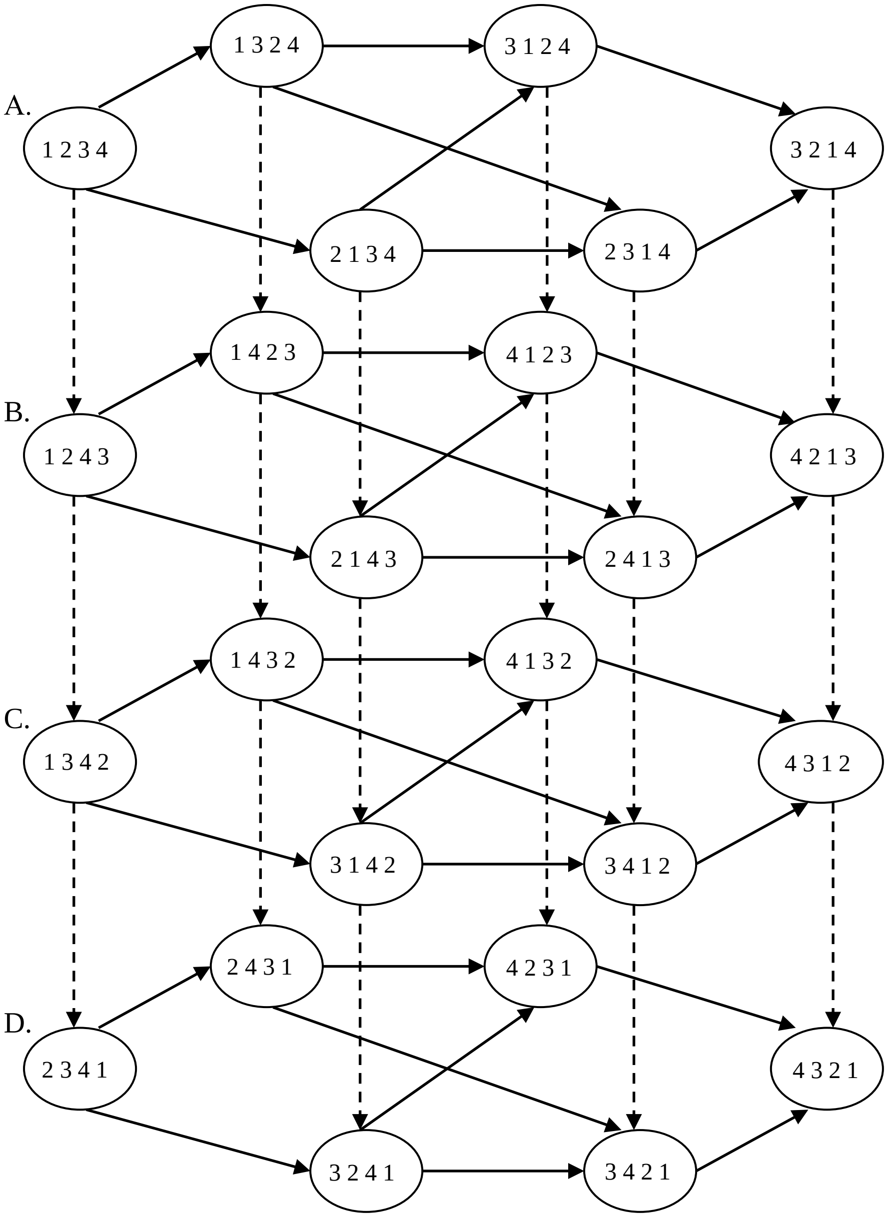


Рис. 4.2. Гіперплощина **A**

На підставі вище викладених міркувань і на основі рис. 4.4, сформулюємо наступну лему.

Лема 4.1. Точки множини перестановок $P(A)$ можна розкласти по паралельних гіперплощинах у порядку убування значень лінійної цільової функції $F(x)$ у цих точках.

Доведення леми випливає з теореми 4.1 і твердження 3.8.

На підставі леми 4.1 є доцільним сформулювати наступне твердження, яке забезпечує побудову ієрархії точок.

Лема 4.2. Розкладання точок комбінаторної множини перестановок $P(A)$ при $n \geq 4$ забезпечує ієрархічне розташування цих точок по гіперплощинах *A, B, C, D* (рис. 4.2) згідно значень цільової функції $y^* = F(x^*)$.

Доведення. Згідно теоремі 4.1 розкладання по гіперплощинах точок комбінаторної множини перестановок, очевидно. А за твердженням 3.8 можна визначити максимальне і мінімальне значення функції $F(x)$ на кожній з гіперплощин *A, B, C, D*. Стрілки указують перехід по значеннях цільової функції від максимальних до мінімальних.

Для функції задачі при умові $c_1 \leq c_2 \leq c_3 \leq c_4$ введемо наступні позначення $\Delta_1 = c_2 - c_1$; $\Delta_2 = c_3 - c_2$; $\Delta_3 = c_4 - c_3$.

Для вище певних позначень встановимо можливі співвідношення:

I) $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3$;

$1\,2\,3 \to 2)\ \Delta_1 > \Delta_2 > \Delta_3$;

$1\,3\,2 \to 3)\ \Delta_1 > \Delta_3 > \Delta_2$;

$2\,1\,3 \to 4)\ \Delta_2 > \Delta_1 > \Delta_3$;

$2\,3\,1 \to 5)\ \Delta_2 > \Delta_3 > \Delta_1$;

$3\,1\,2 \to 6)\ \Delta_3 > \Delta_1 > \Delta_2$;

$3\,2\,1 \to 7)\ \Delta_3 > \Delta_2 > \Delta_1$.

Можна розглянути ще і окремі випадки:

1) $\Delta_1 = \Delta_2 > \Delta_3$; 2) $\Delta_1 = \Delta_2 < \Delta_3$;

2) $\Delta_1 = \Delta_3 > \Delta_2$; 4) $\Delta_1 = \Delta_3 < \Delta_2$;

5) $\Delta_2 = \Delta_3 > \Delta_1$; 6) $\Delta_2 = \Delta_3 < \Delta_1$.

Для побудови гамільтонового шляху необхідно встановити співвідношення на кожній з гіперплощин *A, B, C, D* (рис. 4.2) між парами точок (3;2), (5;4) (точки пронумеровані на рис. 4.1). Для цього введемо в розгляд поняття α_i-питань.

Означення 4.1. Назвемо α_i -питаннями співвідношення між точками множини перестановок $P_n(A)$ на гіперплощинах *A, B, C, D*, які розв'язуються для визначення гамільтонового шляху окремо на кожній гіперплощині.

По кожному з вище зазначених випадків складемо схему, яка буде відображати розташування точок множини перестановок $P(A)$ по значенню цільової функції на гіперплощинах *A, B, C, D* потім складемо загальне співвідношення і вкажемо гамільтонів шлях по вершинах переставного многогранника $M(A)$.

Якщо виконується умова: $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3$, то на площині A (рис. 4.1) є дві пари вершин (3;2), (5;4), між якими необхідно встановити зв'язок. Тому обчислимо співвідношення:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 2 & 4 \\ - & & & \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ \hline -1 & +2 & -1 & \end{array} = \Delta_1 - \Delta_2 = 0, \quad \begin{array}{cccc} 3 & 1 & 2 & 4 \\ - & & & \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ \hline +1 & -2 & +1 & \end{array} = -\Delta_1 + \Delta_2 = 0.$$

Позначимо питання $\alpha_1 = \Delta_1 - \Delta_2$.

Тоді, можна зобразити наступну схему для гіперплощини *A*:

A. $\quad 1\,2\,3\,4 \to \begin{matrix} 1\;3\;2\;4 \\ 2\;1\;3\;4 \end{matrix} \to \begin{matrix} 3\;1\;2\;4 \\ 2\;3\;1\;4 \end{matrix} \to 3\,2\,1\,4$

Аналогічна ситуація на гіперплощині *D*.

D. $\quad 2\,3\,4\,1 \to \begin{matrix} 2\;4\;3\;1 \\ 3\;2\;4\;1 \end{matrix} \to \begin{matrix} 4\;2\;3\;1 \\ 3\;4\;2\;1 \end{matrix} \to 4\,3\,2\,1$

Якщо розглянути гіперплощину *B* (рис. 4.2), то одержуємо співвідношення для таких пар вершин

$$\begin{array}{cccc} 1 & 4 & 2 & 3 \\ - & & & \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ \hline -1 & +3 & -2 & \end{array} = \Delta_1 - 2\Delta_2 = -\Delta_2 < 0$$

$$\begin{array}{r}
\begin{array}{cccc} 4 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\
- \qquad\qquad\qquad \\
\begin{array}{cccc} 2 & 4 & 1 & 3 \end{array} \\
\hline
\begin{array}{ccc} +2 & -3 & +1 \end{array}
\end{array} = -2\Delta_1 + \Delta_2 = -\Delta_1 < 0$$

На гіперплощині *B* виникають питання $\alpha_2 = \Delta_1 - 2\Delta_2$ і $\alpha_3 = -2\Delta_1 + \Delta_2$. Тому гамільтонів шлях на *B* має вигляд:

$$B.\quad (1\,2\,4\,3) \to (2\,1\,4\,3) \to (1\,4\,2\,3) \to (2\,4\,1\,3) \to (4\,1\,2\,3) \to (4\,2\,1\,3)$$

На гіперплощині *C* аналогічна ситуація: $1432 > 3142$ і $4132 > 3412$, тому маємо:

$$C.\quad (1\,3\,4\,2) \to (1\,4\,3\,2) \to (3\,1\,4\,2) \to (4\,1\,3\,2) \to (3\,4\,1\,2) \to (4\,3\,1\,2)$$

При рішенні α_i-питань, також слід зазначити, що простежується залежність між точками, які знаходяться на різних гіперплощинах. Помітимо, що на гіперплощинах *A* і *B* є точки, для яких виконується наступне співвідношення:

$$\begin{array}{r}
\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 2 & 4 \end{array} \\
- \qquad\qquad\qquad \\
\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 4 & 3 \end{array} \\
\hline
\begin{array}{ccc} +1 & -2 & +1 \end{array}
\end{array} = -\Delta_3 + \Delta_4 = 0$$

тобто їх значення рівні.

Аналогічно, значення в точці (3 1 2 4) на гіперплощині *A* рівно значенню в точці (1 4 2 3) на гіперплощині *B*, оскільки

$$\begin{array}{r}
\begin{array}{cccc} 3 & 1 & 2 & 4 \end{array} \\
- \qquad\qquad\qquad \\
\begin{array}{cccc} 1 & 4 & 2 & 3 \end{array} \\
\hline
\begin{array}{cccc} +2 & -3 & 0 & 1 \end{array}
\end{array} = -2\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 = 0,$$

а значення в точці (3 2 1 4) з гіперплощини *A* більше, ніж значення в крапці 2 4 1 3 з гіперплощини *B*, оскільки виконується умова:

$$\begin{array}{cccc} 3 & 2 & 1 & 4 \\ - & & & \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ \hline +1 & -2 & 0 & 1 \end{array} = -\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 > 0\,.$$

Розрахуємо значення цільової функції в точках:

$$F(x_1) = 1\cdot 1 + 2\cdot 2 + 3\cdot 3 + 4\cdot 4 = 30$$

$$F(x_2) = 1\cdot 1 + 2\cdot 3 + 3\cdot 2 + 4\cdot 4 = 29$$

$$F(x_3) = 1\cdot 2 + 2\cdot 1 + 3\cdot 3 + 4\cdot 4 = 29$$

$$F(x_4) = 1\cdot 1 + 2\cdot 2 + 3\cdot 4 + 4\cdot 3 = 29$$

$$F(x_5) = 1\cdot 2 + 2\cdot 1 + 3\cdot 4 + 4\cdot 3 = 28$$

$$F(x_6) = 1\cdot 3 + 2\cdot 1 + 3\cdot 2 + 4\cdot 4 = 27$$

$$F(x_7) = 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 1 + 4\cdot 4 = 27$$

$$F(x_8) = 1\cdot 1 + 2\cdot 4 + 3\cdot 2 + 4\cdot 3 = 27$$

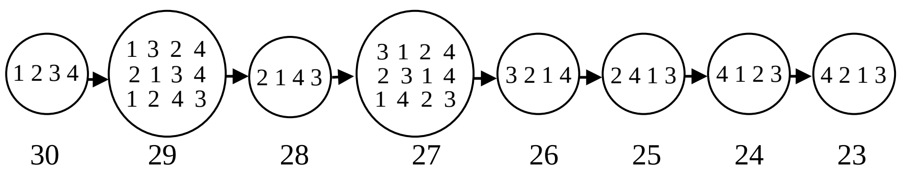
$$F(x_9) = 1\cdot 3 + 2\cdot 2 + 3\cdot 1 + 4\cdot 4 = 26$$

$$F(x_{10}) = 1\cdot 2 + 2\cdot 4 + 3\cdot 1 + 4\cdot 3 = 25$$

$$F(x_{11}) = 1\cdot 4 + 2\cdot 1 + 3\cdot 2 + 4\cdot 3 = 24$$

$$F(x_{12}) = 1\cdot 4 + 2\cdot 2 + 3\cdot 1 + 4\cdot 3 = 23.$$

В результаті вище висловлених міркувань, точки на гіперплощинах *A* і *B* можна розкласти в наступний ланцюжок, залежно від значень цільової функції:



Розглянемо точки на гіперплощині *C*, зокрема (3 1 4 2), (1 4 3 2), оскільки $\begin{array}{cccc} 3 & 1 & 4 & 2 \\ - & & & \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ \hline +2 & -3 & 1 & \end{array} = -2\Delta_1 + \Delta_2 = -\Delta_1 < 0$, те значення в (3 1 4 2) більше значення в точці (1 4 3 2).

У даній ситуації розглядається питання $\alpha_3 = -2\Delta_1 + \Delta_2$.

Аналогічно із значеннями в точка (4 1 3 2) і (3 4 1 2), оскільки

$$\begin{array}{cccc} 4 & 1 & 3 & 2 \\ - & & & \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ \hline +1 & -3 & +2 & \end{array} = -\Delta_1 + 2\Delta_2 = \Delta_2 > 0.$$

Це питання $\alpha_2 = -\Delta_1 + 2\Delta_2$.

Якщо розглядати відношення точок з різних гіперплощин, то значення в точці (1 3 4 2) з *B* рівно значенню в точці (1 4 2 3) з *B*, оскільки

$$\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 4 & 2 \\ - & & & \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ \hline & -1 & 2 & -1 \end{array} = \Delta_2 - \Delta_3 = 0.$$

Аналогічна ситуація з точками (3 2 1 4) з *A* і (1 4 3 2) з *B*, оскільки значення співвідношення рівне $\begin{array}{cccc} 3 & 2 & 1 & 4 \\ - & & & \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ \hline +2 & -2 & -2 & +2 \end{array} = -2\Delta_1 + 2\Delta_2 = 0$.

Ще розглянемо точки (2 4 1 3) з *B* і (1 4 3 2) з *C* і їх співвідношення:

$$\begin{array}{cccc} 2 & 4 & 1 & 3 \\ - & & & \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ \hline +1 & -2 & +1 & \end{array} = -\Delta_1 + \Delta_3 = 0,$$

а також точки (2 4 1 3) з B і (3 1 4 2) з C, їх значення рівні, оскільки

$$\begin{array}{cccc} 2 & 4 & 1 & 3 \\ - & & & \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ \hline -1 & +3 & -3 & 1 \end{array} = \Delta_1 - 2\Delta_2 + \Delta_3 = 0 .$$

Маємо також рівність значень в точках (4 2 1 3) з B і (4 1 3 2) з C, оскільки

$$\begin{array}{cccc} 4 & 2 & 1 & 3 \\ - & & & \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ \hline +1 & -2 & +1 & \end{array} = -\Delta_2 + \Delta_3 = 0 .$$

Розглядаючи гіперплощину D має наступні співвідношення між точками: очевидно, що значення точок (2 3 4 1) з D рівно значенню (4 1 2 3) з B, оскільки $\begin{array}{cccc} 2 & 3 & 4 & 1 \\ - & & & \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ \hline -2 & +2 & +2 & -2 \end{array} = 2\Delta_1 - 2\Delta_2 = 0$.

Аналогічна ситуація з точками (4 1 3 2) з C і (3 2 4 1) з D, оскільки $\begin{array}{cccc} 4 & 1 & 3 & 2 \\ - & & & \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ \hline +1 & -1 & -1 & +1 \end{array} = -\Delta_1 + \Delta_3 = 0$, а також з точками (4 3 1 2) з C і (3 4 2 1) з D, оскільки $\begin{array}{cccc} 4 & 3 & 1 & 2 \\ - & & & \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ \hline +1 & -1 & -1 & +1 \end{array} = -\Delta_1 + \Delta_3 = 0$.

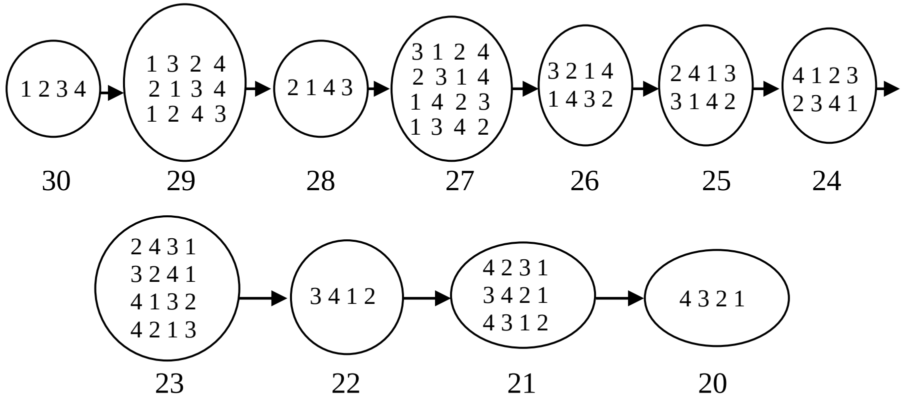


Рис. 4.3. Гамільтонів шлях по значеннях лінійної цільової функції $F(x)$

В результаті розрахунків одержимо гамільтонів ланцюг всього графа переставного многогранника і впорядкування всіх значень лінійної функції $F(x)$ у порядку їх убування для точок гіперплощин *A, B, C, D*. В процесі визначення гамільтонового шляху виникають три α-питання:

$$\alpha_1 = \Delta_1 - \Delta_2 \left(> 0 \text{ або} < 0\right);$$

$$\alpha_2 = \Delta_1 - 2\Delta_2 \left(> 0 \text{ або} < 0\right);$$

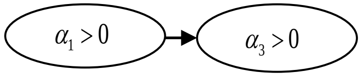
$$\alpha_3 = 2\Delta_1 - \Delta_2 \left(> 0 \text{ або} < 0\right),$$

які необхідно вирішити.

Слід зазначити, що для вищих вимірностей $n > 4$, також розв'язується три α-питання, оскільки такі гіперплощини, як грані, присутні в многограннику більшої вимірності.

Побудуємо гамільтонів шлях загального переставного многогранника, враховуючи все вище зазначене, і позначимо на схемі α-питання.

На схемі якщо $\alpha_i > 0$, то напрями стрілки зберігається. Ці питання зберігають деяку залежність, яку можна позначити співвідношеннями:

1) Якщо 

$\alpha_2 = ?$

2) Якщо $\alpha_1 > 0 \rightarrow \alpha_2 < 0$ $\quad \alpha_3 = ?$

3) Якщо $\alpha_1 = 0 \rightarrow \alpha_2 < 0 \rightarrow \alpha_3 > 0$

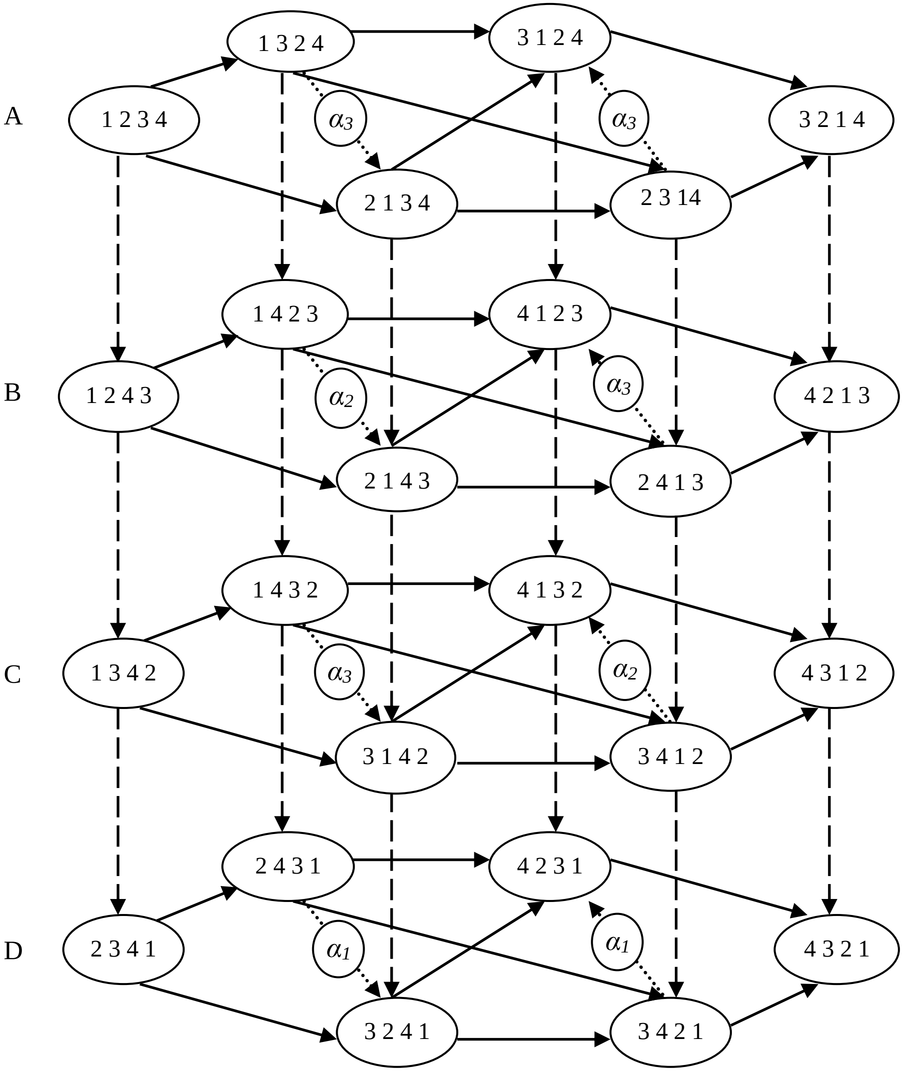


Рис. 4.4. Гамільтонов шлях і α-питання

Лема 4.3. Для визначення гамільтонова шляху для точок множини перестановок $P(A)$ по значеннях цільової функції $F(x)$ при $n \geq 4$, необхідно вирішити три α-питання.

Доведення. Проводимо по індукції:

1) для $n = 4$ лема виконується, оскільки розглянута задача на многограннику розмірністю 4;

2) для $n = 5$, лема так само виконується, оскільки в множині перестановок $P(A)$ розглядається 5!=120 точок, які розташовані на 5 гіперплощинах вигляду **A** (рис. 4.5) і містять по 24 точки кожна. Схематично це можна зобразити так:

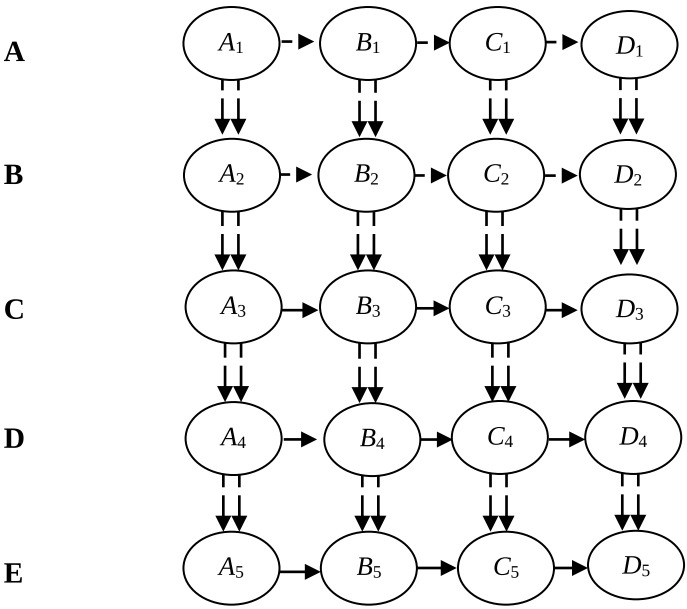


Рис. 4.5. Співвідношення між гіперплощинами

Відповідно, необхідно розглядати α-питання всередині кожної гіперплощини **A, B, C, D, E,** які мають вид рис. 4.2.

3) для n розмірності матимемо ту ж ситуацію, що і у попередньому випадку, тобто переставний многогранник завжди міститиме 3-грані вигляду A, тому є необхідність розглядати α-питань, що і вимагалося довести.

Слід зазначити, що розв’язання α-питань дає можливість визначити співвідношення між точками множини перестановок, що лежать на одній з гіперплощин. Але це не дає однозначної відповіді про співвідношення між точками, що лежать на різних гіперплощинах. Тому необхідно розглянути так звані *ß*-питання.

Означення 4.2. Назвемо *ß$_i$*-питаннями, питання, які розв’язуються для визначення гамільтонова шляху між гіперплощинами і встановлення співвідношень між точками множини перестановок $P(A)$, що розміщені на різних гіперплощинах *A, B, C, D*.

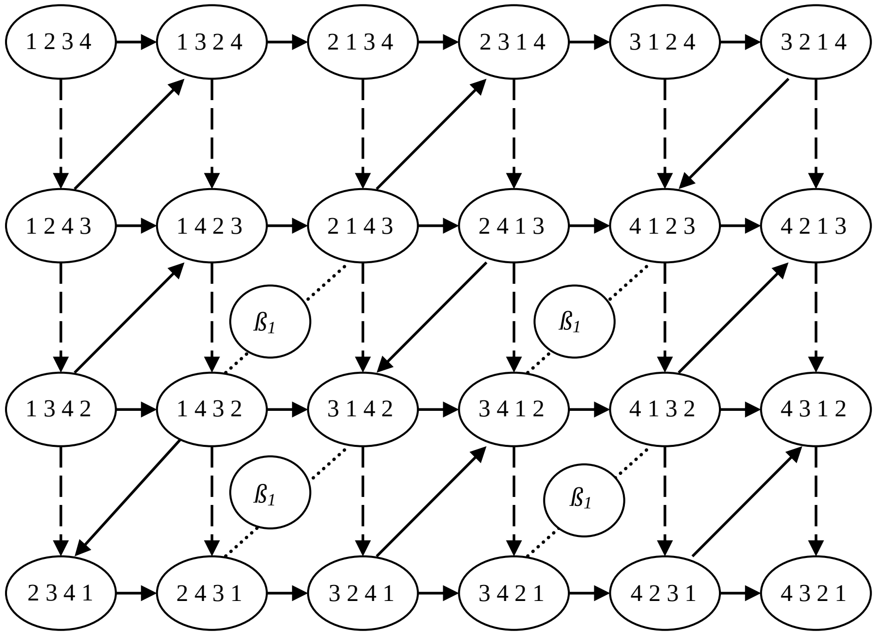


Рис. 4.6. Схема побудови гамільтонова шляху з врахуванням *ß$_i$*-питань

Лема 4.4. Для встановлення зв’язків між гіперплощинами і побудови гамільтонового шляху точок множини перестановок $P(A)$ необхідно розв’язати *ß$_i$*-питання.

Сформулюємо схему алгоритму знаходження аргументу цільової функції – точки множини перестановок $P(A)$ по значенню цільової функції.

Для формування алгоритму на вході необхідно задати вимірність мультимножини *A*, для формування множини перестановок $P(A)$, коефіцієнти цільової функції і значення функції $F(x)$.

На виході одержимо: *t* – точка, яка визначає відповідне значення задачі, тобто $y'' = F(t)$ – значення цільової функції в цій точці, час роботи алгоритму *T*.

Алгоритм

Покладемо значення цілочисельної змінної $s = 0$, яка визначає кількість кроків в задачі.

Початковий крок. Задаються параметри для формування даних задачі: вводяться – *m*, *n*:

1) *A* мультимножина, яка визначає множину перестановок $P(A)$;

2) коефіцієнти цільової функції *cj*, $\forall j \in \in N_m$;

3) визначається значення цільової функції $y = F(x)$.

Крок 1. Формується цільова функція

$$F(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_m x_m.$$

Крок 2. Генеруються всі перестановки з мінімальним числом транспозицій сусідніх елементів згідно [95]:

а) елементи множини *A* запам'ятовуються у вигляді елементів масиву $P = P[1], \ldots, P[n]$;

б) застосовується до масиву $P = P[1], \ldots, P[n]$ елементарна операція, за допомогою якої здійснюється поелементна транспозиція, тобто обмін значеннями змінних $P[i]$ і $P[j]$ де $1 \le i, j \le n$: $P[i] :=: P[j]$.

Крок 3. Визначається, згідно затвердженню 1 значення цільової функції: $\overline{y} = max\, F(x)$ і $\underline{y} = min\, F(x)$.

Крок 4. Шукаємо мінімальні значення цільової функції $y = F(x)$ на гранях $(n-1)$.

Крок 5. Порівнюємо мінімальні значення із заданим $y'' = F(x)$, якщо є таке, яке йому рівне, то розв'язання знайдене інакше переходь на наступний крок алгоритму.

Крок 6. Визначаємо проміжок значень

$$F(\overline{x}) \le F(x) \le F(\overline{\overline{x}}).$$

Крок 7. За допомогою методу дихотомії здійснюємо перехід на проміжок меншого діапазону і повертаємося на крок 4.

Дані результати стосуються множини перестановок без повторень, але їх можна узагальнити на випадок перестановок з повтореннями.

Приклад 4.2. Нехай, дана множина $A=\{1,2,2,4\}$, за допомогою якого утворюється множина перестановок з повтореннями $P_{nk}(A)$. Визначена функція

$$F(x)=c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3+c_4x_4,$$

коєфіциенти якій впорядковані таким чином $c_1 \le c_2 \le c_3 \le c_4$ і приймають значення $\{1,2,3,4\}$, а $y^* = F(x^*)$ значення функції в деякій крапці.

Необхідно знайти

$$x^* = arg\,extrF(x), \text{ де } x^* \in P(A).$$

Розв'язання. Як відомо $\Pi(A)=conv\,P_{nk}(A)$. Представимо розкладання графа переставного многогранника $\Pi(A)$ по гіперплощинах, де виділено зафіксований елемент для функції. Згідно твердженню 1 і умові впорядкування коефіциентов, у вершині знаходиться точка, в якій досягається максимальне значення цільової функції.

На рис. 4.7 розглядається гіперплощина *A* яка задається рівнянням $x_4 = 4$, а решта трьох цифр переставляється між собою.

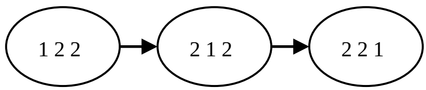
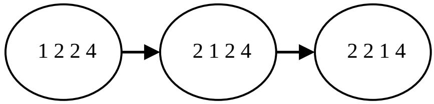


Рис. 4.7. Гіперплощина *A*

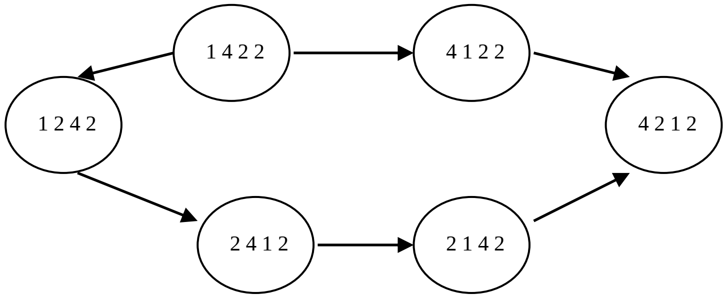
Стрілки указують перехід від точки до точки по убуванню значень цільових функцій. Слід зазначити, що практично всі зв'язки визначені, але між сусідніми елементами всередині (на рис. 4.7) зв'язок необхідно вивчити, тоді можна буде представити повний гамільтонів шлях на графі переставного многогранника.

Відповідно можна побудувати гіперплощину *B*, яка буде представлена рівнянням $x_4 = 2$ і містити по шість крапок. Позначимо ці гіперплощині 3- грані. Помітимо, що всі ці грані лежать на гіперграні вигляду $x_1+x_2+x_3+x_4=1+2+2+4$. Позначимо її символом *A*. Тоді $A = A \bigcup B \bigcup C$, а на рис. 4.8 гіперплощина **A** має вигляд.

A.



B.



C.

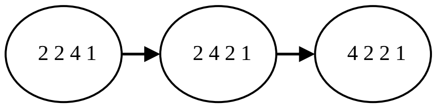


Рис 4.8. Гіперплощина **A**

Слід зазначити, що кількість повторень в загальній множині перестановок $P_{nk}(A)$ приводить до «склеювання» гіперплощин, на яких розміщені точки.

Визначимо значення цільової функції в кожній вершині многогранника і побудуємо гамільтонов шлях, а також дослідимо взаємозв'язки між гіперплощинами.

$$F(a_1) = 1\cdot1 + 2\cdot2 + 3\cdot2 + 4\cdot4 = 1 + 4 + 6 + 16 = 27$$

$$F(a_2) = 1\cdot2 + 2\cdot1 + 3\cdot2 + 4\cdot4 = 2 + 2 + 6 + 16 = 26$$

$$F(a_3) = 1\cdot2 + 2\cdot2 + 3\cdot1 + 4\cdot4 = 2 + 4 + 3 + 16 = 25$$

$$F(a_4) = 1\cdot1 + 2\cdot2 + 3\cdot4 + 4\cdot2 = 1 + 4 + 12 + 8 = 25$$

$$F(a_5) = 1\cdot1 + 2\cdot4 + 3\cdot2 + 4\cdot2 = 23$$

$$F(a_6) = 1\cdot4 + 2\cdot1 + 3\cdot2 + 4\cdot2 = 20$$

$$F(a_7) = 1\cdot4 + 2\cdot2 + 3\cdot1 + 4\cdot2 = 19$$

$$F(a_8) = 1\cdot 2 + 2\cdot 2 + 3\cdot 1 + 4\cdot 4 = 25$$

$$F(a_9) = 1\cdot 2 + 2\cdot 4 + 3\cdot 1 + 4\cdot 2 = 21$$

$$F(a_{10}) = 1\cdot 2 + 2\cdot 2 + 3\cdot 4 + 4\cdot 1 = 22$$

$$F(a_{11}) = 1\cdot 2 + 2\cdot 4 + 3\cdot 2 + 4\cdot 1 = 20$$

$$F(a_{12}) = 1\cdot 4 + 2\cdot 2 + 3\cdot 2 + 4\cdot 1 = 18$$

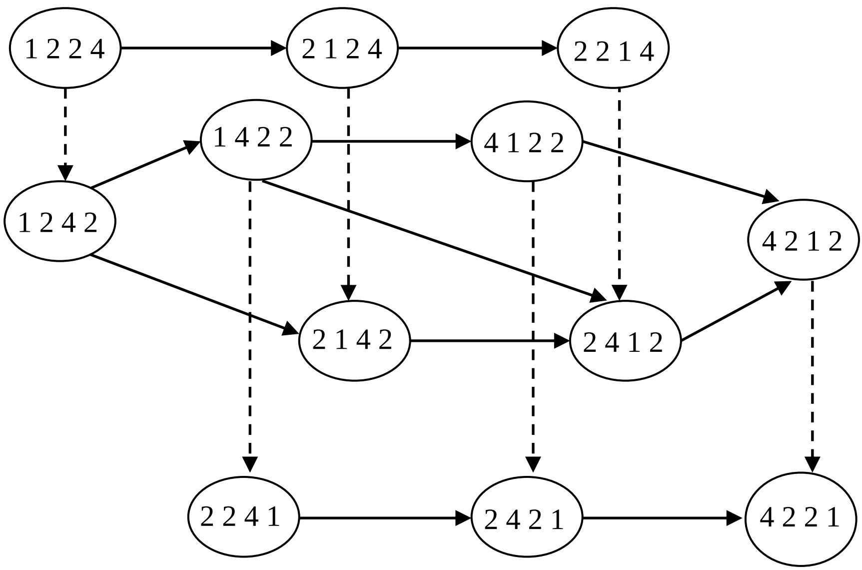


Рис. 4.9. Розкладання точок множина перестановок з повтореннями по значеннях цільової функції

Складемо схему, яка буде відображати розташування точок множини перестановок з повтореннями $P_{nk}(A)$ по значенню цільової функції на гіперплощинах *A, B, C* потім складемо загальне співвідношення і зобразимо гамільтонів шлях по всьому переставному многограннику $M(A)$.

Розглянемо гіперплощину **A** (рис. 4.8) і точки, між якими необхідно встановити зв'язок. Тому обчислимо співвідношення:

$$\begin{array}{rrrr} 1 & 2 & 2 & 4 \\ - & & & \\ 2 & 1 & 2 & 4 \\ \hline -1 & +1 & 0 & \end{array} = \Delta_1 - \Delta_2 = 0,$$

$$\begin{array}{rrrr} 2 & 1 & 2 & 4 \\ - & & & \\ 2 & 2 & 1 & 4 \\ \hline 0 & -1 & +1 & \end{array} = -\Delta_1 + \Delta_2 = 0.$$

Позначимо питання $\alpha_1 = \Delta_1 - \Delta_2$.

Тоді, розміщення точок на гіперплощині А по значенню цільової функції відповідає рис. 4.7. Аналогічна ситуація і на гіперплощині С:

C. $\quad 2\,2\,4\,1 \rightarrow 2\,4\,2\,1 \rightarrow 4\,2\,2\,1$

Розглянемо гіперплощину *B* (рис. 4.8), для точок якої складемо співвідношення для таких пар вершин

$$\begin{array}{rrrr} 1 & 4 & 2 & 2 \\ - & & & \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ \hline -1 & +3 & -2 & \end{array} = \Delta_1 - 2\Delta_2 = -\Delta_2 < 0$$

$$\begin{array}{rrrr} 4 & 1 & 2 & 2 \\ - & & & \\ 2 & 4 & 1 & 2 \\ \hline +2 & -3 & +1 & \end{array} = -2\Delta_1 + \Delta_2 = -\Delta_1 < 0$$

На гіперплощині *B* виникають питання $\alpha_1 = \Delta_1 - 2\Delta_2$ і $\alpha_2 = -2\Delta_1 + \Delta_2$. Тому гамільтонів шлях на *B* має вигляд:

B. $\quad 1\,2\,4\,2 \rightarrow 2\,1\,4\,2 \rightarrow 1\,4\,2\,2 \rightarrow 2\,4\,1\,2 \rightarrow 4\,1\,2\,2 \rightarrow 4\,2\,1\,2$

При розв’язуванні α_i-питань, також слід зазначити, що простежується залежність між точками, які знаходяться на різних гіперплощинах.

Відмітимо, що на гіперплощинах *A* і *B* є точки, для яких виконується наступне співвідношення:
$$\begin{array}{rrrr} 2 & 2 & 1 & 4 \\ - & & & \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ \hline +1 & 0 & -3 & \end{array}.$$

В результаті вище висловлених міркувань, точки на гіперплощинах *A* і *B* можна розкласти в наступний ланцюжок, залежно від значень цільової функції:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} (1\ 2\ 2\ 4) & \to & (2\ 1\ 2\ 4) & \to & (2\ 2\ 1\ 4) & \to & (1\ 2\ 4\ 2) & \to & (2\ 1\ 4\ 2) & \to & (1\ 4\ 2\ 2) & \to \\ 27 & & 26 & & 25 & & 24 & & 23 & & 22 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} (2\ 4\ 1\ 2) & \to & (4\ 1\ 2\ 2) & \to & (4\ 2\ 1\ 2) \\ 21 & & 20 & & 19 \end{array}$$

Розглянемо точки на гіперплощині *C*, зокрема (2 1 4 2), (1 4 2 2), оскільки
$$\begin{array}{rrrr} 2 & 1 & 4 & 2 \\ - & & & \\ 1 & 4 & 2 & 2 \\ \hline +1 & -3 & 2 & \end{array} = -2\Delta_1 + \Delta_2 = -\Delta_1 < 0,$$
те значення в (2 1 4 2) більше значення в точці (1 4 2 2).

У даній ситуації розглядається питання $\alpha_2 = -2\Delta_1 + \Delta_2$.

Аналогічно із значеннями в точка (4 1 3 2) і (3 4 1 2), оскільки
$$\begin{array}{rrrr} 4 & 1 & 2 & 2 \\ - & & & \\ 2 & 4 & 1 & 2 \\ \hline +2 & -3 & +1 & \end{array} = -\Delta_1 + 2\Delta_2 = \Delta_2 > 0.$$
Це питання $\alpha_2 = -\Delta_1 + 2\Delta_2$.

Якщо розглядати відношення точок з різних гіперплощин, то значення в точці (1 2 4 2) з *B* рівно значенню в точці (1 4 2 2) з *B*, оскільки

$$\begin{array}{r} 1\quad 2\quad 4\quad 2 \\ - \\ 1\quad 4\quad 2\quad 2 \\ \hline -2\quad 2\quad 0 \end{array} = \Delta_2 - \Delta_3 = 0 .$$

В результаті розрахунків одержимо гамільтонову ланцюг всього графа переставного многогранника і впорядкування всіх значень лінійної функції $F(x)$ у порядку їх убування для точок гіперплощин *A*, *B*, *C*:

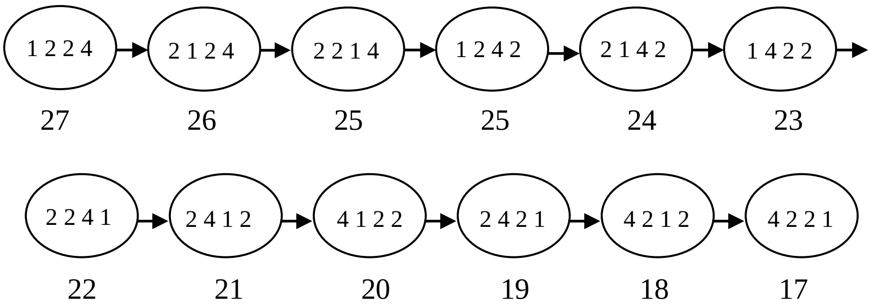


Рис. 4.10. Гамільтонів шлях після всіх значень лінійної цільової функції $F(x)$

4.3. Приклади побудови графів многогранників

Приклад 4.3. Нехай дано $A=(1,1,3,3)=\left(1^2,3^2\right)$. Тут $n=4$, $k=2$, $r_1=2$, $r_n=r_2=2$. Система обмежень переставного многогранника $M(A)$ має вигляд:

$$x_1 \geq 1;$$

$$x_2 \geq 1;$$

$$x_3 \geq 1;$$

$$x_4 \geq 1;$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 5;$$

$$x_1 + x_2 + x_4 \geq 5;$$

$$x_1 + x_3 + x_4 \geq 5;$$

$$x_2 + x_3 + x_4 \geq 5;$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8.$$

Визначимо значення цільової функції $f(x) = 1x_1 + 2x_2 + 3x_2 + 4x_4$ у вершинах многогранника $M(A)$. Вершини многогранника розміщені на гіпергранях. Многогранник зображено на рис. 4.11. Кількість гіпергграней цього многогранника $\gamma(\Gamma_{k-2})=8$. Як видно з рис. 4.11, кількість гіпергграней, що проходять через одну і ту ж довільну його вершину рівне $\gamma(\Gamma(v)) = r_1 + r_2 = 4$.

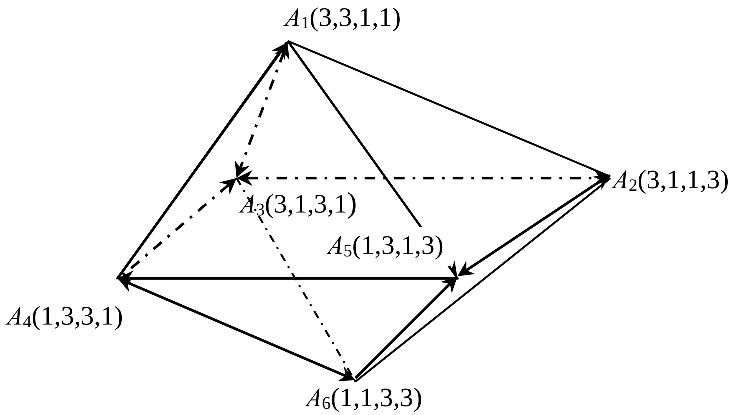


Рис. 4.11. Многогранник $M(A)$

Визначимо значення цільової функції в кожній вершині многогранника, тоді можна побудувати гамільтонів шлях по цих значеннях (рис. 4.11):

$$f(A_1) = 1\cdot 3 + 2\cdot 3 + 3\cdot 1 + 4\cdot 1 = 16$$

$$f\left(A_2\right)=1\cdot 3+2\cdot 1+3\cdot 1+4\cdot 3=20$$

$$f\left(A_3\right)=1\cdot 3+2\cdot 1+3\cdot 3+4\cdot 1=18$$

$$f\left(A_4\right)=1\cdot 1+2\cdot 3+3\cdot 3+4\cdot 1=20$$

$$f\left(A_5\right)=1\cdot 1+2\cdot 3+3\cdot 1+4\cdot 3=20$$

$$f\left(A_6\right)=1\cdot 1+2\cdot 1+3\cdot 3+4\cdot 3=24$$

Приклад 4.4.

Нехай дано мультимножину $A=\{1,1,2,4\}=\{1^2,1^1,4^1\}$, де $n=4$, $k=3$, $r_1=2$, $r_2=r_3=1$. Система обмежень многогранника $M\left(A\right)$ має вигляд:

$$x_1 \geq 1;$$

$$x_2 \geq 1;$$

$$x_3 \geq 1;$$

$$x_4 \geq 1;$$

$$x_1+x_2+x_3 \geq 4;$$

$$x_1+x_2+x_4 \geq 4;$$

$$x_1+x_3+x_4 \geq 4;$$

$$x_1+x_2+x_3+x_4 \geq 4;$$

$$x_1+x_2+x_3+x_4 = 8.$$

Визначимо значення цільової функції $f\left(x\right)=1x_1+2x_2+3x_2+4x_4$ у вершині многогранника $M\left(A\right)$.

Вершини многогранника розміщені на гіпергранях. Кількість гіперграней цього многогранника визначена як $\gamma\left(\Gamma_{k-2}\right)=C_4^1+C_4^3=8,$ тоді кількість гіперграней, які проходять через одну і ту ж довільну його вершину $\gamma\left(\Gamma\left(н\right)\right)=C_2^1+C_1^1=2+1=3$, Многогранник $M\left(A\right)$ схематично зображений на рис. 4.12.

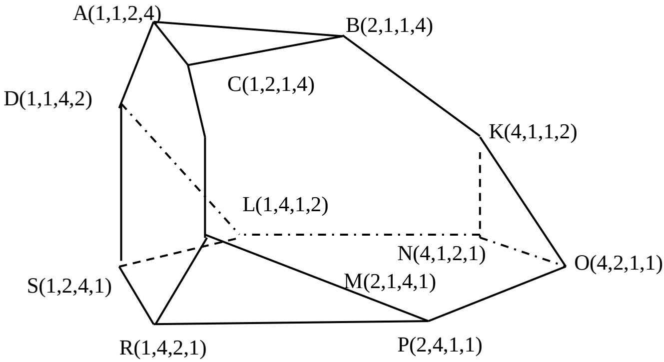


Рис. 4.12. Многогранник $M\left(A\right)$

Задано лінійну цільову функцію вигляду

$$f\left(x\right)=1x_1+2x_2+3x_3+4x_4$$

Визначимо значення цільової функції в кожній вершині многогранника:

а) на гіперграні $x_4=4$

$$f\left(1;1;2;4\right)=1\cdot1+2\cdot1+3\cdot2+4\cdot4=25$$

$$f\left(2;1;1;4\right)=1\cdot2+2\cdot1+3\cdot1+4\cdot4=23$$

$$f\left(1;2;1;4\right)=1\cdot1+2\cdot2+3\cdot1+4\cdot4=24$$

б) на гіперграні $x_4=2$

$$f\left(1;1;4;2\right)=1\cdot1+2\cdot1+3\cdot4+4\cdot2=23$$

$$f\left(1;4;1;2\right)=1\cdot1+2\cdot4+3\cdot1+4\cdot2=20$$

$$f\left(4;1;1;2\right)=1\cdot4+2\cdot1+3\cdot1+4\cdot2=17$$

в) на гіперграні $x_4 = 1$

$$f(1;2;4;4) = 1\cdot 1 + 2\cdot 2 + 3\cdot 4 + 4\cdot 1 = 21$$

$$f(1;4;2;4) = 1\cdot 1 + 2\cdot 4 + 3\cdot 2 + 4\cdot 1 = 19$$

$$f(2;1;4;1) = 1\cdot 2 + 2\cdot 1 + 3\cdot 4 + 4\cdot 1 = 22$$

$$f(4;1;2;1) = 1\cdot 4 + 2\cdot 1 + 3\cdot 2 + 4\cdot 1 = 20$$

$$f(4;2;1;1) = 1\cdot 4 + 2\cdot 2 + 3\cdot 1 + 4\cdot 1 = 16$$

$$f(2;4;1;1) = 1\cdot 2 + 2\cdot 4 + 3\cdot 1 + 4\cdot 1 = 17$$

Проаналізувавши отримані результати, можна сказати, що максимальні значення функції переважають в точках на гіперплощині $x_4 = 4$.

Приклад 4.5.

Дано $A=\{1, 2, 2, 3\}$. Тут $n=4, k=3, r_1 = 1, r_2=2, r_n = r_3 = 1$. Система обмежень многогранника $M(A)$ має вигляд

$$x_1 \ge 1$$
$$x_2 \ge 1$$
$$x_3 \ge 1$$
$$x_4 \ge 1$$

$$x_1 + x_2 \ge 3$$

$$x_1 + x_3 \ge 3$$

$$x_1 + x_4 \ge 3$$

$$x_2 + x_3 \ge 3$$
$$x_3 + x_4 \ge 3$$
$$x_1 + x_2 + x_3 \ge 5$$
$$x_1 + x_2 + x_4 \ge 5$$
$$x_1 + x_3 + x_4 \ge 5$$

$$x_2 + x_3 + x_4 \ge 5$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8$$

Вершини многогранника розміщені на гіпергранях. Як відомо з [27, 56], кількість гіперграней цього многогранника визначено як $\gamma\left(\Gamma_{k\text{-}2}\right)=C_4^1+C_4^2+C_4^3=14$, а кількість гіперграней, що з'єднуються в одній вершині $\gamma\left(\Gamma\left(н\right)\right)=C_1^1+C_2^1+C_1^1=4$. На многограннику задана лінійна функція $f\left(x\right)=1x_1+2x_2+3x_3+4x_4$.

$$f\left(x\right)=1x_1+2x_2+3x_3+4x_4$$

$$f\left(x_1\right)=1\cdot1+2\cdot2+3\cdot3+4\cdot2=22$$

$$f\left(x_2\right)=1\cdot2+2\cdot2+3\cdot3+4\cdot1=16$$

$$f\left(x_3\right)=1\cdot1+2\cdot3+3\cdot2+4\cdot2=21$$

$$f\left(x_4\right)=1\cdot2+2\cdot3+3\cdot2+4\cdot1=18$$

$$f\left(x_5\right)=1\cdot2+2\cdot1+3\cdot3+4\cdot2=21$$

$$f\left(x_6\right)=1\cdot1+2\cdot2+3\cdot2+4\cdot3=23$$

$$f\left(x_7\right)=1\cdot2+2\cdot1+3\cdot2+4\cdot3=22$$

$$f\left(x_8\right)=1\cdot3+2\cdot1+3\cdot2+4\cdot2=19$$

$$f\left(x_9\right)=1\cdot3+2\cdot2+3\cdot2+4\cdot1=17$$

$$f\left(x_{10}\right)=1\cdot2+2\cdot3+3\cdot1+4\cdot2=20$$

$$f\left(x_{11}\right)=1\cdot2+2\cdot2+3\cdot1+4\cdot3=22$$

$$f\left(x_{12}\right)=1\cdot3+2\cdot2+3\cdot1+4\cdot2=23$$

Многогранник $M\left(A\right)$ зображено на рис. 4.13.

Побудуємо граф многогранника $M\left(A\right)$, по якому можна представити гамільтонів шлях. Тоді розмір многогранника $M\left(A\right)$ рівний числу вершин многогранника $M\left(A\right)$.

Отже, якщо $M(A)$ переставний многогранник, то можна побудувати шлях в многограннику $M(A)$, враховуючи значення цільових функцій, який є гамільтоновим.

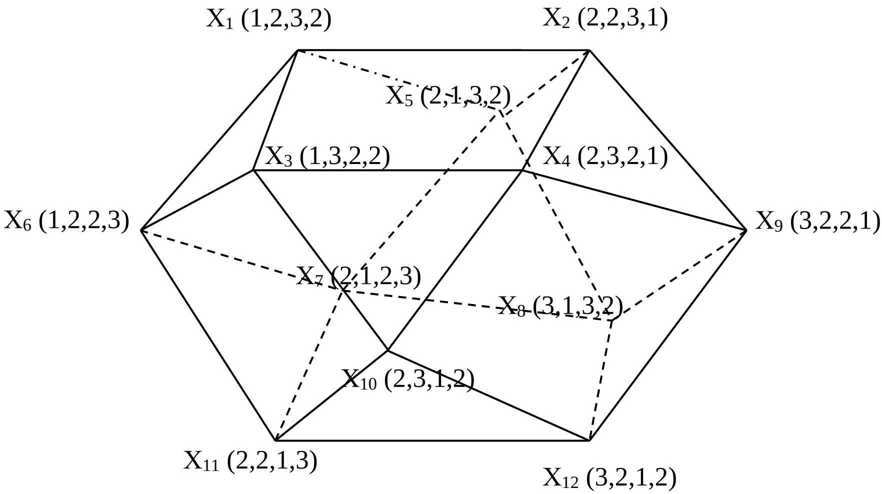


Рис. 4.13. Переставний многогранник $M(A)$

Досліджені складні комбінаторні задачі на множині перестановок. Розглянуті деякі властивості допустимої області евклідової комбінаторної задачі, яка має специфічні вхідні дані. Побудований і обгрунтований метод впорядкування значень лінійної функції на множині перестановок.

Подальший розвиток даної тематики буде направлений на реалізацію і адаптацію сформульованого методу, а також на розробку нових методів розв'язання комбінаторних оптимізаційних задач з урахуванням вхідних даних та властивостей інших комбінаторних множин.

РОЗДІЛ 5. ПОБУДОВА МОДЕЛЕЙ ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ ЯК ЗАДАЧ БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНОЇ КОМБІНАТОРНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ

Ряд прикладних задач зводяться до моделей задач з двома і більше цільовими функціями на комбінаторних множинах. Новим теоретичним підходом до розв’язування задач проектування автоматизованих систем управління та інформаційних технологій являються методи комбінаторної оптимізації, а зокрема моделі комбінаторних задач. Висока ступінь абстракції і розв’язання комбінаторних задач дозволяє використовувати їх при проектуванні технічних і програмних засобів комп’ютерних технологій та вирішити інші прикладні задачі.

Розглянемо прикладні задачі, моделями яких є задачі комбінаторної оптимізації з двома і більше цільовими функціями.

5.1. Задача максимізації швидкості передачі інформації та якості відображення

Розглянемо систему, яка здійснює накопичення інформації по предметних областях (портал) і переміщення інформації на ПК (сервери, робочі станції, термінали і т. д.).

Нехай маємо m предметних областей $A_i, i \in N_m$, кожна з яких має об’єм, який вимірюється певною кількістю одиниць інформації a_i^s s-го виду. Інформація розподіляється між n ПК $B_j, j \in N_n$, кожна з яких має об’єм, який потрібно не більше ніж b_j^s одиниць інформації певної предметної області s-го виду, де $s \in N_p$. Швидкість передачі одиниці s-*го* виду інформації з певної предметної області $A_i, i \in N_m$ на ПК $B_j, j \in N_n$, рівні υ_{ij}^k, а коефіцієнт якості представлення одиниці s-го виду інформації певної предметної області $A_i, i \in N_m$, за умови, що вона відображається якісно на ПК $B_j, j \in N_n$ дорівнює d_{ij}^k.

Потрібно мінімізувати сумарну швидкість передачі певного об’єму інформації x_{ij}^k, $k \in M_p, i \in N_m, j \in N_n$ з предметних областей $A_i, i \in N_m$, на ПК $B_j, j \in N_n$ та максимізувати сумарний якісний коефіцієнт завантаження.

Під сумарним якісним коефіцієнтом завантаження будемо розуміти суму якісних коефіцієнтів завантаження кожної предметної області порталу. Якість предметної області, як правило, оцінюється експертами (отримання і обробка експертних оцінок – окрема задача, яку в даному випадку не розглядають) однак апріорно можна сказати, що чим вища якість представлення предметної області, тим більший об'єм оперативної пам'яті для цього вимагається, тому будемо вважати, що якісний коефіцієнт завантаження визначається певним об'ємом оперативної пам'яті, заданими заздалегідь.

Побудуємо математичну модель даної задачі. Позначимо x_{ij}^{s} – об'єм інформації *s*-го виду, що накопичено в $A_i, i \in N_m$ та передається на $B_j, j \in N_n$. Тоді дана змінна x_{ij}^{s} може приймати будь-як значення з A, тобто бути елементом множини $A = \{a_1, ..., a_q\}$.

Розглянемо $P_{qk}(A)$ – загальна множина переставлень всіх елементів з мультимножини *A*, де q – число різних елементів у *A*. Зауважимо, що деякі елементи в *A* можуть бути нульовими.

Тобто *x* – це вектор, що є перестановкою з елементів мультимножини *A*. Усі такі перестановки утворять загальну множину перестановок $P_{qk}(A)$. У цьому полягає врахування переставних властивостей задачі. Зазначимо, що ці властивості складніше врахувати при розв'язуванні моделі, оскільки методи розв'язування комбінаторних багатокритеріальних задач практично не розроблено.

Математична модель задачі буде мати вид:

$$f_1(x) = \min_{x \in R^t} \sum_{S=1}^{q} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \vartheta_{ij}^{s} x_{ij}^{s},$$

$$f_2(x) = \max_{x \in R^t} \sum_{S=1}^{q} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} d_{ij}^{s} x_{ij}^{s},$$

за наступної комбінаторної умови, яка враховує переставні властивості області допустимих розв'язків задачі:

$$x = \left(x_{11}^{1}, x_{12}^{1}, ..., x_{1m}^{1}, x_{2m}^{2}, ..., x_{mn}\right) \in P_{qk}(A),$$

та при додаткових обмеженнях:

– на обсяги завантаження інформації відповідних предметних областей $\sum_{i=1}^{m} x_{ij}^{s} \le b_i^{s}$, де $i \in N_m, S \in N_q$, де $t = pmn$.

Представлена вище модель задачі дозволяє мінімізувати швидкість пошук потрібної інформації для користувача і зекономити його ресурси.

5.2. Задача мінімізації витрат з максимізацією прибутку зберігання

Нехай дано економічну систему, у якій здійснюється зберігання і транспортування продукції, *m* пунктів зберігання (склади, заготівельні підприємства і т. п.) $A_i, i \in N_m$, у кожному з який може зберігатися задана кількість a_i^s одиниць продукції *s-го* виду. Товар розподіляється між *n* пунктами споживання $B_j, j \in N_n$, кожному з який потрібно не менше ніж b_j^s одиниць продукції *s-го* виду, де $s \in N_p$. Витрати на перевезення одиниці товару *s-го* виду з пункту $A_i, i \in N_m$ у пункт $B_j, j \in N_n$, рівні c_{ij}^s, а прибуток від зберігання одиниці *s-го* виду товару в пункті $A_i, i \in N_m$, за умови, що вона споживається в пункті $B_j, j \in N_n$ дорівнює d_{ij}^s.

Потрібно визначити такий план перевезень товару x_{ij}^s, $k \in N_p, i \in N_m, j \in N_n$ з пунктів $A_i, i \in N_m$, у пункти $B_j, j \in N_n$, щоб сумарні транспортні витрати були мінімальними, а сумарний прибуток від зберігання продукції максимізувався.

Побудова математичної моделі: нехай y_i^s – кількість одиниць товару *s-го* виду, що зберігається в $A_i, i \in N_m$. Дана змінна y_i^s може приймати будь-як значення з $A: y_i^s \in \{a_1, ..., a_q\}$. Розглянемо $P_{qk}(A)$ – загальна множина переставлень всіх елементів *y* з мультимножини *A*, де *k* – число різних, а $pm = q$.

Тоді $y = \left(y_1^1, ..., y_m^1, ..., y_1^p, ..., y_m^p\right) = \left(y_1, ..., y_q\right) \in P_{qk}(A)$, де, нагадаємо *q* – кількість елементів, *k* – число різних елементів у *A*, а $P_{qk}(A)$ – загальна множина переставлень елементів мультимножини *A*. Математична модель задачі буде мати вигляд:

$$f_1(x) = \min_{x \in R^t} \sum_{k=1}^{p} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}^s x_{ij}^s ,$$

$$f_2(x)=\max_{x\in R^t}\sum_{k=1}^{p}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}d_{ij}^s x_{ij}^s ,$$

за наступної комбінаторної умови, яка враховує переставні властивості області допустимих розв'язків задачі: $y=\left(y_1^1,...,y_m^1,...,y_1^p,...,y_m^p\right)$ $=\left(y_1,...,y_q\right)\in P_{qk}\left(A\right)$, та за лінійних додаткових обмежень:

– на об'єм товару, що зберігається $\sum_{j=1}^{q}x_{ij}^s\le y_i^s$,

де $i\in N_m, s\in N_p$;

– на об'єм споживання $\sum_{i=1}^{m}x_{ij}^s\ge b_i^s$, де $i\in N_m, s\in N_p$; де $q=pmn$.

5.3. Задачі мінімізації собівартості перевезень та продукції

Задача 5.3.1. Задача мінімізації транспортних витрат з максимізацією прибутку виробництва.

Розглянемо економічну систему, у якій здійснюється виробництво й транспортування продукції. Маємо *m* пунктів виробництва (заводів, підприємств, фірм і т. п.) $A_i, i\in N_m$, у кожному з яких може N_m виготовлятися задана кількість a_i^s одиниць продукції *s*-го виду – одна величина із заданої мультимножини елементів A, тобто $a_i^s\in\left\{a_1,...,a_s\right\}=A, s\in N_p$, де $s=mp$. Продукція розподіляється між пунктами – *n* споживачами $B_j, j\in N_n$, кожному з який потрібно не менш ніж b_j^s одиниць продукції *s-го* виду, де $s\in N_p$. Транспортні витрати під час перевезення одиниці продукції *s-го* виду з пункту $A_i, i\in N_m$ в пункт $B_j, j\in N_n$, рівні c_{ij}^s, а прибуток від виробництва одиниці *s-го* виду продукції в пункті $A_i, i\in N_m$, за умови, що вона споживається в пункті $B_j, j\in N_n$ дорівнює d_{ij}^s. Витрати на навантаження й розвантаження продукції, що не залежать від i,j,s, попередньо визначені й рівні c_0, а частина загального прибутку від реалізації продукції, що не залежить від i,j,s, дорівнює d_0.

Визначити план перевезень продукції x_{ij}^s $s \in N_p$ $i \in N_m$ $j \in N_n$, з пунктів $A_i, i \in N_m$, у пункти $B_j, j \in N_n$, щоб сумарні транспортні витрати були мінімальними, а сумарний прибуток – максимізувався.

Побудуємо математичну модель даної задачі. Позначимо: y_i^s – кількість одиниць продукції s-го виду, що виробляється в $A_i, i \in N_m$ Дана змінна y_i^s може приймати будь-яке значення з мультимножини A, тобто бути елементом множини $A = \{a_1, ..., a_q\}$: $y_i^s \in \{a_1, ..., a_q\}$.

Розглянемо $P_{qk}(A)$ – загальну множину перестановок всіх елементів з мультимножини A, де k – число різних елементів в A, а $pm = q$. Оскільки для кожної змінної y_i^s визначається одне зі значень a_i^s (кожний раз інший елемент A) і навпаки, тобто y_i^s компонента перестановок з елементів мультимножини A, то: $y = \left(y_1^1, ..., y_m^1, ..., y_1^p, ..., y_m^p\right) \in P_{qk}(A)$, де, нагадаємо q – кількість елементів, k – число різних елементів в A, а $P_{qk}(A)$ – загальна множина перестановок елементів мультимножини A. Тоді d – це вектор, що є перестановкою елементів мультимножини A. Всі такі перестановки утворять загальна множина перестановок $P_{qk}(A)$. У цьому полягають комбінаторні, зокрема, перестановочні властивості задачі. Зазначимо, що ці властивості складніше врахувати при розв'язанні моделі, ніж дискретність змінних, оскільки методи розв'язання комбінаторних багатокритеріальних задач не достатньо розроблені.

Математична модель задачі буде мати вигляд:

Знайти точку, що доставляє екстремум наступним функціям:

$$f_1(x) = \min_{x \in R^t} \sum_{s=1}^{p} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}^s x_{ij}^s + c_0 ,$$

$$f_2(x) = \max_{x \in R^t} \sum_{s=1}^{p} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} d_{ij}^s x_{ij}^s + c_0 ,$$

при комбінаторній умові, що враховує переставні властивості області допустимих розв'язків задачі:

$$d = \left(y_1^1, ..., y_m^1, ..., y_1^p, ..., y_m^p\right) \in \left(y_1, ..., y_q\right) \in P_{qk}(A),$$

при лінійних додаткових обмеженнях:

– на об’єми перевезень $\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^{s} \le y_i^s$, де $i \in N_m, s \in N_p$;

– на об’єми споживання $\sum_{i=1}^{m} x_{ij}^{s} \ge b_i^s$, де $j \in N_n, s \in N_p$,

де $t = pmn$.

Зазначимо, що можуть бути враховані й іншого обмеження в цій моделі, якщо вони виникнуть.

Задача 5.3.2. Транспортна задача, що враховує витрату палива і час доставки вантажів.

Нехай у пунктах $A_1,...,A_m$ виробляють деякий однорідний продукт, причому обсяг виробництва в пункті A_i становить a_i одиниць, $i \in N_m$. Допустимо, що даний продукт споживають у пунктах $B_1,...,B_n$ а об’єм споживання в пункті B_j становить b_j одиниць $j \in N_n$. Припустимо, що з кожного пункту виробництва можливо транспортування продукту в будь-який пункт споживання, але врахуємо, що маршрут між двома пунктами може бути перевантажений транспортними засобами. Транспортні витрати по перевезенню одиниці продукції з пункту A_i в пункт B_j рівні $c_{ij}, i \in N_m$ $j \in N_n$.

Необхідно визначити такий план перевезень, при якому запити всіх споживачів B_j повністю задоволені, весь продукт із пунктів виробництва вивезений і сумарні транспортні витрати мінімальні, причому окремо виведений показник мінімізації витрати палива. Також, необхідно мінімізувати середній час доставки вантажів і максимізувати виробництво продукції за заданою технологією.

Сформулюємо математичну модель даної задачі. Позначимо цільові функції:

$f_1(x) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to min$ – вартість транспортних витрат при перевезенні;

$f_2(x) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} d_{ij} x_{ij} \to max$ – прибуток за заданою технологією;

$f_3(x) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} h_{ij} \to min$ – витрата палива;

$f_4(x) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} t_{ij} \to min$ – середній час доставки вантажів, де x_{ij} – фіксований об'єм продукту, що має обмеження:

$$X = \left(x_{11}, x_{12}, ..., x_{1n}, x_{2n}, ..., x_{2n}, ..., x_{m1}, ..., x_{mn}\right) \in P_{nk}\left(A\right).$$

Задача 5.3.3. Транспортна задача, що враховує зберігання зайвої продукції.

Маємо m пунктів виробництва $A_i, i \in N_m$, у кожному з який може виготовлятися задана кількість a_i^s одиниць продукції s-го виду – одна величина із заданої мультимножини елементів A, тобто $a_i^s \in \left\{a_1, ..., a_q\right\} = A, s \in N_p$. Продукція розподіляється між пунктами – n споживачами B_j, $j \in N_n$, кожному з який потрібний не менш чим b_j^s одиниць продукції s-го виду, де $s \in N_p$. Транспортні витрати під час перевезення одиниці продукції s-го виду з пункту $A_i, i \in N_m$ в пункт B_j, $j \in N_n$, рівні c_{ij}^s, а прибуток від виробництва одиниці *s-го* виду продукції в пункті, $A_i, i \in N_m$, за умови, що вона споживається в пункті B_j, $j \in N_n$ рівняється d_{ij}^s. Витрати на навантаження й розвантаження продукції, що не залежать від i, j, s, попередньо певні й рівні c_0, а частина загального прибутку від реалізації продукції, що не залежить від i, j, s, рівняється d_0.

Потрібно визначити такий план перевезень x_{ij}^s $s \in N_p$, $i \in N_m$, $j \in N_n$, з пунктів $A_i, i \in N_m$ у пункти B_j, $j \in N_n$, щоб сумарні транспортні витрати були мінімальними, а сумарний прибуток – максимізувався.

Позначимо:

c_{ij} – вартість курсування одиниці ємності транспортних засобів з пункту A_i до B_j;

x_{ij} – ємність транспортного засобу, що курсуючого від a_i до B_j;

s_j – вартість «зберігання» одиниці зайвої продукції в j-го споживача;

A_i – вартість одиниці транспортного засобу, що їде порожнім для i-го виробника.

Тоді позначимо:

$$z_j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij} - b_j \; ; \; z_j \geq 0$$

$$y_i = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} - a_i \,;\; y_i \geq 0 \text{, де } \sum a_i = \sum b_i \,.$$

Відповідно A – мультимножина, елементи якої утворюють множину перестановок $P_{qk}(A)$ і характеризують можливі ємності транспортних засобів, відповідно $x_{ij} \in P_{qk}(A)$. Згідно вище позначених змінних маємо цільові функції, що необхідно мінімізувати:

$$f_1(x^*) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to min$$

$$f_2(x^*) = \sum_{j=1}^{n} s_i z_i \to min$$

$$f_3(x^*) = \sum_{i=1}^{m} \sigma_i y_j \to min$$

$$x = (x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{ij}, \ldots, x_{mn}) \in P_{qk}(A)\,.$$

Розглянемо ще один приклад транспортної задачі, що враховує об’єм перевезень по даному маршруті.

Задача 5.3.4. Транспортна задача враховуючий об’єм перевезень продукції з одних пунктів в інші, при якому транспортні витрати мінімальні.

Нерідко транспортна задача має не єдине рішення. Наприклад, якщо маршрут, що з’єднує деякі два пункти, перевантажений транспортними засобами, те ще одним критерієм, що підлягає мінімізації на множині рішень транспортної задачі, може бути об’єм перевезень по даному маршруту. Тоді транспортна задача полягає у визначенні такого об’єму перевезень продукції з одного пункту в іншій, при якому транспортні витрати мінімальні.

Побудова математичної моделі полягає в наступному: нехай у пунктах $A_1,...,A_m$ виробляють деякий однорідний продукт, причому обсяг виробництва в пункті A_i становить a_i одиниць, $i \in N_m$. Допустимо, що даний продукт споживають у пунктах $B_1,...,B_n$, а об’єм споживання в пункті B_j становить b_j одиниць $j \in N_n$. Припустимо, що з кожного пункту виробництва можливо транспортування продукту в будь-який пункт споживання, але врахуємо, що маршрут з’єднуючий деякі два пункти, перевантажений транспортними засобами. Транспортні витрати по перевезенню одиниці продукції з пункту A_i в пункт B_j рівні $c_{ij}, i \in N_m$, $j \in N_n$.

Необхідно визначити такий план перевезень, при якому запити всіх споживачів B_j повністю задоволені, весь продукт із пунктів виробництва вивезенийі й сумарні транспортні витрати мінімальні, а також мінімізовані об'єми перевезень по перевантажених маршрутах.

Розглянемо математичну модель при $m = n = 2$.

$$f_1(x) = 2x_{11} + 3x_{12} + x_{21} + 2x_{22} \to min;$$

$$f_2(x) = x_{22} \to min;$$

$$x_{11} + x_{12} = 6, x_{11} + x_{21} = 3,$$

$$x_{12} + x_{22} = 4, x_{21} + x_{22} = 7, x_{11}, x_{12,} x_{21}, x_{22} \ge 0$$

Розв'яжемо спочатку звичайну транспортну задачу з критерієм $f_1(x)$. Для цього відкинемо, наприклад, останнє обмеження-рівність, оскільки воно є наслідком інших обмежень, а з першої й другої рівності знайдемо $x_{12} - x_{21} = 3$. Остаточно задача приймає наступний канонічний вид:

$$f_1(x) = 2x_{11} + 3x_{12} + x_{21} + 2x_{22} \to min;$$

$$x_{22} + x_{21} = 4, x_{11} + x_{21} = 3, x_{12} - x_{21} = 3$$

$$x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22} \ge 0$$

За один крок можна знайти оптимальний розв'язок $x_{11} = 0, x_{12} = 6, x_{21} = 3, x_{22} = 1$ й оптимальне значення, що рівне 23. Отже, друга задача, що відповідає мінімізації другого критерію $f_2(x)$ на множині допустимих розв'язків транспортної задачі, приймає вид

$$f_2(x) = x_{22} \to min;$$

$$2x_{11} + 3x_{12} + x_{21} + 2x_{22} = 23,$$

$$x_{22} + x_{21} = 4, x_{11} + x_{21} = 3, x_{12} - x_{21} = 3$$

$$x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22} \ge 0$$

Оптимальний розв'язок цієї задачі $x_{11} = 0$, $x_{12} = 6$, $x_{21} = 3$, $x_{22} = 1$ є шуканим розв'язком. Але задача ускладнюється, якщо додати комбінаторну умову, де $x = \left(x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{ij}, \ldots, x_{mn}\right) \in P_{qk}(A)$.

Всі вище сформульовані моделі задач є задачами багатокритеріальної комбінаторної оптимізації і можуть бути використані для розв'язування прикладних задач подібного типу.

ВИСНОВКИ

Інтерес до дослідження багатокритеріальних моделей дискретної оптимізації обумовлений їх широким застосуванням при розв'язанні важливих задач економіки, проектування складних систем, прийняття рішень в умовах невизначеності та ін. Останнім часом в області дослідження різних класів багатокритеріальних задач, розробки нових методів їх розв'язання отримані істотні результати. Але більш адекватним описом багатокритеріальної моделі є врахування комбінаторних властивостей.

Як відомо, більшість комбінаторних оптимізаційних задач можуть бути зведені до задач цілочислового програмування, що не завжди виправдано, оскільки при цьому втрачається можливість врахування комбінаторних властивостей задач.

Систематичне вивчення властивостей евклідових комбінаторних множин та їх дослідження описані в багатьох роботах. Поряд з добре відомими евклідовими комбінаторними множинами перестановок, розміщень, сполучень, розбиттів виділяються більш складні структури – полікомбінаторні множини. Підвищений інтерес до комбінаторних та полікомбінаторних конфігурацій обумовлений дослідженнями останніх років в області комп'ютерних технологій при створенні сучасних алгоритмів і програм для розв'язування оптимізаційних задач. Слід зазначити, що задачі евклідової комбінаторної оптимізації на комбінаторних та полікомбінаторних множинах невід'ємно пов'язані з комбінаторними многогранниками, що є опуклими оболонками таких множин, і їх властивостями. Властивості многогранників та їх графів дають можливість звести розв'язання задач на дискретних комбінаторних множинах до їх розв'язання на неперервній допустимій множині, отже виникає можливість застосовувати класичні методи неперервної оптимізації до розв'язання векторних комбінаторних задач на різних комбінаторних множинах, а також розвивати нові оригінальні методи їх розв'язання, використовуючи властивості комбінаторних множин і їх опуклих оболонок.

Дана робота продовжує дослідження багатокритеріальних задач на комбінаторних множинах перестановок, розміщень та полікомбінаторних структурах. Зокрема, на підставі встановленого взаємозв'язку між багатокритеріальними задачами на комбінаторних множинах і оптимізаційними задачами на неперервній допустимій множині, встановлено деякі структурні властивості допустимої області, множин різних видів ефективних розв'язків, а також сформульовано і доведено ряд теорем про умови оптимальності ефективних розв'язків розглянутих задач.

В роботі викладено властивості ефективних розв’язків евклідових багатокритеріальних задачах дискретної оптимізації на різних комбінаторних множинах, побудовано методи та алгоритми розв’язання таких задач оптимізації. Зокрема: запропонована постановка евклідових комбінаторних задач з багатьма критеріями на комбінаторних множинах перестановок, розміщень та полірозміщень, формульовані і доведені властивості ефективних розв’язків. Викладено метод та запропоновано алгоритми розв’язування класу задач з багатьма критеріями на перестановка, метод є подальшим розвитком методу відсікання для класу лінійних частково комбінаторних задач. Побудовані математичні моделі прикладних задач з багатьма критеріями на загальній множині перестановок як задач евклідової багатокритеріальної комбінаторної оптимізації.

Одержані властивості допустимих розв’язків з багатьма критеріями на перестановках та розміщеннях можуть використовуватись при розв’язуванні багатокритеріальних задач оптимізації на інших комбінаторних множинах, зокрема, поліпереставних.

Методи та розроблені алгоритми можуть бути застосовані для розв’язування задач з векторним критерієм та з додатковими обмеженнями на інших комбінаторних множинах, які мають аналогічну математичну модель, або зводяться до неї.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах. – М.: Высшая школа, 1986. – 319 с.
2. Бабич М.Д., Задирака В.К., Сергиенко И.В. Вычислительный эксперимент в проблеме оптимизации вычислений // Кибернетика и системный анализ. – 1999. – № 1 – С. 51–63
3. Базара М., Шетти К. Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы. – М.: Мир, 1982. – 584 с.
4. Баранов В.И., Стечкин Б.С. Экстремальные комбинаторные задачи и их приложения. – М.: Наука, 1989. – 160 с.
5. Белкин А.Р., Левин М.Ш. Принятие решений: комбинаторные модели аппроксимации информации. – М.: Наука, 1990. – 232 с.
6. Белов Ю.А. Об одном классе специальных перестановочных многогранников // Моделирование и анализ информационных систем. – 1996. – № 3 – С. 78–84.
7. Бондаренко В.А. Об одном классе многогранников и их использовании в комбинаторной оптимизации // Доклады АН (Россия). – 1993. – 328, №3 – С. 303–304
8. Бренстед А. Введение в теорию выпуклых многогранников / Пер. с англ. – М.: Мир, 1988. – 240 с.
9. Бурдюк В.Я., Семенов В.А. Разрешимые случаи новой комбинаторной задачи оптимизации // Кибернетика и систем. анализ. – 1999. – № 2. – С. 175–178.
10. Бурдюк В.Я., Сергеев С.О. О разбиении метрического пространства на непрерывные компоненты // Кибернетика и систем. анализ. – 1999. – № 5. – С. 185–190.
11. Бурштейн Ф.В., Корольов Э.С. Многокритериальные задачи принятия решений при неопределенности и риске. – В кн.: Теоретическая кибернетика. – Тбилиси, 1980. – С. 156–162.
12. Вейль Г. Элементарная теория выпуклых многогранников: Матричные игры. – М.: Физматгиз., 1961. – С. 254–273.
13. Вентцель Е.С. Исследование операций: задачи, принципы, методология. – М.: Наука, 1988. – 288 с.
14. Волошин О.Ф., Мащенко С.О. Теорія прийняття рішень: Навчальний посібник. – К.: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2006. – 304 с.
15. Воронин А.Н. и др. Векторная оптимизация динамических систем. – К.: Техніка, 1999. – 284 с.
16. Гамидов Р.Г., Фарбер М.Ш. О принятии решения в задачах многокритериальной оптимизации. – Изв. АН Азерб. РСР, сер. Физ.-тех. и матем. наук. – 1978. – № 3. – С. 11–16.

17. Гасс С. Линейное программирование. – М.: Физ-мат. литература, 1961. – 304 с.
18. Голуб Н.В., Гребенник И.В., Кузьменко В.М. Комбинаторный подход к построению технологических штриховых кодов минимальной длины // Радиоэлектроника и информатика. – 1998. № 3. – С. 66–71.
19. Гольдштейн А.Л. Исследование операций: многокритериальные задачи. – М.: Наука, 1995.
20. Гордон В.С., Шафранский Я.М. К вопросу минимизации функций на множестве перестановок частично упорядоченых элементов // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1979. – № 2. – С. 122–124.
21. Гудман С., Хидетниеми С. Введение в разработку и анализ алгоритмов. – М.: Мир, 1981. – 368 с.
22. Дегтярев Ю.И. Исследование операций: Учебник для вузов. – М.: ВШ,1986.
23. Донец Г.А., Шулинок И.Э. О сложности алгоритмов поиска в глубину на модульных графах // Теорія оптимальних рішень. – 2002. – № 1. – С. 105–110.
24. Донец Г.А. Алгоритмы раскраски плоских графов // Теорія оптимальних рішень. – 2006. – № 5. – С. 134–143.
25. Донец Г.А., Самер И.М. Альшаламе Решение задачи о построении линейной мозаики // Теорія оптимальних рішень. – 2005. – № 4. – С. 15–24.
26. Емеличев В.А. Дискретная оптимизация. Последовательные схемы решения I, II // Кибернетика. – 1971. – № 6. – С. 109–121; 1972. – № 2. – С. 92–103.
27. Емеличев В.А., Ковалев М.М., Кравцов М.К. Многогранники, графы, оптимизация. – М.: Наука, 1981. – 344 с.
28. Емеличев В.А., Бердышева Р.А. О радиусах устойчивости, квазиустойчивости и стабильности векторной траекторной задачи лексикографической оптимизации // Дискретная математика. – 1998. – Т. 10, вып. 1. – С. 20–27.
29. Емеличев В.А., Бердышева Р.А. Об условиях устойчивости векторной траекторной задачи лексикографической дискретной оптимизации // Кибернетика и системный анализ. – 1998. – № 6. – С. 120–127.
30. Емеличев В.А., Перепелица В.А. Сложность дискретных многокритериальных задач // Дискретная математика. – 1994. – Вып. 1, 6. – С. 3–33.
31. Емец О.А. Задачи оптимизации на евклидовом полиперестановочном множестве с повторениями: свойства допустимого множества // В кн.: Методы и программные средства оптимизации,

моделирования и создания вычислительных систем: Сб. научн. тр. / АН УССР. Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова; Редкол.: Сергиенко И. В. (отв. ред.) и др. – К., 1990. – С. 22–24.
32. Емец О.А. Комбинаторная модель и приближенный метод с априорной оценкой решения оптимизационной задачи размещения разноцветных прямоугольников // Экономика и матем. методы. – 1993. – Т.29, вып. 2. – С. 294–304.
33. Емец О.А. Множество сочетаний с повторениями, отображенное в R^k, и свойства задач оптимизации на нем // Доклады АН УССР. – 1991. – № 4. – С. 69–72.
34. Емец О.А. Об одном методе отсечения для задач комбинаторной оптимизации // Экономика и матем. методы. – 1997. – Т. 33. – вып. 4. – С. 120–129.
35. Емец О.А. Об экстремальных свойствах недифференцируемых выпуклых функций на евклидовом множестве сочетаний с повторениями // Український математичний журнал – 1994. – Т. 46. – № 6. – С. 680–691.
36. Емец О.А., Барболина Т.Н. Решение задач евклидовой комбинаторной оптимизации методом построения лексикографической эквивалентности // Кибернетика и системный анализ. – 2004. – № 5. – С. 115–125.
37. Емец О.А., Барболина Т.Н. Решение линейных задач оптимизации на размещениях методом отсечений // Кибернетика и систем. анализ. – 2003. – № 6. – С. 131–141.
38. Емец О.А., Барболина Т.Н., Черненко О.А. Решение задач оптимизации с дробно-линейными целевыми функциями и дополнительными ограничениями на размещениях // Кибернетика и систем. анализ. – 2006. – № 5. – С. 79–85.
39. Емец О.А., Емец Е.М. Моделирование некоторых инвестиционных задач с помощью евклидовой комбинаторной оптимизации // Экономика и матем. методы. – 2000. – Т. 36. – № 2. – С. 141–144.
40. Емец О.А., Емец Е.М., Колечкина Л.Н. Использование метода отсечений при раскрое // Радиоэлектроника и информатика. – 1998. – № 3. – С. 114–117.
41. Емец О.А., Колечкина Л.Н. Решение задач оптимизации с дробно-линейными целевыми функциями и дополнительными линейными ограничениями на перестановках // Кибернетика и систем. анализ. – 2004. – № 3. – С. 30–43.
42. Емец О.А., Недобачий С.И., Колечкина Л.Н. Неприводимая система ограничений комбинаторного многогранника в дробно-

линейной задаче оптимизации на перестановках // Дискретная математика. – 2001. – Т. 13. – № 1. – С. 110–118.
43. Емец О.А., Роскладка А.А. Алгоритмическое решение двух параметрических задач оптимизации на множестве сочетаний с повторениями // Кибернетика и системный анализ. – 1999. – № 6. – С. 160–165.
44. Емец О.А., Роскладка Е.В. Решение некоторых евклидовых комбинаторных задач оптимизации методом динамического программирования // Кибернетика и систем. анализ. – 2002. – № 1. – С. 138–146.
45. Еремин И.И., Астафьев Н.И. Введение в теорию линейного и выпуклого программирования. – М.: Наука, 1976. – 192 с.
46. Еремин И.И., Мазуров В.Д., Астафьев Н.И. Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования. – М.: Наука, 1983. – 336 с.
47. Ермольев Ю.М., Ляшко И.И., Михалевич В.С., Тюптя В.И. Математические методы исследования операций. – К.: Вища школа, 1979. – 312 с.
48. Ефимов Н.В., Розендорн Э.Р. Линейная алгебра и многомерная геометрия. – М.: Наука, 1970. – 528 с.
49. Ємець О.О., Ємець Є.М. Відсікання в лінійних частково комбінаторних задачах евклідової комбінаторної оптимізації // Доповіді НАН України. – 2000. – № 9. – С. 105–109.
50. Ємець О.О., Колєчкіна Л.М. Задачі комбінаторної оптимізації з дробово-лінійними цільовими функціями. – К.: Наукова думка, 2005. – 118 с.
51. Ємець О.О., Роскладка О.В. Задачі оптимізації на полікомбінаторних множинах: властивості та розв’язування. – Полтава: РВВ ПУСКУ, 2006. – 130 с.
52. Ємець О.О., Колєчкіна Л.М. Задача оптимізації на переставленнях з дробово-лінійною цільовою функцією: властивості множини допустимих розв’язків // Український математичний журнал. – 2000. – Т. 52. – № 12. – С. 1630–1640.
53. Ємець О.О., Колєчкіна Л.М. Моделювання деяких прикладних задач оптимізаційними задачами з дробово-лінійною функцією цілі на переставленнях // Волинський математичний вісник. – 2000. – № 7 –С. 116–119.
54. Ємець О.О., Колєчкіна Л.М. Розв’язування оптимізаційних задач з дробово-лінійною цільовою функцією на загальній множині переставлень // Вісник державного університету «Львівська політехніка», Прикладна математика, № 337. – Львів, 1998. – С. 317–320.

55. Ємець О.О., Колєчкіна Л.М., Недобачий С.І. Незвідна система обмежень многогранника допустимих розв'язків дробово-лінійної задачі оптимізації на переставленнях // В кн.: Матеріали конференції. VIII Міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука (11–14 травня 2000 р.). – К., 2000. – С. 300–301.
56. Ємець О.О., Колєчкіна Л.М., Недобачій С.І. Дослідження областей визначення задач евклідової комбінаторної оптимізації на переставних множинах. Ч. 1 – Полтава: Полтавський державний технічний університет ім. Юрія Кондратюка, ЧПКП «Легат», 1999. – 64 с.
57. Ємець О.О., Колєчкіна Л.М., Недобачій С.І. Дослідження областей визначення задач евклідової комбінаторної оптимізації на переставних множинах. Ч. 2. Про одну задачу оптимізації на переставленнях. – Полтава: Полтавський державний технічний університет ім. Юрія Кондратюка, ЧПКП «Легат», 1999. – 32 с.
58. Ємець О.О., Роскладка А.А. Про оцінки мінімумів цільових функцій при оптимізації на сполученнях // Український математичний журнал. – 1999. – Т. 51. – № 8. – С. 1118–1121.
59. Ємець О.О., Колєчкіна Л.М., Нагірна А.М. Розв'язування багатокритеріальної задачі з лінійними критеріями на множині переставлень // Вісник Хмельницького націон. ун-ту. – 2005. – № 5. – Ч. 1, Т. 2. – Техн. науки. – С. 17–19.
60. Ємець О.О., Роскладка О.В. Задачі оптимізації на полікомбінаторних множинах: властивості та розв'язування // Abstracts Seventh International School on Mathematical and Statistical Methods in Economic, Finance and Insurance (September, 8–13, 2003, Laspi, Crimea, Ukraine). – Kyiv, 2003. – P. 23.
61. Ємець О.О., Роскладка О.В., Недобачій С.І. Незвідна система обмежень для загального многогранника розміщень // Український матем. журн. – 2003. – Т. 55. – № 1. – С. 3–11.
62. Ємець О.О., Чілікіна Т.В Нелінійні задачі комбінаторної оптимізації на вершинно розташованих множинах та їх розв'язування // Динамические системы (межвед. науч. сб.). – 2004. Вып. 17. – Симферополь: Тавр. нац. ун-т. – С. 160–165.
63. Жуковин В.Е. Нечеткие многокритериальные модели принятия решений. – Тбилиси, 1988. – 231 с.
64. Жуковский В.И., Молотов В.С. Многокритериальное принятие решений в условиях неопределенности. – М., 1988. – 267 с.
65. Журавлев Ю.И. Локальные алгоритмы вычисления информации I, II // Кибернетика. – 1965. – № 1. – С. 12–19; 1966. – № 2. – С. 1–11.

66. Зайченко Ю.П. Исследование операций. Нечеткая оптимизация: Учеб. пособие. – К.: ВШ, 1991. – 198 с.
67. Исаченко А.Н., Емеличев Е.В. Многогранник одной задачи теории расписаний // В кн.: Вопросы планирования и экономико-математического моделирования. – Минск, 1980. – С. 117–119.
68. Карманов В.Г. Математическое программирование. – М.: Наука, 1986. – 286 с.
69. Кини Р.Л., Райфа Х. Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения. – М.: Радио и связь, 1981.
70. Клевачев В.И. О решении задачи дробно-линейного программирования // Кибернетика 1968. – № 6. – С. 27–31.
71. Ковалев М.М. Дискретная оптимизация. – Минск: Изд-во БГУ, 1977. – 192 с.
72. Ковалев М.М., Исаченко А.Н., Нгуен Нгиа. Линеаризация комбинаторных задач оптимизации // Доклады АН БССР. – 1978. – Т. 22. – № 10. – С. 869–872.
73. Козерацкая Л.Н. Множество строго эффективных точек задачи частично целочисленной векторной оптимизации – как характеристика ее устойчивости // Кибернетика и системный анализ. – 1997. – № 6. – С. 181–184.
74. Козерацкая Л.Н., Лебедева Т.Т., Сергиенко И.В. Задачи дискретной оптимизации: исследование устойчивости // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 1995. – № 1. – С. 12–30.
75. Козерацкая Л.Н., Лебедева Т.Т., Сергиенко И.В. Исследование устойчивости задач дискретной оптимизации // Кибернетика и системный анализ. – 1993. – № 3. – С. 78–93.
76. Колечкина Л.Н. Оптимальные решения многокритериальных комбинаторных задач на размещениях // Теорія оптимальних рішень. – 2007. – № 6. – С. 67–73.
77. Колечкина Л.Н. О нахождении Парето-оптимальных решений в многокритериальных комбинаторных задачах на множестве размещений // Теорія оптимальних рішень. – 2008. – № 7. – С. 109–116.
78. Колєчкіна Л.М., Недобачій С.І. Дослідження області визначення задачі комбінаторної оптимізації з дробово-лінійною функцією цілі на переставленнях // Збірник наукових праць Полтавського держ. пед. ін.-ту ім. В.Г. Короленка. Серія «фіз.-мат. науки», Випуск 3, Полтава – 1998. – С. 18–24.
79. Колєчкіна Л.М. Властивості задач комбінаторної оптимізації з дробово-лінійними цільовими функціями. Методи та алгоритми їх

розв’язання: Автореф. дис. канд. фіз.-мат. наук: 01.05.02 / НАН України. ІПМаш. – Харків, 2002. – 19 с.
80. Колєчкіна Л.М. Властивості задач комбінаторної оптимізації з дробово-лінійною цільовою функцією. Методи і алгоритми їх розв’язку. // В кн.: Матеріали конференції. Сьома Міжнародна конференція імені академіка М.Кравчука (14–16 травня 1998 р.). – К., 1998. – С. 223.
81. Колєчкіна Л.М. Задачі з дробово-лінійною функцією цілі та додатковими лінійними обмеженнями на загальній множині переставлень // Проблеми праці, економіки та моделювання: Збірник наук. праць / Технологічний університет поділля. – Хмельницький, 1998. – С. 116–117.
82. Колєчкіна Л.М. Про одну задачу комбінаторної оптимізації з дробово-лінійною функцією цілі на переставленнях // Збірник наукових праць Полтавського держ. пед. ін.-ту ім. В.Г. Короленка. Серія «фіз.-мат. науки», Випуск 3. – Полтава, 1998. – С. 32–35.
83. Колєчкіна Л.М., Нагірна А.М. Моделювання та розв’язування економічних задач оптимізації відносних показників з урахуванням комбінаторних властивостей розв’язку // Наук. вісті Нац. техн. ун-ту України «Київський політехнічний інститут». – 2006. – № 5. – С. 34–40.
84. Колєчкіна Л.М., Родіонова О.А. Многокритериальные комбинаторные задачи оптимизации на множестве полиразмещений // Кибернетика и системный анализ. – 2008. – № 2. – С. 152–160.
85. Колєчкіна Л.М., Родіонова О.А. Постановка задачі багатокритеріальної комбінаторної оптимізації на полірозміщеннях та підхід до розв’язання. // Радиоэлектроника и информатика. – 2007. – №. 1. – С. 84–88.
86. Колечкина Л.Н. Многокритериальные задачи на комбинаторном множестве полиразмещений: структурные свойства решений. // Intern. Book Series «Information science and computing», № 7, Supplement to Intern. Journal «Information Theories and Knowledge», Vol 2/2008. Institute of Information Theories and Applications FOI ITHEA. – Sofia, Bulgaria, 2008. – P. 180–186
87. Компьютер и задачи выбора / Автор предисл. Журавлев Ю.И. – М.: Наука, 1989. – 208 с.
88. Корбут А.А., Сигал И.Х., Филькенштейн Ю.Ю. Метод ветвей и границ: Обзор теории, алгоритмов, программ и приложений. – Math. Operationsforsch und Statist., Ser. Optimiz., 1977. – 8, № 2. – С. 253–280.

89. Корбут А.А., Финкельштейн Ю.Ю. Дискретное программирование. – М.: Наука, 1969. – 368 с.
90. Кудрявцев Е.М. Исследование операций в задачах, алгоритмах. – М.: Наука, 1984. – 270 с.
91. Лебедева Т.Т., Семенова Н.В Сергиенко Т.И. Устойчивость векторных задач целочисленной оптимизации: взаимосвязь с устойчивостью множеств оптимальных и неоптимальных решений // Кибернетика и системный анализ. – 2005. – № 4 – С. 90–100.
92. Лебєдєва Т.Т., Семенова Н.В., Сергієнко Т.І., Умови оптимальності та розв'язуваності в задачах лінійної векторної оптимізації з опуклою допустимою множиною // Доповіді НАНУ. – 2003. – № 10 – С. 80–85.
93. Левитская А.А. Одна комбинаторная задача в классе перестановок над кольцом Z_n вычетов по нечетному модулю n // Проблемы управления и информатики. – 1996. – № 5. – С. 99–108.
94. Лихтенштейн В.Е. Модели и методы дискретного программирования. – М.: Наука. 1971. – 240 с.
95. Липский В. Комбинаторика для программистов. – М.: Мир, 1988. – 200 с.
96. Лэсдон Л.С. Оптимизация больших систем. – М.: Наука, 1975. – 432 с.
97. Михалевич В.С., Сергиенко И.В., Шор Н.З. Исследование методов решения оптимизационных задач и их приложений // Кибернетика. – 1981. – № 4. – С. 89–113.
98. Михалевич В.С., Трубин В.А., Шор Н.З. Оптимизационные задачи производственно-транспортного планирования: Модели, методы, алгоритмы. – М.: Наука, 1986. – 264 с.
99. Михалевич В.С., Шкурба В.В. Последовательные схемы оптимизации в задачах упорядочения выполнения работ // Кибернетика. – 1966. – № 2. – С. 34–40.
100. Морозов В.В., Сухарев А.Г., Федоров В.В. Исследование операций в задачах и упражнениях. – М.: Высшая школа, 1986. – 276 с.
101. Новожилова М.В., Лазарева И.Е. Применение методологии множителей Лагранжа в комбинаторной задаче размещения прямоугольников // Кибернетика и системный анализ. – 1999. – № 3. – С. 141–147.
102. Новожилова М.В., Лазарева И.Е. Применение методологии непрерывной оптимизации в одной комбинаторной задаче геометрического проектирования с линейными ограничениями и функцией цели // Ин-т проблем машиностроения НАН Украины. – Харьков, 1997. – 29 с.; Деп. в ВИНИТИ 15.04.97, № 1257 – В97.

103. Ногин В.Д., Протодьяконов И.О., Евлампиев И.И. Основы теории оптимизации. – М.: Высшая школа, 1986. – 304 с.
104. Нурлыбаев А.Н. О графе перестановочного многогранника // Доклады АН Республики Казахстана. – 1992. – № 3. – С. 14–20.
105. Павлов О.А., Павлова Л.О. Принцип розпаралелювання обчислень як засіб підвищення ефективності ПДС-алгоритмів для важкорозв'язувальних комбінаторних задач // Наукові вісті НТУУ «КПІ». – 1997. – № 1. – С. 22–26.
106. Перепелица В.А., Сергиенко И.В. Исследование одного класса целочисленных многокритериальных задач // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1988. – 28, № 3. – С. 400–419
107. Подиновский В.В., Гаврилов В.М. Оптимизация по последовательно применяемым критериям. – М.: Сов. радио, 1975. – 192 с.
108. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. – М.: Наука, 1982. – 256 с.
109. Полищук Л.И. Анализ многокритериальных экономико-математических моделей. – М.: Наука, 1989. – 182 с.
110. Пономаренко Л.Д., Макмак П.М. Новые подходы к минимизации на перестановках при упаковке геометрических объектов // Вычислительная техника и машиностроение. – 1980. – № 4. – С. 8–14.
111. Пшеничный Б.Н., Ненахов Э.И., Кузьменко В.Н. Модифицированный метод отсечения для минимизации выпуклой функции // Кибернетика и системный анализ. – 1997. – № 6. – С. 142–149.
112. Пшеничный Б.Н., Ненахов Э.И., Кузьменко В.Н. Комбинаторный метод решения общей задачи выпуклого программирования // Кибернетика и системный анализ. – 1998. – № 4 – С. 121–134.
113. Рейегольд Э., Нивергельт Ю., Део Н. Комбинаторные алгоритмы. Теория и практика. – М.: Мир, 1980. – 476 с.
114. Реклейтис Г., Рейвиндран А., Рэгедел К. Оптимизация в технике: В 2-т. – М.: Мир, 1986. – Т 1. – 352 с.
115. Розенфельд Б.А. Многомерные пространства. – М.: Наука, 1966. – 647 с.
116. Рощин В.А., Семенова Н.В., Сергиенко И.В. Вопросы решения и исследования одного класса задач неточного целочисленного программирования // Кибернетика. – 1989. – № 2. – С. 42–47.
117. Семенова Н.В., Колечкина Л.Н., Нагирна А.М. Решение многокритериальных комбинаторных задач на перестановках // Кибернетика и системный анализ. – 2008. – № 3. – С. 158–172.
118. Семенова Н.В., Колечкина Л.Н., Нагирна А.Н Решение и исследование векторных задач комбинаторной оптимизации на мно-

жестве полиперестановок // Проблемы управления и информатики. – 2008. – № 6 – С. 26–41.
119. Сергиенко И.В. Математические модели и методы решения задач дискретной оптимизации. – К.: Наукова думка, 1988. – 472 с.
120. Сергиенко И.В. О некоторых направлениях и результатах работ в области математического программирования и системного анализа // Кибернетика и системный анализ. – 1995. – № 3. – С. 3–48.
121. Сергиенко И.В., Каспшицкая М.Ф. Модели и методы решения на ЭВМ комбинаторных задач оптимизации. – К.: Наук. думка, 1981. – 288 с.
122. Сергиенко И.В., Козерацкая Л.Н., Кононова А.А. Устойчивость и неограниченность задач векторной оптимизации // Кибернетика и системный анализ. – 1997. – № 1. – С. 3–10.
123. Сергиенко И.В., Козерацкая Л.Н., Лебедева Т.Т. Исследование устойчивости и параметрический анализ дискретных оптимизационных задач. – К.: Наукова думка, 1995. – 171 с.
124. Сергієнко І.В., Дейнека В.С. Високоточні алгоритми розв’язання спектральних задач з власним значенням в умовах спряження та в крайових умовах // Доп. НАН України. – 2001. – № 2. С. 74–80.
125. Сергиенко И.В., Рощин В.А. Метод неявного перебора для решения некоторых экстремальных задач на множествах // Обчислювальна та прикладна математика. Сер. Оптимізація. – 1996. – Вип. 80. – С. 106–118.
126. Сергиенко И.В., Шило В.П. Задачи дискретной оптимизации: проблемы, методы решения, исследования. – К.: Наук. думка, 2003. – 264 с.
127. Сергиенко И.В., Лебедева Т.Т., Рощин В.А. Приближенные методы решения дискретных задач оптимизации. – К.: Наук. думка, 1980. – 276 с.
128. Сергиенко И.В., Лебедева Т.Т., Семенова Н.В. О существовании решений в задачах векторной оптимизации // Кибернетика и системный анализ. – 2000. – № 6. – С. 39–46.
129. Сергиенко И.В., Михалевич М.В., Стецюк П.И., Кошлай Л.Б. Межотраслевая модель планирования структурно-технологических изменений // Кибернетика и системный анализ. – 1998. – № 3 – С. 3–17.
130. Сергиенко И.В., Рощин В.А., Семенова Н.В. Некоторые задачи целочисленного программирования с неоднозначно заданными данными и их решение // Пробл. управ. и информатики. – 1998. – № 6. – С. 116–123.

131. Сергієнко І.В. Інформатика в Україні: становлення, розвиток, проблеми. – К.: Наукова думка. – 1999. – 354 с.
132. Соболь И.М., Статников Р.Б. Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями. – М.: Наука, 1981.
133. Стецюк П.И. Об одной схеме методов отсечений. – К., 1995. – 34 с. (Препринт / НАН Украины ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова; 95–25).
134. Стоян Ю. Г. Об одном отображении комбинаторных множеств в евклидово пространство – Харьков, 1982. – 33 с. (Препринт / АН УССР. Ин-т проблем машиностроения; 173).
135. Стоян Ю.Г., Емец О.А. О комбинаторных задачах размещения прямоугольников // Экономика и мат. методы. – 1985. – № 5. – С. 64–69.
136. Стоян Ю.Г., Ємець О.О. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації. – К.: Ін-т систем. досліджень освіти, 1993. – 188 с.
137. Стоян Ю.Г., Ємець О.О., Ємець Є.М. Оптимізація на полі розміщеннях: теорія та методи. – Полтава: РВВ ПУСКУ, 2005. – 104 с.
138. Стоян Ю.Г., Новожилова М.В. Условия локальной оптимальности в нерегулярных нелинейных задачах геометрического проектирования // Доповіді НАН України. – 1998. – № 12. – С. 40–45.
139. Стоян Ю.Г., Соколовский В.З. Метод сужающихся окрестностей для минимизации функционалов, заданных на перестановках // Автоматика и вычислительная техника. – 1979. – № 3. – С. 44–48.
140. Стоян Ю.Г., Соколовский В.З. Решение некоторых многоэкстремальных задач методом сужающихся окрестностей. – К.: Наукова думка, 1980. – 208 с.
141. Стоян Ю.Г., Яковлев С.В. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования. – К.: Наукова думка, 1986. – 268 с.
142. Стоян Ю.Г., Ємець О.О., Ємець Є.М. Множини полірозміщень в комбінаторній оптимізації // Доповіді НАН України. – 1999. – № 8. – С. 37–41.
143. Стоян Ю.Г., Романова Т.Е., Евсеева Л.Г. Комбинаторная оптимизационная задача размещения прямоугольников с учетом погрешности исходных данных // Доповіді НАН України. – 1997. – № 7. – С. 56–60.
144. Стоян Ю.Г., Яковлев С.В., Емец О.А., Валуйская О.А. Построение выпуклых продолжений для функций, заданных на

гиперсфере // Кибернетика и системный анализ. – 1998. – № 2 – С. 27–37.
145. Супруненко Д.А. К задаче о бродячем торговце // Кибернетика. – 1975. – № 5. – С. 121–124.
146. Сытник В.Ф., Карагодова Е.А. Математические модели в планировании и управлении предприятиями. – К.: Вища школа, 1985. – 214 с.
147. Танаев В.С., Шкурба В.В. Введение в теорию расписаний. – М.: Наука, 1975. – 256 с.
148. Таха Х.А. Введение в исследование операций: В 2-х кн. – М.: Мир, 1985.
149. Фишберн П. Теория полезности для принятия решений. – М.: Наука, 1978.
150. Хачатуров В.Р. Апроксимационно-комбинаторный метод и некоторые его приложения // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1974. – Т. 14, № 6. – С. 1964–1987.
151. Чарин В.С. Линейные преобразования и выпуклые множества. – К.: Вища школа, 1978. – 191 с.
152. Черников С.Н. Линейные неравенства. – М.: Наука, 1968. – 488 с.
153. Чернов Ю.П., Абрашитова С.А. Разработка метода для решения транспортной задачи дробно-выпуклого программирования. – Моск. гос. текстил. акад. – М.: 1995 – 9 с. Деп. В ЦНИИТЭИлегпром 21.07.95, № 3607.
154. Чернов Ю.П., Ланге Э.Г. Задачи нелинейного программирования с удельными экономическими показателями. – Фрунзе: Илим. – 1978. – 290 с.
155. Чернов Ю.П., Ланге Э.Г. Применение метода последовательных расчетов для решения одного класса задач дробно-вогнутого программирования. // Математические методы решения экономических задач. – 1974. – № 7. – С. 32–35.
156. Шафранский Я.М. Об одном свойстве приоритето-порождающих функций // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. Наук. – 1981. – № 6. – С. 15–18.
157. Шварцман А.П. Об одном алгоритме дробно-линейного программирования. // Экономика и матем. методы. – 1965. – Т. 1, вып. 4. – С. 2–9.
158. Шибанов С.Е., Шило В.П. Многокритериальный подход к задаче оптимизации альтернативных маршрутных стратегий в ненадежной сети передачи данных // Численные методы и технология разработки пакетов прикладных программ. – К.: Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова НАНУ, 1990. – С. 19–23.

159. Шкурба В.В. Задача трех станков. – М.: Наука, 1976. – 96 с.
160. Шор Н.З., Соломон Д.И. Декомпозиционные методы в дробно-линейном программировании. – Кишенев: Штиинца, 1989. – 204 с.
161. Штойер Р. Многокритериальная оптимизация. Теория, вычисления и приложения. – М.: Радио и связь, 1992.
162. Яковлев С.В., Валуйская О.А. О минимизации линейной функции на вершинах перестановочного многогранника с учетом линейных ограничений // Доповіді НАН України. – 1999. – № 4. – С. 103–108.
163. Яковлев С.В., Гребенник И.В. Локализация решений некоторых нелинейных целочисленных задач оптимизации // Кибернетика и систем. анализ. – 1993. – № 5. – С. 116–123.
164. Arora S. R., Puri M.C. Enumeration Technique for the Set Covering Problem with a Linear Fractional Functional as its Objective Function // ZAMM – 1977. – Band 57, Heft 3. – P. 181–186
165. Chadha S.S. Dual for a linear fractional program with variable coefficients // Math. Repts Acad. Sci., Can. – 1995. – 17 № 1. – P. 43–48.
166. Chadha S.S., Heeg R.A. Duality for a family of nonlinear fractional programming problems // Math. Repts Acad.Sci., Can. – 1996. – 18, № 6. – P. 237–242.
167. Cooper C., Gilchrist R., Kovalenko I.N., Novakovic D. Deriving the number of “good” permutations, with applications to cryptography // Кибернетика и систем. анализ. – 1999. – № 5. – С. 10–17.
168. Gaiha P., Gupta S. Adjacent vertices on a permutohedron // SIAM J. Appl. Math. – 1977. – Vol. 32, № 2. – P. 323–327.
169. Kelley I.E. The cutting plane method for solving convex programs // SIAM I. – 1960. – V. 8. – P. 703–712.
170. Pacelli G. Optimization of a linear fractional function on a hypersphere of an affine space // J. Optimiz. Thery and Appl. – 1995. – 84, № 2. – P. 407–414.
171. Semenova N.V., Kolechkina L.M., Nagirna A.M. Vector combinatorial problems in a space of combinations with linear fractional functions of criteria // Intern. Journal “Information Theories and Applications”, 15. – 2008. – P. 240–245.
172. Vladimirova L.V. Multicriterial Optimization in Partical Beam Control Problem. Preprints of The Eleventh IFAC International Workshop, S.-Petersburg, 2000.

Перелік умовних позначень

Позначення	Що означає
A	Мультимножина
$P_{nk}(A)=P_{nk}$	Множина перестановок з повтореннями з *n* дійсних чисел, серед яких *k* різних
$\Phi(a)=\left(\Phi_1(a),\Phi_2(a),...,\Phi_e(a)\right)$	векторний критерій
$Z\left(\Phi,P_{nk}(A)\right)$	багатокритеріальна комбінаторна задача
$P\left(\Phi,P_{nk}(A)\right)$	Множина парето-оптимальних розв'язків (ефективних)
$S_l\left(\Phi,P_{nk}(A)\right)$	Множина оптимальних по Слейтеру (слабо ефективних)
$S_m\left(\Phi,P_{nk}(A)\right)$	Множина оптимальних по Смейлу (строго ефективних)
$M_{nk}(A)$	переставний многогранник
$Z(F,X)$	задача максимізації векторного критерію (при зануренню множини перестановок $P_{nk}(R)$ в евклідів простір R^n)
$A_{qk}^n(A)=A_{qk}^n$	Загальна множина розміщень
$M_{qk}^n(A)$	Загальний многогранник розміщень
$A_{qk}^{ns}(A,H)$	Множина полірозміщень
$M_{qk}^{ns}(A,H)$	Многогранник полірозміщень
$P_{nk}^s(A,H)$	Множина поліперестановок
$M_{nk}^s(A,H)$	Многогранник поліперестановок