ТЕОРІЯ ОПТИМАЛЬНИХ РІШЕНЬ

УДК 519.85

Л.Н. КОЛЕЧКИНА

О НАХОЖДЕНИИ ПАРЕТО-ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ В МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ КОМБИНАТОРНЫХ ЗАДАЧАХ НА МНОЖЕСТВЕ РАЗМЕЩЕНИЙ

Исследуются вопросы нахождения Парето-оптимальных решений и оценок в многокритериальных задачах комбинаторной оптимизации на множестве размещений. Описываются свойства решений и векторных оценок таких задач, а также применение этих свойств.

Введение. Зачастую при решении прикладной задачи свести ее к одному критерию достаточно трудно, так как целей может быть больше. В этом случае оптимизация проводится по нескольким частным критериям, и задача сводится к рассмотрению задачи многокритериальной оптимизации. Задача усложняется, если поиск множества решений осуществляется на комбинаторном множестве. Как известно [1], комбинаторные множества обладают специфическими свойствами при погружении в арифметическое евклидово пространство. Применение таких свойств дает возможность рассматривать различные оптимизационные задачи и разрабатывать новые специальные методы для их решения.

Задачи евклидовой комбинаторной оптимизации с одним критерием рассмотрены в работах [1–3]. Модели векторной оптимизации исследуются и изучаются многими как отечественными, так и зарубежными учеными [4–8].

В работе рассматривается модель задачи, которая объединяет в себе проблему многокритериальности и комбинаторные свойства области допустимых решений. При решении практических задач такие задачи часто возникают, когда необходимо формализовать в виде критериев ряд отдельных требований, предъявляемых к оптимальному решению, которое ищут на комбинаторном множестве. Такого рода задачи встречаются во многих сферах человеческой деятельности.

Постановка задачи. Рассмотрим свойства области допустимых решений, на которой решается задача.

Пусть имеется η символов, из которых n различных $a_i, i=1,2,...,\eta$, где каждый образует множество A_i, состоящее из n_i одинаковых элементов a_i. Имея множества A_i, $i \in N_n = \{1,2,...,n\}$, согласно [1], можно построить различные наборы a, состоящие из $k \le \eta$ символов, т. е. $a = \left(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}\right)$. Множество называют мультимножеством, если в нем элементы повторяются. Их соответствующая совокупность образует то или иное комбинаторное множество. Комбинаторные множества, элементы которых считаются различными, если у них разный порядок следования символов, называются комбинаторными евклидовыми множествами [1]. Примерами комбинаторных евклидовых множеств являются множества перестановок, размещений, сочетаний, разбиений и др. В данной статье рассматривается задача на множестве размещений.

Пусть задано мультимножество $A = \left\{a_1, a_2, ..., a_\eta\right\}$, а $S(A) = \left\{e_1, e_2, ..., e_n\right\}$ – его основание, где $e_j \in R_1$ $\forall j \in N_n$, и кратность элементов $k(e_j) = \eta_j, j \in N_n$, $\eta_1 + \eta_2 + ... + \eta_n = \eta$. Возьмем произвольное $k \in N_\eta$, $\eta_j \le k$.

Как известно [2], упорядоченной k –выборкой мультимножества A называется набор

$$e = \left(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}\right) , \tag{1}$$

где $a_{i_j} \in A$ $\forall i_j \in N_k$, $\forall j \in N_k$, $i_s \ne i_t$, если $s \ne t$ $\forall s \in N_k$, $\forall t \in N_k$.

Тогда множество $P(A)$, элементами которого являются k –выборки вида (1) из мультимножества A, называется евклидовым комбинаторным множеством, если для произвольных его элементов $e' = (a_1, a_2, ..., a_k)$, $e'' = (b_1, b_2, ..., b_k)$ выполняются такие условия: $(e' \ne e'') \Leftrightarrow (\exists j \in N_k : a_j \ne b_j)$.

Общим множеством k -размещений называется совокупность всех упорядоченных k -выборок вида (1) из A и обозначается $R^k_{\eta n}(A)$ [2]. Если A – множество, т. е. $\eta = n, A = S(A)$, то $R^k_n(A)$ – множество всех k -размещений без повторения из n разных вещественных чисел множества A . Как известно из [2], выпуклой оболочкой точек общего комбинаторного множества размещений является общий многогранник размещений $\Pi^k_{\eta n}(A) = \operatorname{conv} R^k_{\eta n}(A)$, который задается системой неравенств

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{|\omega|} a_j \le \sum_{i\in\omega} x_i, \\ \sum_{i\in\omega} x_i \le \sum_{j=1}^{|\omega|} a_{\eta-j+1}, \quad \forall\omega\subset N_k. \end{cases} \tag{2}$$

Определение 1. Точка x – вершина общего многогранника размещений $\Pi_{\eta n}^{k}(A)$ тогда и только тогда, когда ее координаты являются перестановкой чисел $a_1, a_2, ..., a_s$, $a_{\eta-r+1}, a_{\eta-r+2}, ..., a_\eta$, где $s\in N_k$, $r\in\{N_k\cup 0\}$, $s+r=k$.

Как известно [1], многие комбинаторные множества обладают интересными свойствами при их погружении в арифметическое евклидово пространство R^k.

Пусть $P(A)$ – евклидово комбинаторное множество, а e вида (1) – элемент $P(A)$. Определим взаимооднозначное отображение комбинаторного множества $P(A)$ в арифметическое евклидово пространство по следующему правилу: $\varphi: P(A)\to P_\varphi(A)\subset R^k$, т. е. φ ставит множество $P(A)$ в соответствие множеству $P_\varphi(A)\subset R^k$, а для элемента $e=\left(a_{i_1},\dots,a_{i_k}\right)\in P(A)$ имеем $x_j=a_{i_j}$ $\forall j\in N_k$, $x=(x_1...,x_k)\in P_\varphi(A)$, $x=\varphi(e)$.

Рассмотрим многокритериальную комбинаторную задачу на общем множестве размещений: задана линейная вектор-функция вида

$$F(x)=(f_1(x), f_2(x),..., f_l(x)). \tag{3}$$

Множество допустимых решений задачи определяется комбинаторным множеством размещений и дополнительными ограничениями:

$$D = X\cap R_{\eta n}^{k}(A),$$

где множество X задано системой линейных неравенств

$$X=\{x\in R^n \,\big|\, \left\langle a^j, x\right\rangle \le b_j,\ j\in N_k\}, \tag{4}$$

где $a^j\in R^n, b_j\in R,\ j\in N_k$, а множества размещений

$$x\in R_{\eta n}^{k}(A). \tag{5}$$

При отображении φ множества $R_{\eta n}^{k}(A)$ в евклидово пространство R^k можно сформулировать задачу $Z(F,S)$ максимизации некоторого векторного критерия $F(x)$ на множестве S, причем каждой точке $a\in R_{\eta n}^{k}(A)$ будет соответствовать точка $x\in S$. Тогда задача (3) – (5) примет вид

$$Z(F,S): \max\left\{F(f(x)) \mid x\in S\right\}, \tag{6}$$

где $F(f(x))=(f_1(x),f_2(x),...,f_l(x))$, $f_i:R^n\to R^1, i\in N_l$, S – непустое множество в R^n. Учитывая, что $\Pi_{\eta n}^k(A)=\operatorname{conv}R_{\eta n}^k(A)$, соответсвенно $\operatorname{vert}\Pi_{\eta n}^k(A)=R_{\eta n}^k(A)$, задача $Z(F,S)$ рассматривается на области многогранника размещений $\Pi_{\eta n}^k(A)$, а множество S определяется следующим образом: $S=\operatorname{vert}\Pi_{\eta n}^k(A)\cap X$.

Свойства Парето-оптимальных решений и оценок. Одним из основных понятий многокритериальных задач является понятие Парето-оптимального решения [5, 8, 9]. В многокритериальной задаче каждое решение $x\in X$ полностью характеризуются своей оценкой $y=(y_1,...,y_l)$, где $y_i=f_i(x),\ \ i\in N_l$. Поэтому выбор оптимального решения сводится к выбору оптимальной оценки из множества Y всех достижимых оценок.

Множество оценок для комбинаторной многокритериальной задачи оптимизации $Z(F,S)$ определяется следующим образом:

$$Y=F(X)=\{y\in R\,|\,y=F(x),x\in R_{\eta n}^k(A)\}. \qquad (7)$$

Таким образом, выбор решения из множества размещений $R_{\eta n}^k(A)$ равносилен выбору соответствующей оценки из Y. Для комбинаторных многокритериальных задач оно представляет обобщение понятия точки максимума числовой функции: решение Парето оптимально, если значения любого из критериев можно улучшить лишь за счет ухудшения значений остальных критериев.

Свойствам и методам отыскания Парето-оптимальных решений посвящено достаточно много литературы, но для задачи $Z(F,S)$ комбинаторной оптимизации необходимо учесть специфику и комбинаторные свойства области допустимых решений.

В работе [9] было обосновано существование множества Парето-оптимальних решений $P(F,S)$ в комбинаторных многокритериальных задачах на размещениях в вершинах комбинаторного многогранника размещений и алгоритм их нахождения. Наряду с множеством Парето-оптимальных решений целесообразно рассмотреть понятие Парето-оптимальних оценок многокритериальных комбинаторных задач, которые играют важную роль в теории многокритериальной оптимизации.

Множества Парето-оптимальних решений в комбинаторных задачах на размещениях обозначено $P(F,S)$, тогда множества Парето-оптимальних оценок обозначим $P_y(F,S)$.

В многокритериальных задачах сравниваются по предпочтительности векторные оценки, т. е. значения некоторого векторного критерия $F(f(x))=$ $=(f_1(x),f_2(x),...,f_l(x))$, и сопоставлять по предпочтительности те векторные оценки, которые отличаются друг от друга лишь одной компонентой [5]. Поэтому информация о предпочтительности изменения значения одного частного критерия при фиксированных значениях всех остальных критериев – наиболее доступная и достоверная. Ее целесообразно получить в первую очередь и использовать для анализа задачи.

Для дальнейшего рассмотрения понятия Парето-оптимального решения и оценки комбинаторных многокритериальных задач оптимизации изложим утверждение:

Утверждение 1. Максимум линейной функции однокритериальной комбинаторной задачи

$$f(x) = \sum_{j=1}^{k} c_j x_j , \qquad (8)$$

где $c_{\alpha_1} \geq ... c_{\alpha_s} \geq 0 > c_{\alpha_{s+1}} \geq ... \geq c_{\alpha_k}$, $s \in N_k$, $\alpha \in N_k$, на общем множестве размещений $R^k_{\eta n}(A)$ достигается в точке $x^* = (x_1{}^*,...,x_k{}^*) \in R^k_{\eta n}(A)$, которая удовлетворяет условиям

$$x^*_{\alpha_i} = a_i \forall i \in N_s ; \; x^*_{\alpha_{s+i}} = a_{\eta-r+i} \forall i \in N_r , \qquad (9)$$

если элементы мультимножества A упорядочены следующим образом:

$$a_{i_1} \geq a_{i_2} \geq \ldots \geq a_{i_k} , \qquad (10)$$

где r, s –константы, удовлетворяющие условиям $r + s = k$, $r, s \in N_k$.

Обозначим x^0 – оптимальное решение, тогда $f(x^0) = y^0$ – оптимальная оценка данного решения и $F(f(x)) = (f_1(x), f_2(x),..., f_l(x))$ можно записать следующим образом: $F(y) = (y_1, y_2,..., y_l)$.

Определение 2 [5]. Функция $F(y)$, которая определена на множестве $Y \subset R^m$, является возрастающей по отношению $\geq$, если из выполнения неравенства $y \geq y'$ для векторов $y, y' \in Y$ всегда следует справедливость неравенства $F(y) \geq F(y')$.

Это определение представляет собой обобщение понятия возрастающей функции одной переменной на случай функции многих переменных.

Теорема 1. Если функция $F(y)$ возрастает по отношению $\geq$ и x^0 – точка максимума функции $F(f(x)) = F(f_1(x), f_2(x),\ldots, f_l(x))$ на множестве размещений $R^k_{\eta n}(A)$, то $f\left(x^0\right) \in P_y(F, S)$, а значит $x^0 \in P(F, S)$.

Доказательство. Так как x^0 – точка максимума рассматриваемой функции $F(f(x)) = F(f_1(x), f_2(x),\ldots, f_l(x))$, то, согласно определению Парето-оптимального решения [5, 8], она принадлежит множеству Парето-оптимальных решений, а по определению Парето-оптимальных оценок выполняется соотношение $f\left(x^0\right) \in P_y(F,S)$.

Теорема 1 сформулирована в терминах решений. Но ее можно переформулировать и в терминах оценок.

Теорема 2. Пусть функция $F(y)$ определена на множестве оценок $Y \subset R^m$. Для того чтобы точка $y^0 \in Y$ была Парето-оптимальной оценкой, т. е. $y^0 \in P_y(F,S)$ для комбинаторной многокритериальной задачи оптимизации $Z(F,S)$, достаточно, чтобы она являлась точкой максимума на множестве Y функции $F(y)$, возрастающей по отношению $\geq$.

Доказательство следует из теоремы 1. Пусть, по условию, $y^0 \in Y$ и $F\left(y^0\right) \geq F(y)$ для всех $y \in Y$. Предположим обратное: для некоторой оценки $y' \in Y$ верно неравенство $y' \geq y^0$. Отсюда, поскольку функция F возрастающая, получаем неравенство $F(y') > F\left(y^0\right)$, которое противоречит предыдущему. В свою очередь, если максимум достигался в точке $x^0 \in \Pi_{\eta n}^k$, то она является Парето-оптимальним решением задачи $Z(F,S)$, согласно теореме 1 и соотношению $f(x^0) = y^0$, точка $y^0 \in P_y(F,S)$. Теорема доказана.

В многокритериальной оптимизации широко используется метод линейной свертки для нахождения Парето-оптимальных решений. Этот метод можна использовать и для нахождения решений комбинаторных многокритериальных задач [8].

Учитывая специфику области допустимых решений комбинаторной задачи, следует отметить, что функция $F(x) = (f_1(x),..., f_l(x)) = \sum_{i=1}^{l} \mu_i f(x_i)$ является возрастающей по отношению $\geq$ на комбинаторном множестве размещений $R_{\eta n}^k(A)$, если все числа $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ положительны. Следовательно, максимизация функции $\sum_{i=1}^{l} \mu_i f_i(x)$ на множестве размещений $R_{\eta n}^k(A)$ приводит к Парето-оптимальному решению.

Теорема 3. Решение $x^0 \in S$ комбинаторной многокритериальной задачи $Z(F,S)$ является Парето-оптимальным, если существуют числа $\mu_i \geq 0, i \in N_l$, $\sum_{i=1}^{l} \mu_i = 1$, такие, что максимизируют линейную свертку

$$\sum_{i=1}^{l} \mu_i f_i\left(x^0\right) = \max_{x \in S} \quad \sum_{i=1}^{l} \mu_i f_i\left(x\right) \tag{11}$$

критериев $f_1(x), f_2(x), \dots, f_l(x)$ на множестве размещений $R_{\eta n}^{k}(A)$.

Доказательство. Множество допустимых решений S задачи многокритериальной комбинаторной оптимизации $Z(F,S)$ является конечным и ограниченным, так как $S = vert\Pi_{\eta n}^{k}(A) \cap X$. Тогда, согласно утверждению, существует решение $x^0 \in S$ задачи (11), которое является оптимальным, а соответственно Парето-оптимальным для комбинаторной многокритериальной задачи. Теорема доказана.

Теорема 3 показывает, что при определенных предположениях, подбирая коэффициенты $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_l$, любое Парето-оптимальное решение можно получить в результате решения соответствующей однокритериальной задачи максимизации. Аналогичный вывод справедлив и для оценок.

Утверждение 2. Если на комбинаторном множестве размещений $R_{\eta n}^{k}(A)$ компоненты вектор-функции $F\left(x\right) = \left(f_1\left(x\right), \dots, f_l\left(x\right)\right)$ непрерывны, то $P\left(F,S\right) \neq \varnothing$.

Утверждение 3. Для комбинаторной многокритериальной задачи $Z(F,S)$ существует хотя бы одно Парето-оптимальное решение и, соответственно, хотя бы один Парето-оптимальный вектор, т. е. $P\left(F,S\right) \neq \varnothing$, $P_y\left(F,S\right) \neq \varnothing$.

Из вышесформулированных теорем и утверждений вытекает следующий способ отыскания какого-нибудь одного Парето-оптимального решения: найти точку, реализующую максимальное значение функции $\sum_{i=1}^{l} f_i\left(x\right)$ на множестве допустимых решений S .

Заключение. Рассмотрены и исследованы Парето-оптимальные решения и оценки комбинаторной многокритериальной задачи на общем множестве размещений. Сформулировано ряд свойств Парето-оптимальных решений и оценок, которые могут быть использованы при решении комбинаторных многокритериальных задач на других множествах.

Л.М. Колєчкіна

ПРО ЗНАХОДЖЕННЯ ПАРЕТО-ОПТИМАЛЬНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ В БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНИХ КОМБІНАТОРНИХ ЗАДАЧАХ НА МНОЖИНІ РОЗМІЩЕНЬ

Розглянуті та досліджені розв'язки й оцінки багатокритеріальної задачі комбінаторної оптимізації на множині розміщень з додатковими обмеженнями. Сформульовано ряд теорем

про властивості Парето-оптимальних розв'язків та оцінок, а також спосіб знаходження Парето-оптимальних розв'язків на основі описаних властивостей.

L.N. Kolechkina

THE FINDING|being| OF PARETO-OPTIMUM SOLUTINS IN COMBINATORIAL PROBLEMS OF MULTICRITERIA ON SET OF PLACING

Considered and researched the solutions and valuations of multicriterion combinatorial problem on set of placing with linear additional constraints. The row of theorems is formulated about propertys of Pareto-optimum solutions in combinatorial problem on set of placing. On the basis of the formulated properties|virtue| approach is offered to|by| finding|being| of effective decisions.

1. *Стоян Ю.Г., Яковлев С.В*. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования. – Киев: Наук. думка, 1986. – 265 с.
2. *Стоян Ю.Г., Ємець О.О.* Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації. – К.: Ін-т систем. досліджень освіти, 1993. – 188 с.
3. *Ємець О.О., Колєчкіна Л.М.* Задачі комбінаторної оптимізації з дробово-лінійними цільовими функціями. – К.: Наук. думка, 2005. – 118 с.
4. *Сергиенко И.В.* Математические модели и методы решения задач дискретной оптимизации. – Киев: Наук. думка, 1988. – 472 с.
5. *Подиновский В.В., Ногин В.Д.* Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. – М.: Наука, 1982. – 256 с.
6. *Сергиенко И.В., Козерацкая Л.Н., Лебедева Т.Т.* Исследование устойчивости и параметрический анализ дискретных оптимизационных задач. – Киев: Наук. думка, 1995. – 171 с.
7. *Лебедева Т.Т., Семенова Н.В. Сергиенко Т.И.* Устойчивость векторных задач целочисленной оптимизации: взаимосвязь с устойчивостью множеств оптимальных и неоптимальных решений // Кибернетика и системный анализ. – 2005. – № 4. – С. 90–100 .
8. *Семенова Н.В., Колечкина Л.Н., Нагорная А.Н.* Подход к решению векторных задач дискретной оптимизации на комбинаторном множестве перестановок // Кибернетика и системный анализ. – 2008. – № 3. – С.158–172.
9. *Колечкина Л.Н.* Оптимальные решения многокритериальных комбинаторных задач на размещениях // Теорія оптимальних рішень. – 2007. – № 6. – С. 67–74.

Получено 09.04.2008