ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ДЕКОМПОЗИЦІЇ В ЗАДАЧАХ ЗМІШАНО ЦІЛОЧИСЛОВОГО БІЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Н. В. Семенова, *д. ф.-м. н., п. н. с.,*
Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України,
м. Київ, Україна;
С. В. Олійник, *аспірантка*
Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
м. Київ, Україна

Ряд задач економіки, теорії керування, дослідження операцій можуть бути представлені у вигляді задач білінійного програмування [1]. Зокрема до них зводяться: задача пошуку ситуації рівноваги за Нешем у біматричній грі, лінійна задача доповнюваності спеціального вигляду, задача білінійної відділимості двох множин у просторі R^n, задача виробничого календарного планування, задача про багатопродуктовий потік в мережах, тривимірна задача про призначення та інші. Зазвичай у білінійних змішано цілочислових задачах виділяють вектор $x=\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$ неперервних і $y=\left(y_1,y_2,...,y_q\right)$ цілочислових змінних. Цільова функція лінійна по кожній з цих змінних при фіксованій іншій, але при цьому в ній обов'язково присутні члени, що містять добутки $x_i y_j, i\in N_n=\{1,2,...,n\}, j\in N_q$, невід'ємних неперервної і цілочислової змінних, можливо, з деяким коефіцієнтом. Ці задачі мають два джерела неопуклості: цілочислові змінні та білінійність функцій, які й породжують неопуклість цих задач. Як відомо, неопуклі задачі мають велику кількість локальних розв'язків і стаціонарних точок, далеких від глобального оптимуму за значенням цільової функції, а класичні методи опуклої оптимізації в подібних задачах безпосередньо незастосовні або неефективні. Тому розробка нових методів пошуку точних та наближених розв'язків в неопуклих і дискретних задачах математичного програмування є однією з актуальних задач сучасної оптимізації. При цьому поряд з універсальними підходами до розв'язання подібних задач такими методами, досить ефективними є методи дослідження та розв’язання спеціальних класів неопуклих задач з урахуванням їх особливостей і властивостей. Декомпозиційний підхід є одним із перспективних підходів до розв’язання складних задач дискретної оптимізації. Процедура полягає в пошуку розв’язків вхідної задачі шляхом розв’язання ряду незалежних підзадач меншої розмірності. Загальна ідея методів декомпозиції полягає у проведенні обчислень при фіксованих значеннях вектора y, потім використовуючи оптимальний розв’язок x, коректуванні значення вектора y. Розглядається частково цілочислова задача білінійної оптимізації зі зв’язаними змінними [2] вигляду P1:

$$min\left\{ f\left(x,y\right) \mid Ax+F\left(y\right)\ge b, x\ge 0, y\in S\right\}$$

$$f\left(x,y\right)=\left\langle c,x\right\rangle +\left\langle x,Qy\right\rangle +\left\langle d,y\right\rangle .$$

Тут f – скалярна функція від x і y, x та c – n-вимірні вектори, y – q-вимірний вектор, Q і A – матриці розмірності $n\times q$ та $m\times n$, відповідно, F – m-вектор, компонентами якого є функції від y, b – m-вимірний вектор, а S – множина цілочислових векторів з R^n. Задача $P1$ є частково цілочисловою. Оскільки задача лінійна по x при фіксованих значеннях y, логічно розв’язувати її шляхом фіксації y, розв’язання задачі лінійного програмування відносно x, отримання кращого значення y тощо. При цьому можуть розглядатися тільки такі значення y, які належать множині $R=\left\{ y\in R^q \mid \exists x\ge 0: Ax\ge b-F\left(y\right), y\in S\right\}$. Щоб у явній формі отримати обмеження, що визначають множину R, використано лему Фаркаша. $R=\left\{ y \mid \left\langle \left(b-F\left(y\right)\right), u_i^r\right\rangle \le 0, i=1,...,n_r, y\in S\right\}$. За допомогою математичних перетворень та теорії двоїстості отримана еквівалентна до вхідної задачі $P1$ задача $P2$, яка має такий вигляд:

$$min\{ z \mid z\ge f\left(y\right)+\left\langle b-F\left(y\right), u_i^p\left(y\right)\right\rangle, i=1,...,n_p\left(y\right),$$

$$\left\langle b-F\left(y\right), u_i^r\right\rangle \le 0, i=1,...,n_r,\ y\in S\}.$$

Отже, розв'язання вхідної задачі зводиться до послідовного розв'язання задачі цілочислової оптимізації з однією неперервною змінною і задачі лінійного програмування. Якщо задача $P2$ не має допустимих розв'язків, то не має допустимих розв'язків і задача $P1$. Якщо $P2$ має оптимальний розв'язок $(\overline{z},\overline{y})$, то для побудови оптимального розв'язку $(\overline{x},\overline{y})$ задачі $P1$ потрібно розв'язання задачі лінійного програмування. Однак процес розв'язання задачі отриманої задачі ускладнений внаслідок дуже великої кількості її обмежень, адже для знаходження розв'язків задачі цілочислової оптимізації треба знати всі обмеження, якими вона описується. В цій ситуації доцільно застосувати підхід релаксації Джеффріона.

Теорема. Якщо множина S скінченна, то запропонований алгоритм закінчується за скінченну кількість кроків зі знаходженням оптимального розв'язку вхідної задачі або з отриманням інформації про те, що задача недопустима або має необмежену цільову функцію на допустимій множині.

Скінченна збіжність описаного алгоритму випливає з того факту, що вхідна задача має скінченне число обмежень і всі послідовно породжувані обмеження відрізняються між собою.

У роботі досліджено змішано цілочислові задачі білінійного програмування зі зв'язаними змінними. На основі вивчення властивостей структури задачі побудовано та обґрунтовано декомпозиційний метод знаходження точних і наближених розв'язків, що заснований на поєднанні ідей методів Бендерса і релаксації. Цей метод, використовує властивості структури допустимої області задачі і дозволяє замінити розв'язання вхідної задачі розв'язанням послідовності підзадач, хоча і взаємопов'язаних, але більш простих.

Список використаних джерел

1. Стрекаловский А. С. Биматричные игры и билинейное программирование / А. С. Стрекаловский, А. В. Орлов. – М. : Физматлит, 2007. – 224 с.
2. Семенова Н. В. Розв'язання задач змішано цілочислового білінійного програмування методом декомпозиції / Н. В. Семенова, С. В. Олійник. // Журн. обчисл. та прикладної математики. – 2015, № 3. – С. 69–76.