ОБОБЩЕННАЯ ЗАДАЧА ПОСТРОЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ И ПРОДОЛЖЕНИЙ С НИХ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ В ОПТИМИЗАЦИИ

О. С. Пичугина, *докторант*
Харьковский национальный университет радиоэлектроники,
г. Харьков, Украина

Рассмотрим задачу оптимизации на множестве M элементов, позволяющих погружение в евклидово пространство – $M \to E \subseteq R^n$:

$$f(x) \underset{M}{\to} min. \tag{1}$$

Вместо (1) мы рассматриваем «погруженную» задачу:

$$f(x) \to min, \tag{2}$$

$$x \in E \subset R^n, \tag{3}$$

и исследуем возможности аналитического описания E системой ограничений. С этой целью мы вводим понятие функционального представления множества точек R^n.

Функциональным назовем представление множества E с помощью функциональных зависимостей вида:

$$f_j(x) = 0,\ j \in J_{m'} = \{1,...,m'\}, \tag{4}$$

$$f_j(x) \le 0,\ j \in J_m \setminus J_{m'}. \tag{5}$$

Мы называем (4) строгой частью, а (5) – нестрогой частью функциональных представлений (4), (5) и предлагаем следующую их классификацию:

1) по типу функций $f_j(x), j \in J_m$ – линейные и нелинейные, квадратичные, полиномиальные, непрерывные, дифференцируемые, выпуклые, ограниченные и т. п.

2) по наличию нестрогой части – представление строгое, если $m = m'$, иначе – нестрогое;

3) в зависимости от того, сводима или нет система (4), (5) функциональное представление избыточно или неизбыточно.

Для неизбыточных представлений введем классификацию по числу функций в строгой части (4). Так неизбыточное представление назовем:

– однокомпонентным, если $m' = 1$;

– касательным, если $m' = 2$, при этом E – множество точек касания двух $f_1(x) = 0, f_2(x) = 0$;

– пересекающимся, если E образуется в пересечении n поверхностей, т. е. $m' = n$,

– иначе смешанным $(2 < m' < n)$.

Решение задачи поиска непрерывного функционального представления (4), (5) как для дискретных, так и континуальных множеств позволяет свести задачу (1) к задаче непрерывной оптимизации (2), (4), (5) и применить весь аппарат нелинейной оптимизации.

В зависимости от выбранного метода оптимизации удобнее использование строгих или нестрогих представлений. Так, например, нестрогие представления позволяют применять методы допустимых направлений, барьерные методы и т. п., в то время как строгие представления – Лагранжевые методы, методы штрафных функции, их комбинации типа обобщенного метода множителей Лагранжа и пр.

Приведем ряд примеров. На рис. 1 показано дискетное множество точек E, которое теоретически можно задать дизъюнкцией четырех систем ограничений, задающих координаты его точек. Такое аналитическое представление, тем не менее, не представимо системой (4), (5) и не является функциональным представлением. На рис. 2 показано, что E образуется в касании двух поверхностей $f_1(x) = 0, f_2(x) = 0$, т.е. для E существует касательное представление и оно будет найдено, если аналитический вид $f_1(x), f_2(x)$ будет определен. Одновременно будет найдено и ряд нестрогих представлений E: $f_1(x) \le 0, f_2(x) \ge 0$; $f_1(x) = 0, f_2(x) \ge 0$; $f_1(x) \le 0, f_2(x) = 0$, при этом все они неизбыточны.

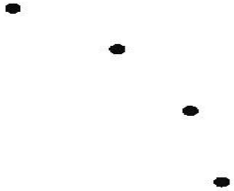

Рисунок 1

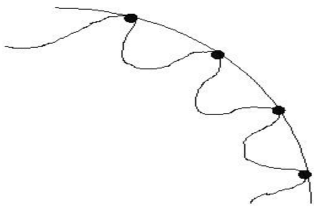

Рисунок 2

На рис. 3 показано геометрическое место точек плоскости, являющееся комбинацией дискретного и континуального множеств. Тем не менее, как видно на рис. 4, оно имеет нестрогое невыпуклое представление типа (4), (5) и задача (2), (3) сводится к задаче невыпуклой оптимизации.

Рисунок 3

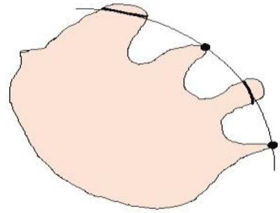

Рисунок 4

Отметим, что для произвольного E существует бесконечное число функциональных представлений. Для этого достаточно построить одно такое представление, а потом добавлять к нему избыточные ограничения. Что касается неизбыточных представлений, в отдельных случаях они определяются однозначно. Так, например, неизбыточное функциональное представление многогранника размерности n определяется единственным образом и для его формирования решается классическая в полиэдральной комбинаторике задача поиска его несводимой системы. В остальных же случаях, например, для дискретных множеств, поиск неизбыточного представления может быть конкретизирован, например, с точки зрения количества ограничений, их вида и т. п.

Так, например, на рис. 5 показано дискретное множество $E, |E| = 10$. Его выпуклая оболочка совпадает с правильным пятиугольником и добавление одного строгого ограничения $f_1(x) = 0$ замкнутой линии S, показанной на рис. 6, приводит к так называемому полиэдрально-поверхностному представлению E: $E = P \cap S$, где $P = convE = \{x : Ax \le b\}$, $S = \{x : f_1(x) = 0\}$, содержащему одно уравнение и пять неравенств. Его преимуществом является возможность рассмотрения полиэдральной как полиэдральной ($f(x) \underset{P}{\rightarrow} min$), так и поверхностной ($f(x) \underset{S}{\rightarrow} min$) релаксаций исходной задачи для решения (1).

Поверхность ΓP многогранника P – единственная выпуклая поверхность, описанная вокруг E. Пусть S' – показанная на рис. 7 гладкая кривая, тогда ее уравнение в совокупности с уравнением ΓP, включающем кусочно линейную функцию, приводит к строгому представлению $E = \Gamma P \cap S'$, в котором всего два равнения $(m = m' = 2)$, но при этом оно невыпуклое и недифференцируемое. На рис. 8 показано сглаживание S'' ломанной ΓP, в результате чего получено невыпуклое дифференцируемое представление $E = S' \cap S''$. Наконец, на рис. 9 показано декомпозицию E на два вершинно расположенные множества мощности 5. Для каждого из них существует выпуклое полиэдрально-поверхностное представление в виде пересечения правильного пятиугольника со сферой, а также выпуклое строгое представление в виде пересечения поверхности пятиугольника с описанной сферой. Кроме того, сглаживание кусочно-линейных линий позволяет найти касательные два представления. При условии, что $f(x)$ – выпукла, такая декомпозиция позволяет использовать выпуклую оптимизацию для решения каждой их полученных подзадач.

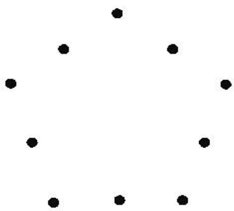

Рисунок 5

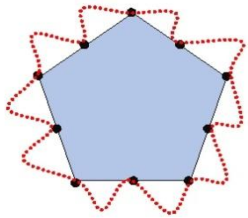

Рисунок 6

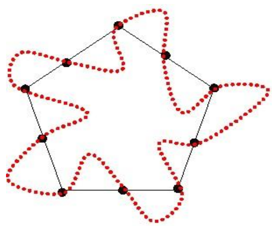

Рисунок 7

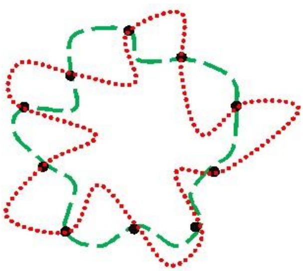

Рисунок 8

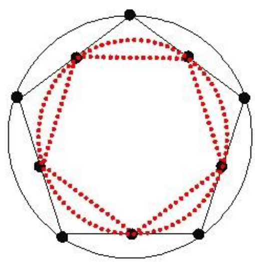

Рисунок 9

В следующем примере будет показано, что реальные аналитические функциональные представления могут задавать как дискретные или континуальные множества, так и их комбинации. Зададим E следующим образом:

$$E=\left\{x\in R^n:\left(x-a\right)^2=r\left(a\right)\right\},. \tag{6}$$

где

$$a=\left(a_i\right)_i:a_i^2=1,\ i\in J_n. \tag{7}$$

Как видно, (7) задает бинарное множество $B_n^{'}=\left\{\pm 1^n\right\}$ и представляет собой пересекающееся функциональное представление множества центров гиперсфер (6). При $r\left(a\right)=r=0$ эти сферы вырождаются в точки и (6), (7) задает непосредственно $B_n^{'}$ (рис. 10). При $r\left(a\right)=r=1$ это будет уже множество 2^n гиперсфер единичного радиуса с центром в точках $B_n^{'}$ (рис. 11). Наконец, если $r\left(a\right)$ зависит от положения a, а именно $r^2\left(a\right)=\left|\sum_{i=1}^{n}a_i\right|$, (6), (7) задает множество 2^n гиперсфер, квадраты радиусов которых принимают целочисленные значения $r^2\left(a\right)\in J_n^0=J_n\cup\left\{0\right\}$, в частности, при четном n (см. рис. 12 для $n=2$) C_n^2 эти сферы будут вырождаться в подмножество $B_n^{'}$, для которых $r\left(a\right)=0$.

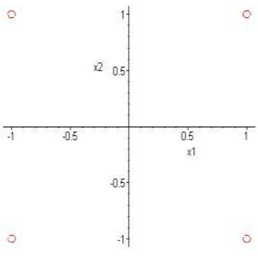

Рисунок 10

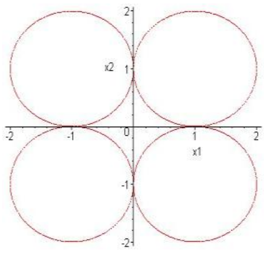

Рисунок 11

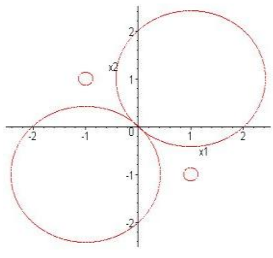

Рисунок 12

Продолжением функции $f\left(x\right)$ с E на $E'\supset E$ называется функция $F\left(x\right)$, определенная на E' и совпадающая с $f\left(x\right)$ на

$E: F(x) \underset{E}{=} f(x)$.

Подобно классификации функциональных представлений множеств, в зависимости от вида функции $F(x)$ ее продолжения могут быть непрерывными, дифференцируемыми, выпуклыми (на компакте $E' \supset E$) и т. п.

Известно, например, что для функций, определенных на вершинно расположенном множестве E, всегда существует ее выпуклое продолжение на R^n [1].

Продолжение функции $f(x)$ с E называется: а) строгим продолжением с множества E, если: $F(x) = f(x) \Leftrightarrow x \in E$, иначе нестрогим; б) мажорирующим продолжением с E, если: $\forall x \in E\ F(x) \geq f(x)$.

Решение задачи построения строгого представления (4) позволяет решить задачу построения как строгих (см. (8), (9)), так и мажорирующих представлений (9):

$$F(x,\lambda) = f(x) + \lambda \prod_{i=1}^{m} f_i(x), \tag{8}$$

$$F(x,\lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i^2(x),\ \lambda = (\lambda_i)_i > 0, i \in J_m. \tag{9}$$

А комбинирование выпуклых и мажорирующих представлений позволяет эффективно решить задачу (1).

Список использованных источников

1. Яковлев С. В. Теория выпуклых продолжений функций на вершинах выпуклых многогранников // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1994. – 34, № 7 – С. 1112–1119.

ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ОПТИМІЗАЦІЇ РЕСТОРАННОГО ГОСПОДАРСТВА

Н. В. Рогова, *к. т. н., доцент*
ВНЗ Укоопспілки «Полтавський університет економіки і торгівлі»
м. Полтава, Україна

Ресторанний бізнес завжди був досить ризиковим, і зараз це твердження доведено на сто відсотків. Аналіз ринку показав, що сьогодні багато хто з ресторанів високої кухні перейшов в