Министерство высшего и среднего специального образования УССР

Полтавский инженерно-строительный институт

УДК 5I9.854.2

О.А.Емец

ОПТИМИЗАЦИЯ НА ПЕРЕСТАНОВКАХ: МЕТОДЫ С ПОГРУЖЕНИЕМ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ

Полтава-I983

В работе рассматриваются методы решения некоторых задач оптимизации на множестве перестановок с повторениями из вещественных чисел после его погружения [I] в арифметическое евклидово пространство.

Рассмотрим метод решения задачи: определить

$$\sum_{i=1}^{m} c_i y_i^* = \min_{x \in E_{nq}} \sum_{i=1}^{m} c_i y_i, \tag{I}$$

$$y^* = \arg\min_{x \in E_{nq}} \sum_{i=1}^{m} c_i y_i \tag{2}$$

при дополнительных ограничениях

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \le b_j \quad \forall j \in J_r, \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{i(r+t)} y_i = b_{r+t} \quad \forall t \in J_s, \tag{4}$$

где c_i, a_{ij}, b_j - заданные вещественные константы, m, n, q, r, s - заданные целые константы $/n \le m/$, $J_n = \{1, 2, \dots, n\}$; E_{nq} - множество из арифметического евклидова пространства R^n, полученное погружением в R^n [I] множества перестановок с повторением из вещественных чисел $g_1, g_2, \dots, g_n$ $(g_i \le g_{i+1} \ \forall i \in J_{n-1})$, из которых q различны; $y = (y_1, y_2, \dots, y_n, y_{n+1}, \dots, y_m) \in R^m$, $x_i = y_i \ \forall i \in J_n$.

Не нарушая общности, можно вместо задачи (I)-(4) рассматривать задачу (I)-(3), т.к. ограничения (4) легко представить в виде (3).

Предлагаемый метод приближенного решения задачи (I)-(3) распадается на три этапа. Первый этап состоит в решении следующей задачи линейного программирования /ЛП/: найти

$$\sum_{i=1}^{m} c_i \tilde{y}_i = \min_{x \in \Pi_{nq}(g)} \sum_{i=1}^{m} c_i y_i ; \tag{5}$$

$$\tilde{y}^* = \arg\min_{x \in \Pi_{nq}(g)} \sum_{i=1}^{m} c_i y_i \qquad (6)$$

при дополнительных ограничениях (3). Здесь $\Pi_{nq}(g)$ - общий перестановочный многогранник /ОПМ/ [2], определяемый следующей системой ограничений

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_j \le \sum_{j=1}^{n} g_j ; \\ \sum_{j=1}^{i} x_{\alpha_j} \ge \sum_{j=1}^{i} g_j ; \end{cases} \qquad (7)$$

$\alpha_j \in J_n, \ \alpha_j \ne \alpha_k \ \ \forall j \ne k, \ j, k \in J_i \ \ \forall i \in J_n.$

Из-за ограничений (3) первые n координат точки $\tilde{y}$, вообще говоря, могут не быть перестановкой чисел $g_1, g_2, \ldots, g_n$, даже если точка $\tilde{y}$ - вершина допустимой области задачи (5), (6), (3), (7). Поэтому необходим второй этап в решении задачи (I)-(3), который состоит в следующем. По точке $\tilde{y}$ строится точка $\tilde{y}^\circ \in R^m$, обладающая тем признаком, что первые координат являются перестановкой чисел $g_1, g_2, \ldots, g_n$. Поскольку в точке $\tilde{y}^\circ$ ограничения (3) могут не выполнятся, необходим третий этап решения задачи (I)-(3) - этап формирования точки $\tilde{y}^* \in R^m$, обладающей признаком точки $\tilde{y}^\circ$ и удовлетворяющей при этом ограничения (3). Таким образом, получаем приближенное решение задачи (I)-(3).

Рассмотрим подробнее содержание каждого из этапов решения задачи (I)-(3). Первый этап осуществляется посредством метода последовательного подсоединения ограничений /МППО/, идейно близкого к методу отсекающих гиперплоскостей в выпуклом программировании [3] и к методам последовательного погружения надграфика целевой функции в задачах оптимизации [4]. МППО изложен в [5].

Рассмотрим содержание второго этапа решения задачи (I) - - (3). Он может быть реализован, например, одним из следующих способов.

Вычеркнем из набора n первых координат точки $\tilde{y}$ пару равных чисел $\tilde{y}_i = g_j$, $i, j \in J_n$. Будем поступать так до тех пор, пока это возможно, формируя при этом координаты точки следующим образом: $\tilde{y}_i^\circ = \tilde{y}_i$, $i \in J_n$. Обозначим невычеркнутые координаты /из рассмотренного набора/ точки так: $\tilde{y}_{i_1} \leq \tilde{y}_{i_2} \leq \ldots \leq \tilde{y}_{i_t}$, а оставшиеся числа из набора $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ - $g_{j_1} \leq g_{j_2} \leq \ldots \leq g_{j_t}$. Положим $\tilde{y}_{i_k}^\circ = g_{j_k}$, $i_k, j_k \in J_n$ $\forall k \in J_t$, $t \in J_n$. Остальные координаты точки $\tilde{y}^\circ$ оставим / по сравнению с $\tilde{y}$ / без изменения.

Второй способ формирования точки $\tilde{y}^\circ$ состоит в следующем. Пусть $\tilde{y}_{i_1} \leq \tilde{y}_{i_2} \leq \ldots \leq \tilde{y}_{i_n}$. Тогда положим $\tilde{y}_{i_k}^\circ = g_k$ $\forall i_k$, $k \in J_n$. Остальные координаты точки $\tilde{y}^\circ$ формируются также, как и в первом способе.

Третий этап решения задачи (I) - (3) - формирование точки $\tilde{y}^*$ - представляет собой достаточно трудную задачу для решения ее в общем виде. Рассмотрим формирование точки $\tilde{y}^*$ для специальной задачи вида (I) - (3), которая состоит в следующем: определить

$$y_m^* \doteq \min_{x \in E_{nq}} y_m, \tag{8}$$

$$y^* = \arg\min y_m \tag{9}$$

при дополнительных ограничениях

$$\sum_{t=0}^{K_{im_i}-1} y_{\gamma_{im_i}+t} - y_m \leq -d_{im_i} \quad \forall i \in J_k; \tag{I0}$$

$$\sum_{t=0}^{K_{ij}-1} y_{\gamma_{ij}+t} \leq c_{i(j+1)} - d_{ij} \quad \forall j \in J_{m_i-1} \quad \forall i \in J_K, \tag{11}$$

где $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x_i = y_i$, $\forall i \in J_n$; $m = n+1$;

$$\gamma_{ij} = \sum_{t=1}^{i-1} \sum_{l=1}^{m_t} K_{tl} + \sum_{l=1}^{j} K_{il} + 1 \quad \forall j \in J_{m_i} \quad \forall i \in J_K \setminus J_1; \tag{12}$$

$$\gamma_{1j} = \sum_{l=1}^{j} K_{1l} + 1 \qquad \forall j \in J_{m_1}. \tag{13}$$

Здесь K_{ij}, m_i, K, n, q - заданные натуральные константы, а c_{ij}, d_{ij}, g_s - заданные вещественные константы, причем

$$\sum_{i=1}^{K} \sum_{j=1}^{m_i} K_{ij} = n, \tag{14}$$

$c_{ij} \leq d_{ij}$, $c_{i1} = 0$, $g_l \leq g_{l+1}$, $g_1 = g_2 = \dots = g_{n-p} = 0$ $\forall j \in J_{m_i}$ $\forall i \in J_K$ $\forall l \in J_{n-1}$, $s \in J_n$, а p - заданная натуральная константа /$p \leq n$/.

Предположим, что получено решение задачи ЛП, соответствующей задаче (8)-(13), а именно:

$$\tilde{y}_m = \min_{x \in \Pi_{nq}(g)} y_m, \tag{15}$$

$$\tilde{y} = \arg\min_{x \in \Pi_{nq}(g)} y_m \tag{16}$$

при дополнительных ограничениях (10), (11). Пусть точка $\tilde{y}^o$ построена из точки $\tilde{y}$ как описано выше. Рассмотрим способ формирования из точки $\tilde{y}^*$. Положим

$$\tilde{y}^o_m = \max_{1 \leq i \leq K} \Big(\sum_{t=0}^{K_{im_i}-1} \tilde{y}^o_{\gamma_{im_i}+t} + d_{im_i} \Big),$$

где γ_{im_i} вычисляются по формулам (12), (13) $\forall i \in J_K$.

Пусть координаты $\tilde{y}^o_{\gamma_{ij}+t-1}$ $(t \in J_{K_{ij}})$ для фиксированного γ_{ij} $(j \in J_{m_i},\ i \in J_K)$, вычисляемого по формуле (I2) или (I3), точки $\tilde{y}^\circ$ таковы, что при подстановке $\tilde{y}^\circ$ в соответствующее уравнение системы (I0) или (II) это уравнение не выполняется. Тогда найдем

$$\tilde{y}^\circ_{\gamma_{ij}+t^*} = \min_{0 \le t \le K_{ij}-1} \{\tilde{y}^\circ_{\gamma_{ij}+t}\}$$

при условии

$$\sum_{\substack{l=0 \\ l \ne t}}^{K_{ij}-1} \tilde{y}^\circ_{\gamma_{ij}+l} \le c_{i(j+1)} - d_{ij};$$

$$\tilde{y}^\circ_{\gamma_{im_i}+t^{**}} = \max_{0 \le t \le K_{im_i}-1} \{\tilde{y}^\circ_{\gamma_{im_i}+t}\}$$

при условии

$$\tilde{y}^\circ_{\gamma_{im_i}+t} + \sum_{\substack{l=0 \\ l \ne t^*}}^{K_{ij}-1} \tilde{y}^\circ_{\gamma_{ij}+l} \le c_{i(j+1)} - d_{ij},$$

где $\gamma_{ij},\ j \in J_{m_i},\ i \in J_K$ вычисляются по формулам (I2), (I3). Далее полагаем $\tilde{y}^*_{\gamma_{ij}+t} = \tilde{y}^\circ_{\gamma_{ij}+t}$ $\forall t \in \{0\} \cup J_{K_{ij}-1} \setminus \{t^*\}$;

$\tilde{y}^*_{\gamma_{im_i}+l} = \tilde{y}^*_{\gamma_{im_i}+l}$ $\forall l \in \{0\} \cup J_{K_{im_i}-1} \setminus \{t^{**}\}$; $\tilde{y}^*_{\gamma_{ij}+t^*} = \tilde{y}^\circ_{\gamma_{im_i}+t^{**}}$;

$\tilde{y}^*_{\gamma_{im_i}+t^{**}} = \tilde{y}^\circ_{\gamma_{ij}+t^*}$; $\tilde{y}^*_m = \max\limits_{1 \le i \le K} \left(\sum\limits_{t=0}^{K_{im_i}-1} \tilde{y}^*_{\gamma_{im_i}+t} + d_{im_i} \right)$;

остальные координаты точки $\tilde{y}^*$ полагаются равными координатам точки $\tilde{y}^\circ$ с теми же номерами. Затем переобозначим $\tilde{y}^\circ_i = \tilde{y}^*_i$ $\forall i \in J_m$. Описанный процесс продолжаем до тех пор, пока не будут просмотрены все неравенства из системы (I0), (II), не выполняющиеся в точке $\tilde{y}^\circ$.

Таким образом, построена точка $\tilde{y}^*$. Представляется интересным и важным оценить точность решения задачи. Оценим величину

$$\delta = \frac{\sum_{i=1}^{m} c_i \tilde{y}_i^* - \sum_{i=1}^{m} c_i y_i^*}{\left| \sum_{i=1}^{m} c_i y_i^* \right|}$$

для задачи (8)-(II).

Лемма I. Дополнительные ограничения задачи (8)-(II) линейно-независимы.

Доказательство. Обозначим

$$M = \sum_{i=1}^{k} m_i \tag{I7}$$

В силу $K_{ij} \geq 1 \ \forall j \in J_{m_i} \ \forall i \in J_k$ и равенств (I4), (I7) имеем $M \leq n$. Составим матрицу A из коэффициентов при переменных в правых частях дополнительных ограничений задачи (8)-(II). /Очевидно, что матрица A содержит M строк и m столбцов./ Сделаем это следующим образом. Сначала выберем ограничение, у которого коэффициент при y_1 отличен от нуля. Коэффициенты этого уравнения составят первую строчку матрицы. Предположим, что выписана l-тая строчка матрицы A, тогда в качестве $/l$+I/-ой строки выпишем коэффициенты ограничения, у которого коэффициент при переменной с номером γ_{ij} отличен от нуля, где i и j определяются из соотношения $\gamma_{ij} = l+\mathrm{I}$ при подстановке вместо K_{ij} единиц в формулы (I2), (I3), $j \in J_{m_i}$, $i \in J_k$, $l \in J_{M-1}$. Вычеркнем в матрице A все столбцы кроме тех, которые имеют номера γ_{ij} $\forall j \in J_{m_i}$ $\forall i \in J_k$. Получим единичную матрицу. Значит ранг матрицы дополнительных ограничений A равен M. Следовательно, дополнительные ограничения линейно-независимы, что и требовалось доказать.

Лемма 2. Пусть $\tilde{y}$ - точка, доставляющая решение задаче (I5), (I6), (I0), (II), (7). Тогда имеет место оценка

$$\tilde{y}_m \geq \frac{1}{K}\Big[\sum_{i=1}^{n} g_i + \sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{m_i}(d_{ij} - c_{ij})\Big]. \tag{I8}$$

Доказательство. Сложим все неравенства системы (I0), (II). Имеем

$$\sum_{i=1}^{n} y_i - K y_m \leq \sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{m_i}(c_{i(j+1)} - d_{ij}) - \sum_{i=1}^{K} d_{im_i}.$$

Преобразуем полученное неравенство с учетом того, что $c_{i1} = 0$ $\forall i \in J_K$:

$$\sum_{i=1}^{n} y_i - K y_m \leq \sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{m_i}(c_{i(j+1)} - d_{ij}) - \sum_{i=1}^{K} d_{im_i}.$$

Из последнего неравенства с учетом ограничения

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{i=1}^{n} g_i,$$

входящего в систему (7), непосредственно следует неравенство (I8), что и требовалось показать.

Лемма 3. Если формирование $\tilde{y}^0$ осуществляется первым способом, а $\tilde{y}$ - решение задачи (I5),(I6),(I0),(II),(7), лежащее в вершине допустимой области, то при формировании точки $\tilde{y}^0$ не менее, чем для $n-2M$ координат имеет место равенство $\tilde{y}^0_i = \tilde{y}_i$, $i \in J_n$.

Доказательство. По лемме I все M ограничений (I0)-(II) линейно независимы. Так как в точке $\tilde{y}$ по крайней мере n неравенств из системы (I0), (II), (7) обращаются в равенства, то из системы (7) таких ограничений будет не менее $n-M$. Ясно, что $\tilde{y}^0_i = y_i$ для тех i, для которых следующие неравенства системы (7) обращаются в точке $\tilde{y}$ в равенства

$$\sum_{t=1}^{i-1} y_{\alpha_t} \leq \sum_{t=1}^{i-1} g_t; \quad \sum_{t=1}^{i} y_{\alpha_t} \leq \sum_{t=1}^{i} g_t.$$

Очевидно, что таких пар неравенств не меньше, чем $n-2M$, что и требовалось доказать.

Назовем неравенства

$$\sum_{j=1}^{i} x_{\alpha_j} \geq \sum_{j=1}^{i} g_j$$

из системы (7) i-той группой неравенств этой системы.

Теорема I. Если задача (8)-(II) решается описанным методом, причем на первом этапе используется метод решения задачи ЛП дающий вершину допустимой области, на втором этапе используется первый способ формирования $\tilde{y}^0$, то для этой задачи имеет место следующая оценка

$$\delta \leq \frac{\sum_{i=1}^{2M} g_{n-i+1} - \sum_{i=1}^{2M} g_i}{\frac{1}{k}\left[\sum_{i=1}^{n} g_i + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m_i}(d_{ij}-c_{ij})\right]}. \tag{I9}$$

Доказательство. Пусть на втором этапе решения задачи /при формировании точки $\tilde{y}^0$/ имеем $\tilde{y}_{i_1} \leq \tilde{y}_{i_2} \leq \ldots \leq \tilde{y}_{i_t}$ и $g_{j_1} \leq g_{j_2} \leq \ldots \leq g_{j_t}$, $i_\ell, j_\ell \in \mathcal{I}_n$, $\ell \in \mathcal{I}_t$, $t \in \mathcal{I}_n$. Для t по лемме 3 имеет место оценка

$$t \leq 2M. \tag{20}$$

Обозначим $g_{j_\ell} - \tilde{y}_{i_\ell} = \Delta_\ell$ и упорядочим величины Δ_ℓ по возростанию: $\Delta_{\alpha_1} \leq \Delta_{\alpha_2} \leq \ldots \leq \Delta_{\alpha_t}$. Тогда имеют место соотношения

$$\tilde{y}^*_m - \tilde{y}_m \leq \sum_{i=1}^{s} \Delta_{\alpha_i} \leq \sum_{i=1}^{s} g_{n-i+1} - \sum_{i=1}^{s} g_i, \tag{2I}$$

где $s \leq t$, которые получаются с учетом неравенств s-ой группы системы (7) и того, что $\tilde{y}^* - \tilde{y}_m$ не превышает суммы возможных увеличений координат при переходе от точки $\tilde{y}$ к $\tilde{y}^0$ и затем к $\tilde{y}^*$. Далее имеем

$$\delta = \frac{\tilde{y}_m^* - y_m^*}{|y_m^*|} \leq \frac{\tilde{y}_m^* - \tilde{y}_m}{y_m^*}, \tag{22}$$

т.к. имеют место неравенства (I8) и

$$\tilde{y}_m^* \geq \tilde{y}_m. \tag{23}$$

В силу оценки для S и неравенств (20), (21) из неравенства (22) имеем

$$\delta \leq \frac{\sum_{i=1}^{2M} g_{n-i+1} - \sum_{i=1}^{2M} g_i}{y_m^*}. \tag{24}$$

Из неравенства (24) в силу неравенств (23) и (4) имеем оценку (I9), что и требовалось доказать.

В работе [6] рассматривается разложение множества E_{nq} - вершин многогранника $\Pi_{nq}(g)$ по параллельным гиперплоскостям. В ней, в частности, показано, что множество E_{nq} лежит на семействе параллельных гиперплоскостей $\{T_s^t\}$ вида

$$\frac{s}{n-s} y_1 + \frac{s}{n-s} y_2 + \ldots + \frac{s}{n-s} x_{n-s} - \tag{25}$$

$$- x_{n-s+1} - \ldots - x_n + a_t^s = 0,$$

$$t \in J_{\gamma_s}, \quad \gamma_s \leq \frac{n!}{s!(n-s)!}, \tag{26}$$

при этом s может принимать значения I, 2, ... , n-I.

В выражении (25) a_t^s вычисляется по следующей формуле

$$a_t^s = \sum_{k=n-s+1}^{n} g_{\alpha_k} - \frac{s}{n-s} \sum_{k=1}^{n-s} g_{\beta_k}, \tag{27}$$

где $\alpha_j \in J_n$, $\alpha_k \neq \alpha_j$ при $k \neq j$, $k, j \in J_n \setminus J_{n-s}$, $\beta_k \neq \beta_j$ при $k \neq j$, $k, j \in J_{n-s}$ $\forall s \in J_{n-1}$ для всех t удовлетворяющих условиям (26).

Это разложение E_{nq} по гиперплоскостям дает возможность сформулировать условия, при которых изложенный метод решения задачи (I)-(3) является точным.

Теорема 2. Пусть $n=m$ и решение задачи (I)-(3) осуществляется изложенным методом, на первом этапе задача линейного программирования решается способом, дающим вершину допустимой области. Решение задачи (5), (6), (3), (7) является точным решением задачи (I)-(3), если ограничения (3) имеют вид

$$\frac{s}{n-s}\sum_{i=1}^{n-s} y_i - \sum_{i=n-s+1}^{n} y_i + a_t^s \leq 0 \tag{28}$$

или

$$\frac{s}{n-s}\sum_{i=1}^{n-s} y_i - \sum_{i=n-s+1}^{n} y_i + a_t^s \geq 0 \tag{29}$$

или вид (25), где $t \in J_{\gamma_s}$, γ_s удовлетворяет условию (26), а S - фиксированное целое число, принимающее значение от I до n-I. Здесь / как и в (25)/ a_t^s вычисляется по формуле (27).

Справедливость теоремы 2 следует из параллельности гиперплоскостей (25) и принадлежности любой точки из множества E_{nq} какой-нибудь плоскости семейства.

В работе [2] для множества E_n получен следующий результат: каждое неравенство

$$\sum_{j=1}^{i} x_{\alpha_j} \geq \sum_{j=1}^{i} g_j \tag{30}$$

системы (7) порождает множество $D_i(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i)$, содержащее не более C_n^i параллельных между собой $(n-2)$-плоскостей, определяемых системой уравнений, состоящей из уравнения

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = \sum_{j=1}^{n} g_j \tag{31}$$

и следующего уравнения

$$\sum_{j=1}^{i} x_{\alpha_j} = \sum_{j=1}^{i} g_{\beta_j}, \tag{32}$$

где α_j, $\beta_j \in J_n$, $\alpha_k \neq \alpha_j$, $\beta_k \neq \beta_j$ при $k \neq j$, $k, j \in J_i$, $i \in J_{n-1}$. Причем каждая точка из множества E_n лежит на одной из $(n-2)$-плоскостей любого семейства.

Это разложение E_n по $(n-2)$-плоскостям дает возможность сформулировать и доказать следующие условия, при которых описанный метод решения задачи (I)-(3) в случае множества E_n является точным.

Теорема 3. Пусть $n=m=q$ и решение задачи (I)-(3) осуществляется изложенным методом, на первом этапе задача линейного программирования решается методом, который дает вершину допустимой области. Решение задачи (5), (6), (3), (7) при этом является точным решением задачи (I)-(3), если ограничения (3) имеют вид

$$\sum_{j=1}^{i} y_{\alpha_j} \geq \sum_{j=1}^{i} g_{\beta_j}, \tag{33}$$

или

$$\sum_{j=1}^{i} y_{\alpha_j} \leq \sum_{j=1}^{i} g_{\beta_j}, \tag{34}$$

или вид (32), где $\alpha_j, \beta_j \in J_n$, $\alpha_k \neq \alpha_j$, $\beta_k \neq \beta_j$ при $k \neq j$, $k, j \in J_i$, а i - фисированное целое число, принимающее значение от I до n-I.

Справедливость теоремы 3 устанавливается так же как и для теоремы 2.

Рассмотрим метод решения задачи комбинаторной оптимизации на множестве E_{nq}, в котором $n=q$, а $g_i=i \ \forall i \in J_n$. Обозначим это множество E_n. Итак, пусть нужно найти

$$\varphi(x^*) = \min_{x \in E_n} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} d_{ij} |x_i - x_j|, \tag{35}$$

$$x^* = \arg\min_{x \in E_n} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} d_{ij} |x_i - x_j|, \tag{36}$$

где d_{ij} - некоторые, вообще говоря, вещественные, положительные константы.

Сделаем несколько обозначений и определений. Обозначим

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} d_{ij} |x_i - x_j|. \tag{37}$$

Не трудно видеть, что функция $\varphi(x)$, определяемая выражением (37), кусочно-линейна и выпукла в R^n. Как известно, множество E_n лежит в гиперплоскости, определяемой [I] уравнением

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = n(n+1)/2, \tag{38}$$

и совпадает с множеством вершин перестановочного многогранника [7,2]. Рассмотрим так называемые ребра функции $\varphi(x)$, задаваемые следующими ограничениями

$$x_{d_1^i} = x_{d_2^i} = \ldots = x_{d_i^i}; \tag{39}$$

$$x_{d_{i+1}^i} = x_{d_{i+2}^i} = \ldots = x_{d_n^i}; \tag{40}$$

$$x_{n+1} = \varphi(x), \tag{41}$$

где $d_j^i \in J_n$, $d_j^i \neq d_k^i \ \forall j,k \in J_n$, $i \in J_{n-1}$. Не нарушая общности, можем считать, что x_1 принадлежит равенствам (39). Обозначим ребро (39)-(41) функции $\varphi(x)$ $R(d_1^i, d_2^i, \ldots, d_i^i)$. Назовем проекцией ребра $R(d_1^i, d_2^i, \ldots, d_i^i)$ на гиперплоскость (38) множество точек $P(d_1^i, d_2^i, \ldots, d_i^i) \subset R^n$, удовлетворяющих ограничениям (38)-(40). Проекции $P(d_1^i, d_2^i,$

$\ldots, \alpha_i^i)$,ребру $R(\alpha_1^i, \alpha_2^i, \ldots, \alpha_i^i)$ соответствует $(n-2)$-грань многогранника $\Pi_{nq}(g)$, определяемая системой из двух уравнений: (38) и

$$\sum_{j=1}^{i} x_{\alpha_j^i} = i(i+1)/2. \qquad (42)$$

Свойства функции $\Phi(x)$: I) количество ребер функции $\Phi(x)$ равно 2^n-2; 2) каждой области, где функция $\Phi(x)$ преобразуется в линейную, принадлежит одна точка множества E_n вершин многогранника $\Pi_{nq}(g)$ и наоборот; 3) количество областей линейности функции $\Phi(x)$ равно $n!$; 4) ребро функции $\Phi(x)$ наименее наклоненное, если все смежные ребра имеют больший наклон. Здесь и далее смежными ребрами /и их проекциями/ называем ребра /прекции/ функции $\Phi(x)$, если соответствующие им $(n-2)$-грани (38), (42) смежны, т.е. пересекаются по $(n-3)$-граням $\Pi_{nq}(g)$. При фиксированном i $(i \in J_{n-1})$ ребро $R(\alpha_1^i, \alpha_2^i, \ldots, \alpha_i^i)$ назовем ребром типа i, а $P(\alpha_1^i, \alpha_2^i, \ldots, \alpha_i^i)$ -прекцией типа i. Ниже будем предполагать, что аргумент функции $\Phi(x)$ удовлетворяет условию (38). Нетрудно видеть, что угол между $R(\alpha_1^i, \alpha_2^i, \ldots, \alpha_i^i)$ и гиперплоскостью (38) определяется только величиной

$$\Phi(z) = \tau \cdot \omega(i) \sigma(R(\alpha_1^i, \alpha_2^i, \ldots, \alpha_i^i)), \qquad (43)$$

где $\tau = 1/2((n-1) \cdot n \cdot (n+1)/3)^{1/2}$ [1], $\omega(i) = (n/(i(n-i)))^{1/2}$; $\sigma(R(\alpha_1^i, \alpha_2^i, \ldots, \alpha_i^i)) = \Phi(\bar{x})$, а $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$, $\bar{x}_{\alpha_j^i} = 0 \quad \forall j \in J_i$, $\bar{x}_{\alpha_j^i} = 1 \quad \forall j \in J_n \setminus J_i$.

Рассмотренные выше свойства функции $\Phi(x)$, а также свойства множества E_n [2] позволяют построить точный метод решения задачи (35), (36), который распадается на ряд этапов.

На первом этапе формируется n-I ребро функции $\Phi(x)$, по одному каждого типа. С помощью формулы (43) определяется наименее наклоненное /к гиперплоскости (38)/ из них. На втором этапе проверяется, является ли ребро, полученное на первом этапе, наименее наклоненным из всех ребер функции цели. Это делается с помощью четвертого свойства функции $\Phi(x)$. Найдя наименее наклоненное ребро функции $\Phi(x)$ и смежные с ним наименее /среди однотипных/ наклоненные ребра остальных типов, мы вместе с тем сформировали следующую систему из n линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} x_{\alpha_1^i} + x_{\alpha_2^i} + \ldots + x_{\alpha_i^i} = (1+i)\cdot i/2 & \forall i \in J_{n-1}, \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_n = (1+n)\cdot n/2. \end{cases} \quad (44)$$

Здесь $\alpha_1^i, \alpha_2^i, \ldots, \alpha_i^i$ - набор констант, соответствующих ребру типа i из найденных выше наименее наклоненных. Назовем номером уравнения в системе (44) верхний индекс у величены α_j^i , а уравнение с номером n назовем последним уравнением этой системы. Если система (44) совместна, то ее решение является решением задачи (46). Однако, вообще говоря, система (44) может быть не совместна, т.к. ребра смежные с наименее наклоненным ребром функции $\Phi(x)$, могут быть не смежны между собой. В этом случае необходим третий этап решения задачи (35), (36). Он состоит в следующем. Определяется совместная подсистема максимального ранга системы (44). Обозначим его через τ. Рассматриваются совместные подсистемы ранга τ-I. Пусть A - одна из таких подсистем. Она дополняется до совместной системы вида (44). Это делается так. Пусть $u_j, u_k \in A$, где j, k $(j < k-1)$ - номера уравнений, $j, k \in J_n$; $u_l \notin A$ $\forall l \in J_{k-1} \setminus J_j$. Система A дополняется уравнением $\bar{u}_l$ $\forall l \in J_{k-1} \setminus J_j$, совместным с u_j и u_k , причем ребро, соответствующее грани перестановочного многогранника $\Pi_{nq}(g)$, лежащей на гиперплоскости $\overline{\pi}_\ell$, является наименее наклоненным из ребер с указанным выше свойством среди ребер типа ℓ. Так же происходит дополнение системы A, если существуют такие уравнения u_ℓ, что $\forall \ell \in J_{k-1}$ $u \notin A$, а $u_k \in A$. Дополнив подсистему A всеми $n-\tau+1$ уравнениями $\overline{\pi}_\ell$, проверяем ее совместность. Если она не совместна, то выбираем максимального ранга совместную подсистему и дополняем ее так как это описано выше для подсистемы A. Просмотрев концевые вершины дерева, получающегося при таком дополнении исходной подсистемы A, получаем решение соответствующее этой подсистеме, если таких подсистем несколько, то выбираем лучшее из полученных решений. Как следует из построения процесса решения, оно и у удовлетворяет условие (36).

В заключение приведем задачи, которые сводятся к приведенным в статье оптимизационным моделям и могут быть решены изложенными выше методами.

К задаче (35)-(36) может быть сведена следующая задача. Имеется n одинаковых прямоугольников размерами $a \times b$, расположенных на плоскости в линейку так, что стороны длины a соседних прямоугольников совмещены, а центр симметрии самого левого прямоугольника находится в центре координат. Центры симметрии прямоугольников соединены между собой связями с весами α_{ij}, $i \neq j$, $i,j \in J_n = \{1,2,\dots,n\}$. Требуется определить такое размещение прямоугольников, чтобы суммарная взвешенная длина сети, связывающей центры симметрии прямоугольников, имела наименьшую длину.

К задаче (I)-(3) можно свести, например, следующую.

Пусть имеется достаточно длинный рулон материала ширины H. Этот рулон разрезается на k рулонов заданной ширины h, необходимо из полученных рулонов вырезать заданный набор n прямоугольных выкроек ширины h с длинами $a_1, a_2, \dots, a_n$. Предполагается, что полученные рулоны ширины h могут иметь зоны по всей ширине, из которых делать выкройки нельзя. Задача состоит в том, чтобы минимизировать длину использованной части рулона ширины H.

Литература

I.Стоян Ю.Г. Некоторые свойства специальных комбинаторных множеств.-Харьков,I980.-22с.(Препринт/Ин-т пробл. машиностроения АН УССР.:85).

2. Емец О.А. Общий перестановочный многогранник и некоторые его свойства.- Полтава,I983.-20с.-Рукопись представлена Полтав. инж.-строит. ин-том. Деп. в УкрНИИНТИ 28 июня I983г., №6I6-Ук-Д83.

3.Ермольев Ю.М., Ляшко И.И., Михалевич В.С., Тюптя В.И. Математические методы исследования операций.-Киев: Вища школа,I979.-3I2с.

4.Булатов В.П. Методы погружения в задачах оптимизации. -Новосибирск: Наука, I977.-I58с.

5.Емец О.А. О расширении возможностей МО ОАСУ при решении задач ЛП с большим количеством ограничений посредством применения МППО.-В кн.: Всесоюзный научн.-практ. семинар "Прикл. аспекты упр. слож. системами"./г. Кемерово, 22-24 марта I983г./: Тез. докл. П часть. М.,I983.с.228.

6.Стоян Ю.Г. Об одном отображении комбинаторных множеств в евклидово пространство.-Харьков, I982.-33с.(Препринт/Ин-т пробл. машиностроения АН УССР.:I73).

7.Емеличев В.А., Ковалев М.М., Кравцов М.К.,Многогранники, графы, оптимизация.-М.:Наука,I98I.-344с.

Печатается в соответствии с решением Совета Полтавского инженерно-строительного института от 24 декабря 1983 года.

10.01