Министерство высшего и среднего специального образования УССР
Полтавский инженерно-строительный институт

УДК 519.854.2

О.А. Емец

ОБ ОБЩЕМ ПОЛИПЕРЕСТАНОВОЧНОМ МНОГОГРАННИКЕ И НЕКОТОРЫХ ЕГО СВОЙСТВАХ

Полтава - 1989

Как известно, ряд задач теории расписания, размещения геометрических объектов могут быть поставлены как задачи нахождения экстремальных значений на множестве перестановок. В связи с этим возникает проблема систематического изучения свойств допустимых множеств этих задач оптимизации.

Изучению свойств одного из таких множеств посвящена настоящая работа.

Обозначим через J_n множество $\{1,2,\ldots,n\}$. Рассмотрим упорядоченное разбиение множества J_n на s множеств $N_1,\ldots,N_s$, причем $N_i \cap N_j = \emptyset \quad \forall i,j \in J_s$. Обозначим через H множество перестановок $\pi = (\pi_{N_1},\ldots,\pi_{N_s})$, где π_{N_i} - произвольная перестановка элементов множества N_i. Через g обозначим набор действительных чисел $(g_1, g_2, \ldots, g_n)$, среди которых могут быть и одинаковые. Рассмотрим погружение [1] множества H в арифметическое евклидово пространство R^n, которое осуществим по следующему правилу. Образ множества H в пространстве R^n обозначим через $E(g,H)=\{(g_{i_1}, g_{i_2}, \ldots, g_{i_n})\}$, где $g_{i_j} = g_{\pi(j)}$ $\forall j \in J_n \quad \forall \pi \in H$. Множество $E(g,H)=\{g(\pi)=(g_{\pi(1)},\ldots,g_{\pi(n)}) \; \forall \pi \in H\}$ будем называть евклидовым полиперестановочным множеством с повторениями.

Как отмечалось выше ряд задач оптимизации могут быть представлены в следующем виде. Для заданной $\forall g(\pi) \in E(g,H)$ действительной функции $f(g(\pi))$, требуется найти такое $g^*(\pi) \in E(g,H)$, что $f(g^*(\pi)) \leq f(g(\pi)) \quad \forall g(\pi) \in E(g,H)$.
В данной работе исследуется выпуклая оболочка $\Pi(g,H) = conv\, E(g,H)$ в предположении, что среди компонент вектора g имеются и равные. Далее $\Pi(g,H)$ будем называть общим (в отличии от случая, когда все компоненты различны [2]) многогранником евклидового полиперестановочного множества (с повторениями) или общим по-

липерестановочным многогранником.

Пусть g^{N_i} - n_i-мерный вектор ($n_i = |N_i| \quad \forall i \in J_S$), образованный компонентами вектора g с номерами из множества N_i . Упорядочим компоненты вектора g^{N_i} по невозростанию

$$g_1^{N_i} \geqslant g_2^{N_i} \geqslant \ldots \geqslant g_{n_i}^{N_i}.$$

Положим

$$N_i' = \left\{ \left(\sum_{j=1}^{i-1} n_j \right) + 1, \ldots, \sum_{j=1}^{i} n_j \right\} \quad \forall\, i \in J_S.$$

Теорема I. Многогранник $\Pi(g,H)$ определяется системой соотношений

$$\begin{cases} \sum\limits_{j \in N_i'} x_j = \sum\limits_{j \in N_i'} g_j^{N_i} & \forall i \in J_S ; \\ \sum\limits_{j \in \omega^i} x_j \leqslant \sum\limits_{j=1}^{|\omega^i|} g_j^{N_i} & \forall \omega^i \subset N_i' \;\; \forall i \in J_S. \end{cases} \qquad (1)$$

Доказательство. Используем тот факт, что в случае, когда среди компонент вектора g нет одинаковых теорема доказана в [2]. Выберем число ε удовлетворяющее соотношению

$$0 < \varepsilon < \frac{1}{\mu} \min_{\substack{g_i \neq g_j \\ i,j \in J_n}} |g_i - g_j|,$$

где

$$\mu = \max_{1 \leq i \leq n} \{\mu_i\},$$

а число μ_i - кратность элемента g_i в наборе g.

Пусть $\bar{g}$ - вектор состоящий из компонент вектора g , но $\bar{g}_1 \geqslant \bar{g}_2 \geqslant \ldots \geqslant \bar{g}_n$. Рассмотрим вектор $\bar{g}_\varepsilon$, получаемый из вектора $\bar{g}$ по следующему правилу $\bar{g}_1^\varepsilon = \bar{g}_1$; $\bar{g}_K^\varepsilon = \bar{g}_K$, если $\bar{g}_K \neq \bar{g}_{K-1}$ в противном случае: $\bar{g}_K^\varepsilon = \bar{g}_{K-1}^\varepsilon - \varepsilon$; $K = 2, 3, \ldots, n$. Очевидно, что

$$\bar{g}_1^\varepsilon > \bar{g}_2^\varepsilon > \ldots > \bar{g}_{n_i}^\varepsilon.$$

Обозначим через g^{ε} набор элементов из $\bar{g}^{\varepsilon}$, стоящих в таком же порядке в каком они стояли в g до переупорядочения и модификации. Тогда на основании теоремы I из [2] можно утверждать, что многогранник $\Pi(g^{\varepsilon},H)$ определяется системой соотношений

$$\begin{cases} \sum\limits_{j\in N_i'} x_j = \sum\limits_{j\in N_i'} g_j^{N_i,\varepsilon} \quad \forall i\in J_s; \\ \sum\limits_{j\in\omega^i} x_j \leqslant \sum\limits_{j=1}^{|\omega^i|} g_j^{N_i,\varepsilon} \quad \forall \omega^i\subset N_i' \;\; \forall i\in J_s; \end{cases} \qquad (2)$$

где через $g_j^{N_i,\varepsilon}$ обозначены элементы векторов $g^{N_i,\varepsilon}$ образуемых из g^{ε} так же, как g^{N_i} из g.

Теперь осуществим предельный переход, устремив $\varepsilon\to 0$. В силу построения $g_j^{N_i,\varepsilon}\to g_j^{N_i}$, многогранник $\Pi(g^{\varepsilon},H)$ переходит в $\Pi(g,H)$, а из системы (2) для $\Pi(g^{\varepsilon},H)$ получаем систему (I) для $\Pi(g,H)$, что и требовалось доказать.

Пусть $\mathcal{M}_i$ d_i-мерный многогранник $\forall i\in J_s$. Как известно, под произведением многогранников $\mathcal{M}_1,\mathcal{M}_2,\ldots,\mathcal{M}_s$ понимают множество

$$\bigotimes_{i=1}^{s}\mathcal{M}_i=\left\{x\in R^{d_1+d_2+\ldots+d_s}\;\middle|\; x=(x_1,\ldots,x_s),\; x_i\in\mathcal{M}_i \;\forall i\in J_s\right\}.$$

В дальнейшем нам потребуется следующая лемма, приведенная в [2].

Лемма. I) Произведение многогранников есть многогранник;

2) $\dim\left(\bigotimes\limits_{i=1}^{s}\mathcal{M}_i\right)=\sum\limits_{i=1}^{s}\dim\mathcal{M}_i,$

где $\dim A$ - размерность множества A;

3) K-мерные грани многогранника $\bigotimes\limits_{i=1}^{s}\mathcal{M}_i$ образует множество с элементами вида $\bigotimes\limits_{i=1}^{s}F_i$, где F_i есть K_i-мерная грань мно-

гогранника $\mathcal{M}_i$, причем $K_1+K_2+\ldots+K_s=K$.

Обозначим через q_i число различных компонент вектора g^{N_i} а через $\Pi_{n_i q_i}(g^{N_i})$ - общий перестановочный многогранник [3] индуцируемый g^{N_i} .

Теорема 2.

$$\Pi(g,H)=\bigotimes_{i=1}^{s}\Pi_{n_i q_i}(g^{N_i}).$$

Доказательство. Как известно, $\Pi_{n_i q_i}(g^{N_i})$ - это многогранник определяемый системой

$$\begin{aligned}&\sum_{j\in N_i'} x_j=\sum_{j\in N_i'} g_j^{N_i};\\&\sum_{j\in\omega} x_j\le\sum_{j=1}^{|\omega|} g_j^{N_i}\quad\forall\omega\subset N_i'.\end{aligned}\qquad(3)$$

Рассмотрим произведение всех s d_i-мерных многогранников $\Pi_{n_i q_i}(g^{N_i})$. По определению

$$\bigotimes_{i=1}^{s}\Pi_{n_i q_i}(g^{N_i})=\left\{x\in R^{d_1+\ldots+d_s}\,\middle|\,x=(x_1,\ldots,x_s),\ x\in\Pi_{n_i q_i}(g_i)\ \forall i\in J_s\right\},$$

то есть $x\in\bigotimes_{i=1}^{s}\Pi_{n_i q_i}(g^{N_i})$ удовлетворяет каждой из s систем вида (3) $\forall i\in J_s$. Очевидно, что система (I) это и есть все системы (3) $\forall i\in J_s$. Таким образом, если

$$x\in\bigotimes_{i=1}^{s}\Pi_{n_i q_i}(g^{N_i}),$$

то $x\in\Pi(g,H)$ и наоборот, что и требовалось доказать.

Теорема 3. Точки множества $E(g,H)$ и только они являются вершинами многогранника $\Pi(g,H)$.

Доказательство. Для доказательства теоремы воспользуемся леммой и критерием вершины общего перестановочного многогранника [3]. Из этого критерия для многогранника $\Pi_{n_i q_i}(g^{N_i})$

следует, что вершинами его могут быть точки множества $\{g_{\pi(i)} \mid i \in J_n \ \forall \pi \in H\}$, определенного в начале статьи, и только они.

Пусть $g(\pi) \in E(g,H)$. Покажем, что $g(\pi)$ является вершиной многогранника $\Pi(g,H)$. Так как

$$g(\pi) = \bigotimes_{i=1}^{s} g_{\pi(i)},$$

то это следует из второй части леммы (пункты 2) и 3)). Пусть $g(\pi)$ - вершина $\Pi(g,H)$, тогда по второй части леммы

$$g(\pi) = \bigotimes_{i=1}^{s} F_i,$$

где F_i - вершины многогранника $\Pi_{n_i q_i}(g^{N_i})$. Но в качестве F_i на основе критерия вершины многогранника $\Pi_{n_i q_i}(g^{N_i})$ могут выступать только точки множества $\{g_{\pi(i)} \mid i \in J_n \ \forall \pi \in H\}$.
Из определения произведения многогранников и структуры элементов множества $E(g,H)$ следует, что $g(\pi) \in E(g,H)$. Что и требовалось доказать.

Теорема 4. Вершина $g(\pi) \in E(g,H)$ является смежной вершине $g(\sigma) \in E(g,H)$ тогда и только тогда, когда $g(\sigma)$ получается из $g(\pi)$ перестановкой двух компонент $g_j^{N_i}$ и $g_{j+1}^{N_i}$ $j \in J_{n_i-1}, i \in J_s$, причем $g_j^{N_i} \neq g_{j+1}^{N_i}$.

Доказательство. В случае, когда все компоненты вектора различны, теорема доказана в [2]. Поэтому для вершин многогранника $\Pi(g^{\varepsilon}, H)$, рассмотренного выше, она справедлива. Осуществим предельный переход, устремив $\varepsilon \to 0$. Смежные вершины в многограннике $\Pi(g^{\varepsilon}, H)$ перейдут в смежные в многограннике $\Pi(g,H)$, если $g_j^{N_i} \neq g_{j+1}^{N_i}$, (в противном случае $g(\sigma) = g(\pi)$), что и доказывает теорему.

Теорема 5. Точки множества $E(g,H)$ принадлежат $(n-1)$-сфере $W \subset R^n$ с центром в точке O_1^*, которая имеет координаты

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = t^* = \frac{1}{n}(g_1 + g_2 + \ldots + g_n) \qquad (4)$$

и радиус

$$r=\left(\sum_{k=1}^{n}(g_k-t^*)^2\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (5)$$

Доказательство. Множество $E(g,H)$ является подмножеством множества $E_{nq}\in R^n$, которое состоит из всех перестановок с повторениями набора g, а точки множества E_{nq} лежат [I] на сфере

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-t^*)^2=r^2, \qquad (6)$$

где r, t^* - вычисляются по формулам (4) и (5) и на гиперплоскости из системы (I). Что и доказывает теорему.

Теорема 6. Множество $E(g,H)\in R^n$ лежит на цилиндрической поверхности

$$\sum_{j\in N_i'}^{n_i}(x_j-t_i^*)^2=r_i^2; \quad i\in J_s; \qquad (7)$$

где

$$t_i^*=\frac{1}{n_i}\sum_{j\in N_i'}g_j^{N_i}; \qquad (8)$$

$$r_i=\left(\sum_{j\in N_i'}(g_k^{N_i}-t_i^*)^2\right)^{1/2}.$$

Доказательство. Множество $E_{n_i q_i}(g^{N_i})$ лежит на сфере (7) [1]. Поэтому по построению точки множества $E(g,H)$ удовлетворяют уравнениям (7), что и требовалось доказать.

Следующая теорема дает описание множества $E(g,H)$ как пересечения многогранника и семейств цилиндрических поверхностей в R^n и гиперсферы.

Теорема 7. Точки множества $E(g,H)$ и только они удовлетворяют системе (I), (6), (7).

Доказательство. Из теорем 3,5, 6 следует, что точка множества $E(g,H)$ удовлетворяют системе (I), (6), (7). Нетрудно видеть, что никакая точка удовлетворяющая (6) или (7) отличная от точки из $E(g,H)$ не удовлетворяет систему (I), что и доказывает теорему.

Рассмотрим вопросы относящиеся к критерию m-грани общего полиперестановочного многогранника.

Для случая общего перестановочного многогранника, то есть когда $s=1$, при положительных компонентах вектора g критерий доказан в [4]. Обобщим его на случай произвольных компонент вектора g.

Пусть компоненты вектора g определены следующим образом: $g_i = g^j$, если $k_{j-1} < i \le k_j$, где $0 = k_0 < k_1 < \ldots < k_q = n$ и $g^1 > g^2 > \ldots > g^q$.

Теорема 8. а) Пусть F - m-грань многогранника $\Pi_{nq}(g)$, определяемого системой

$$\begin{cases} \sum\limits_{i\in\omega} x_i \le \sum\limits_{i=1}^{|\omega|} g_i \quad \forall \omega \subset J_n ; & (10) \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} g_i . & (11) \end{cases}$$

Тогда существуют такие подмножества $\omega_1 \subset \omega_2 \subset \ldots \subset \omega_{n-m} = J_n$, для которых неравенства в (I0) обращаются в равенства при любом $x \in F$, то есть соответствующие ограничения являются жесткими для F. При этом F является множеством решений системы, полученной из (I0), (II) заменой неравенств в (I0) равенствами для $\omega = \omega_\sigma$ при $\sigma \in J_{n-m-1}$.

б) Если для подмножеств $\omega_1 \subset \omega_2 \subset \ldots \subset \omega_\ell = J_n$ неравенства в (I0), (II) заменить на равенства, то множество F решений полученной системы является m-гранью многогранника $\Pi_{nq}(g)$ где

$$m = \dim F = n - \{\ell + \sum(|\omega_\sigma| - |\omega_{\sigma-1}| - 1)\}$$

и суммирование ведется по всем индексам $\sigma \in J_\ell$, для каждого из которых найдется такое $j \in J_p$, что $K_{j-1} \le |\omega_{\sigma-1}|$ и $|\omega_\sigma| \le K_j$ (считаем, что $|\omega_0| = 0$).

Доказательство. В случае когда наименьший элемент набора g неотрицательный, то есть, $g^q \ge 0$ теорема справедлива [4]. Для доказательства в общем случае воспользуемся параллельным переносом множества $E(g,H)$ вершин многогранника $\Pi(g,H)$ по направлениям всех координатных осей на произвольную величину δ так, чтобы все вершины имели неотрицательные координаты. Следовательно,

$$\begin{cases} x_i = x_i' - \delta\ ; \\ g_i = g_i' - \delta \quad \forall i \in J_n \end{cases} \qquad (12)$$

Так как в правой и левой частях всех неравенств (I0) и равенств (II) количество слагаемых одинаково, то в силу (I2) для параллельно перенесенного многогранника система его описывающая будет иметь вид (I0) - (II). Откуда и следует, в силу произвольности δ, справедливость теоремы.

Обобщим теорему 8 на случай полиперестановочного многогранника. Пусть $g_{k^i}^{N_i} = (g^{N_i})^j$, если $K_{j-1}^i < k^i \le K_j^i$, где $0 = K_0^i < K_1^i < \ldots < K_{q_i}^i$ $\forall k^i \in J_{n_i}$, $(g^{N_i})^1 > \ldots > (g^{N_i})^{q_i}$ $\forall i \in J_s$.

Теорема 9. а) Пусть F - m-грань многогранника $\Pi(g,H)$. Тогда найдутся такие подмножества $\omega_1^i \subset \omega_2^i \subset \ldots \subset \omega_{n_i - m_i}^i = N_i'$. $\forall i \in J_s$, $m_1 + m_2 + \ldots + m_s = m$, для которых неравенства из (I) обращаются в равенства при любом $x \in F$, то есть соответствующие ограничения являются жесткими для F. При этом F является множеством решений системы полученной путем замены неравенствав системе (I) равенствами для $\omega_{\sigma_i}^i$ $\forall \sigma_i \in J_{n_i - m_i}$ $\forall i \in J_s$.

б) Если для подмножеств $\omega_1^i \subset \omega_2^i \subset \ldots \subset \omega_{l_i}^i = N_i'$ неравенства в (I) заменить на равенства, то множество F решений полученной системы является m-гранью $\Pi(g, H)$, где

$$m = \sum_{i=1}^{s} m_i ;$$

а

$$m_i = n_i - \left\{ l_i + \sum \left(|\omega_{\sigma_i}^i| - |\omega_{\sigma_i - 1}^i| - 1 \right) \right\}$$

и суммирование ведется по всем индексам $\sigma_i \in N_{l_i}$, для каждого из которых найдется такое $j \in N_{q_i}$, что $K_{j-1}^i \leq |\omega_{\sigma_i - 1}^i|$ и $|\omega_{\sigma_i}^i| \leq K_j^i$ (считаем, что $|\omega_0| = 0$) $\forall i \in J_s$.

Справедливость теоремы непосредственно вытекает из леммы и теоремы 8.

Литература

I. Стоян Ю.Г. Некоторые свойства специальных комбинаторных множеств.- Харьков, 1980. - 22 с. (Препринт / Ин-т проблем машиностроения АН УССР. : 85)

2. Исаченко А.Н., Емеличева Е.В. Многогранник одной задачи теории расписаний.//Вопросы планирования и экономико-математического моделирования. Изд-во НИИ ЭМП, Минск, 1980г., с. II7-II9.

3. Емец О.А. Общий перестановочный многогранник и некоторые его свойства.- Полтава, 1983.-20с. - Рукопись предст. Полтав. инж.-строит. ин-том. Деп. в УкрНИИНТИ 28 июля 1983г., №6I6 - УкД83.

4. Бондаренко В.А., Шуникова Е.В. Обобщенные перестановочные многогранники и свойства алгоритмов сортировки. - Москва, 1985. - I3с. - Рукопись предст. редколлегией журнала вычислительной математики и математической физики. Деп. в ВИНИТИ №7454 - В85.

Печатается в соответствии с решением научно-технического совета Полтавского инженерно-строительного института от 17 июня 1989 года.