2

Министерство высшего и среднего образования УССР

Полтавский инженерно-строительный институт

УДК 519.854.2

О.А.Емец

ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД И ЕГО АПРИОРНАЯ ОЦЕНКА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ НА ПЕРЕСТАНОВКАХ

Деп. в УкрНИИНТИ

15.9.87.

N 2532 - Ук 87.

№ 2532-Ук87

Полтава-1987

Рассмотрим следующую задачу: найти

$$\min_{x \in R^n} \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \qquad (1)$$

при ограничениях

$$x \in E_{nq} \subset R^n \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i \le b, \; j \in \{1, 2, \dots, m\} = J_m. \qquad (3)$$

Здесь E_{nq} – образ множества P_{nq} перестановок $g = (g_{\alpha_1}, \dots, g_{\alpha_n})$ с повторениями из чисел $g_1, \dots, g_n$, из которых q различны, при погружении [1] его (P_{nq}) в R^n.

Известен [2, 3] следующий трехэтапный подход к приближенному решению линейных оптимизационных задач на перестановках вида (1)–(3). Его идея состоит в следующем. На первом этапе решается задача, в которой ограничение (2) заменяется требованием

$$x \in \Pi_{nq}(g) \qquad (4)$$

Здесь $\Pi_{nq}(g)$ – общий перестановочный многогранник (ОПМ) [2, 4, 5]. Это оправдано тем, что множество E_{nq} является множеством вершин ОПМ. Обозначим точку, доставляющую решение задаче (1), (2), (4), через $\tilde{x}$.

Далее, на втором этапе, который назовем этапом перестановочного округления, по $\tilde{x}$ строится точка $\tilde{x}^{\circ}$, удовлетворяющая ограничениям (2). При этом в точке $\tilde{x}^{\circ}$ могут быть нарушены ограничения (3) и ухудшено значение целевой функции. Поэтому необходим третий этап, на котором строится приближенное решение задачи (1)–(3) – точка $\tilde{x}^{*}$, удовлетворяющая ограничениям (2), (3), – вообще говоря, за счет дальнейшего ухудшения значения функции цели в этой точке.

Однако следует отметить, что автору не было известно общего для любых ограничений вида (3) способа реализации третьего этапа. Поэтому актуальной является задача получения такого способа или такого правила перестановочного округления, при котором ограничения (3) не нарушаются.

В данной работе эта проблема решается следующим образом.

На первом этапе решается задача (1) при ограничениях (4) и следующих

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i \le b_j - \sigma_j, \quad j \in J_m. \qquad (5)$$

Здесь σ_j, $j \in J_m$, выбираются таким образом, чтобы при используемом способе перестановочного округления решение задачи (1), (4), (5) $\tilde{x}$ давало точку $\tilde{x}^0$, удовлетворяющую и ограничение (3), то есть являлось приближенным решением $\tilde{x}^*$ задачи (1)-(3).

Для выбора σ_j, $j \in J_m$, необходимо рассмотреть способ перестановочного округления [3], используемый в настоящей работе для построения $\tilde{x}^0$.

Будем считать, не нарушая общности, что элементы набора $\{q_1, \dots, q_n\}$ чисел, образующих перестановки $q \in P_n q$, пронумерованы так, что $q_i \le q_{i+1}$, $i \in J_{n-1}$.

Перестановочное округление будем осуществлять так. Вычеркнем из набора координат точки $\tilde{x}$ и из набора $\{q_1, \dots, q_n\}$ пару равных чисел $\tilde{x}_i = q_j$, $i, j \in J_n$. Будем так поступать с оставшимися наборами до тех пор, пока это возможно, формируя при этом координаты точки $\tilde{x}^0$ следующим образом: $\tilde{x}_i^0 = \tilde{x}_i$, $i \in J_n$. Обозначим невычеркнутые координаты (из рассматриваемого набора) так: $\tilde{x}_{i_1} \le \tilde{x}_{i_2} \le \dots \le \tilde{x}_{i_t}$, а оставшиеся числа из набора $\{q_1, \dots, q_n\}$ - $q_{j_1} \le q_{j_2} \le \dots \le q_{j_t}$. Положим $\tilde{x}^0_{i_k} = q_{j_k}$, $i_k, j_k \in J_n$ $\forall k \in J_t$, $t \in J_n$. Обозначим через $I = \{i_1, \dots, i_k\}$

Теорема 1. Если

$$\sigma_j = t(q_n - q_1) \sum_{i=1}^{t} |a_{ji}|, \qquad (6)$$

то решение $\tilde{x}$ задачи (1), (4), (5), полученное методом линейного программирования (ЛП), дающим вершину допустимой области решений, после перестановочного округления, описанного выше, дает решение $\tilde{x}^0$, удовлетворяющее ограничениям (3).

Здесь $a'_{j1}, \dots, a'_{jn}$ – коэфициенты j-го ограничения, упорядоченные по убыванию их абсолютных величин.

Доказательство. Выберем произвольное $j \in \mathcal{I}_m$. Рассмотрим

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji} \tilde{x}_i^0 = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} (\tilde{x}_i^0 - \tilde{x}_i) + \sum_{i=1}^{n} a_{ji} \tilde{x}_i =$$

$$= \sum_{i \in I} a_{ji} (\tilde{x}_i^0 - \tilde{x}_i) + \sum_{i=1}^{n} a_{ji} \tilde{x}_j \le \sum_{i \in I} a_{ji} (\tilde{x}_i^0 - \tilde{x}_i) +$$

$$+ b_j - \sigma_j \le \sum_{i \in I} |a_{ji}| |\tilde{x}_i^0 - \tilde{x}_i| + b_j - \sigma_j =$$

$$= \delta + b_j - \sigma_j ;$$

$$\delta = \sum_{i \in I} |a_{ji}| |\tilde{x}_i^0 - \tilde{x}_i| \le \sum_{i=1}^{t} |a'_{ji}| |q_n - q_1| =$$

$$= t(q_n - q_1) \sum_{i=1}^{t} |a'_{ji}| = \delta_j$$

Последнее неравенство справедливо в силу неравенств $q_1 \le \tilde{x}_i^0 \le \le q_n$; $q_1 \le \tilde{x}_i \le q_n \ \forall i \in I$. Выбрав $\sigma_j = \delta_j$, видим, что ограничения (3) выполняются, что и требовалось доказать.

В формулировку теоремы 1 входит параметр t, который представляется необходимым оценить.

Теорема 2. Если формирование точки $\tilde{x}^0$ осуществляется описанным выше способом перестановочного округления, а $\tilde{x}$ получено методом ЛП, дающим вершину допустимой области, то не менее чем для $\max\{0, n-2m_1-1\}$ координат имеет место рабенство $\tilde{x}_i^0 = \tilde{x}_i$, $i \in \mathcal{I}_n \setminus I$, где m_1 – число линейно независимых ограничений в (3), то есть

$$|\mathcal{I}_n \setminus I| \ge \max\{0, n-2m_1-1\}.$$

Доказательство. Так как в точке $\tilde{x}$ по крайней мере n неравенств системы (5), (4) (явный вид ОПМ – в виде системы неравенств приведен, например в [4]) обращаются в равенства, то из системы (4) таких ограничений будет не менее $n-m_1$. Понятно, что $\tilde{x}_i^0=\tilde{x}_i$ для тех j и $i=\alpha_j$, для которых следующие неравенства системы (4) обращаются в равенства в точке.

$$\sum_{\tau=1}^{j-1} x_{\alpha_\tau} \geqslant \sum_{\tau=1}^{j-1} g_\tau ;$$

$$\sum_{\tau=1}^{j} x_{\alpha_\tau} \geqslant \sum_{\tau=1}^{j} g_\tau$$

Очевидно, что таких пар не меньше, чем $n-2m_1-1$. Таким образом, $n-t \geqslant \max\{0, n-2m_1-1\}$, что и требовалось доказать.

Следствие 3. $t \leqslant \min\{n, 2m_1+1\}$

Доказательство. По теореме 2 $t \leqslant -\max\{0, n-2m_1-1\}$

Возможны два случая.

1) $\max\{0, n-2m_1-1\}=0,\ n-2m_1-1<0,\ n<2m_1+1,$
$t \leqslant n < 2m_1+1$

2) $\max\{0, n-2n_1-1\} = n-2m_1-1,\ n-2m_1-1>0,$
$n>2m_1+1,\ t \leqslant -(n-2m_1-1)+n = 2m_1+1<n$

Следовательно, $t \leqslant \min\{n, 2m_1+1\}$, что и требовалось доказать.

Замечание 1. Из формулы (6) и следствия 3 получаем, что

$$\sigma_j = m^*(g_n-g_1)\sum_{i=1}^{m^*}|a'_{ji}| \qquad (7)$$

где $m^*=\min\{n, 2m_1+1\}$.

Замечание 2. Если $m^*=n$, то перестановочное округление фактически имеет вид: $\tilde{x}^0_{\alpha_1}=g_1, \dots, \tilde{x}^0_{\alpha_n}=g_n$, где $\tilde{x}_{\alpha_1} \leqslant \dots \leqslant \tilde{x}_{\alpha_n}$. Таким образом, теорема 1 верна и для этого способа перестановочного округления, если заменить m^* в формуле (7) на n, а именно:

$$\sigma_j = n(g_n-g_1)\sum_{i=1}^{n}|a'_{ji}|$$

Представляется интересным оценить изменение функции цели (1) при переходе от точки $x^0 \in E_{nq}$ к точке x^*, доставляющей точное решение задаче (1)–(3). Оценим величину

$$\delta = \left| \frac{\sum_{i=1}^{n} c_i x_i^0 - \sum_{i=1}^{n} c_i x_i^*}{\sum_{i=1}^{n} c_i x_i^*} \right| \qquad (8)$$

Докажем предварительно следующую лемму.

Лемма 4. Если в задаче (1), (2) $c_1 \leq \ldots \leq c_n$, то $x^* = (g_n, \ldots, g_1)$ является ее решением.

Доказательство. Если $x^* = (g_n, \ldots, g_1)$ доставляет минимум функции

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i,$$

то по определению минимума $\forall x \in E_{nq}$

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i^* \leq \sum_{i=1}^{n} c_i x_i .$$

Рассмотрим смежные с x^* вершины ОПМ. По критерию смежности вершин ОПМ [4,5] любая вершина x смежная с x^* отличается от нее перестановкой неравных компонент g_i и g_{i+1} $\forall i \in J_{n-1}$. Рассмотрим приращение ΔC функции при переходе от x к x^*.

$\Delta C = c_i g_{n-i} + c_{i+1} g_{n-i+1} - (c_i g_{n-i+1} + c_{i+1} g_{n-i}) = c_i (g_{n-i} - g_{n-i+1}) + c_{i+1} (g_{n-i+1} - g_{n-i}) = (g_{n-i+1} - g_{n-i})(c_{i+1} - c_i) \geq 0$. Следовательно, в силу линейности целевой функции и

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i^* \leq \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \qquad \forall x \in E_{nq},$$

что и требовалось доказать.

Следствие 5. Если рассматривается задача определения максимума функции $c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n$, $c_1 \leq \ldots \leq c_n$, при условии

(2), то он достигается при $x^* = (g_1, \dots, g_n)$

Доказательство. Рассмотрим задачу минимизации функции $-c_1 x_1 - \dots - c_n x_n$ при условии (2). Очевидно, что точка доставляющая решение этой задаче и задаче из условия следствия 5 совпадают. Но $-c_1 \geqslant \dots \geqslant -c_n$ и по лемме 4 ее решением является точка $x^* = (g_1, \dots, g_n)$, откуда и следует справедливость следствия 5.

Рассмотрим набор модулей разностей $\Delta_i = |y_i - z_i| \; \forall i \in J_n$, где $(y_1, \dots, y_n) \in E_{ng}$, $(z_1, \dots, z_n) \in E_{ng}$. Очевидно, что Δ_i, $i \in J_n$, принадлежат множеству из n элементов $\{|g_n - g_1|, |g_n - g_1|, |g_{n-1} - g_2|, |g_{n-1} - g_2|, \dots\} = \mathcal{D}$, в котором d различных элементов, $d \leq [(n+1)/2]$, где $[\cdot]$ – целая часть числа. Обозначим $\Delta_1^* = |g_n - g_1|$, $\Delta_2^* = |g_n - g_1|$, $\Delta_3^* |g_{n-1} - g_2|$ и так далее, $\Delta_i^* \geqslant \Delta_{i+1}^* \; \forall i \in J_{n-1}$, а множество перестановок $\Delta = (\Delta_1, \dots, \Delta_n)$ из элементов множества $\mathcal{D}$ через $\mathcal{D}_{nd}$.

Теорема 6. Если точка x^0 получается из какой – либо точки $x \in R^n$ применением произвольного правила перестановочного округления, то δ из (8) удовлетворяет условиям:

1) если

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i > 0 \quad \forall x \in E_{ng},$$

то

$$\delta \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} |c_i| \Delta_i^*}{\sum_{i=1}^{n} \bar{c}_i g_{n-i+1}};$$

2) если

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i < 0 \quad \forall x \in E_{ng},$$

то

$$\delta \le \frac{\sum_{i=1}^{n} |c_i'| \Delta_i^*}{-\sum_{i=1}^{n} \bar{c}_i g_i};$$

где $\bar{c}_i,\ c_i' \in \{c_j\}_{j=1}^{n},\ |c_1'| \geqslant \ldots \geqslant |c_n'|;\ \bar{c}_1 \geqslant \ldots \geqslant \bar{c}_n$

Доказательство. Рассмотрим числитель формулы (8).

$$\sum_{i=1}^{n} c_i (x_i^0 - x_i^*) \le \left| \sum_{i=1}^{n} c_i (x_i^0 - x_i^*) \right| \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{n} |c_i| |x_i^0 - x_i^*| \le \max_{\Delta \in D_{nd}} \sum_{i=1}^{n} |c_i| \Delta_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} |c_i'| \Delta_i^*$$

где последнее равенство справедливо по следствию 5.

Рассмотрим знаменатель формулы (8).

В случае, если $\forall x \in E_{nq}$

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i > 0$$

$$\left| \sum_{i=1}^{n} c_i x_i^* \right| = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i^* \geqslant \min_{x \in E_{nq}} \sum_{i=1}^{n} c_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \bar{c}_i g_{n-i+1}$$

где последнее равенство справедливо по лемме 4, что и требовалось доказать.

В случае, если $\forall x \in E_{nq}\ \ \sum_{i=1}^{n} c_i x_i < 0,$

$$\left| \sum_{i=1}^{n} c_i x_i^* \right| = -\sum_{i=1}^{n} c_i x_i^* \geqslant -\sum_{i=1}^{n} \bar{c}_i g_i$$

где последнее неравенство справедливо по следствию 5, что и требовалось доказать.

Замечание 3. Отметим, что в условии теоремы 6 не требуется, чтобы x^0 получалась в результате решения задачи (1), (4), (5) с последующим перестановочным округлением. Ее можно использовать, для оценки любого способа получения приближенного (допустимого) решения задачи (1)-(3), доставляемого точкой $x^{0} \in E_{nq}$.

Настоящая работа является незначительным расширением доклада, сделанного 26 мая 1986 года на постоянно действующем семинаре "Математические методы геометрического проектирования" (г. Харьков), руководимым членом корреспондентом АН УССР Ю.Г.Стояном. Автор выражает глубокую признательность и благодарность участникам семинара за ценные обсуждения.

Литература

1. Стоян Ю.Г. Некоторые свойства специальных комбинаторных множеств. – Харьков, 1980. – 22с. (Препринт/ Ин-т пробл. машиностроения АН УССР.: 85).

2. Стоян Ю.Г., Емец О.А. О комбинаторных задачах размещения прямоугольников. – Экономика и математические методы, 1985,т. 21, №5, с. 869-881.

3. Емец О.А. Оптимизация на перестановках: методы с погружением для некоторых задач. – Полтава, 1983. – 1-с. – Рукопись предст. Полтав. инж.-стороит. ин-том. Деп. в УкрНИИНТИ 3 авг. 1984г., № 1359Ук-84Деп.

4. Емец О.А. Общий перестановочный многогранник и некоторые его свойства. – Полтава, 1983. – 20с. – Рукопись предст. Полтав. инж.-стороит. ин-том. Деп. в УкрНИИНТИ 28 июня 1983г., №616-УкД83.

5. Емец О.А. Свойства специальных комбинаторных задач оптимизации, методы и алгоритмы их решения.: Автореф. дис. ... канд физ.-мат. наук. – М.: ВЦ АН СССР, 1985. – 16с.

Печатается в соответствии с решением совета Полтавского инженерно-строительного института от 21 мая 1987 года.