

Министерство высшего и среднего специального образования УССР

Полтавский инженерно-строительный институт

514

УДК 519.10

О.А.Емец

ОБЩИЙ ПЕРЕСТАНОВОЧНЫЙ МНОГОГРАННИК
И НЕКОТОРЫЕ ЕГО СВОЙСТВА

616 Уд. 203

Полтава-1983

Библиотека УССР

В работах [1-3] рассматривается перестановочный многогранник (ПМ), изучаются его свойства. В настоящей статье рассматривается общий перестановочный многогранник (ОПМ) и изучаются некоторые свойства ПМ и ОПМ.

Обозначим через $\mathcal{I}_n$ множество $\{1, 2, \dots, n\}$. Пусть имеется набор n вещественных чисел $g_1, g_2, \dots, g_n$, из которых g_i различны.

Рассмотрим полиэдр $\Pi_{nq}(g)$, определяемый следующей системой неравенств

$$\sum_{j=1}^n x_j \leq \sum_{j=1}^n g_j; \quad (I)$$

$$\sum_{j=1}^i x_{d_j} \geq \sum_{j=1}^i g_j; \quad d_j \in \mathcal{I}_n; d_j \neq d_r \quad \forall j \neq r; j, r \in \mathcal{I}_i \quad \forall i \in \mathcal{I}_n.$$

при условии, что

$$g_i \leq g_{i+1} \quad \forall i \in \mathcal{I}_{n-1}. \quad (2)$$

Будем называть совокупность неравенств системы (I), имеющих одинаковое значение индекса i , i -той группой неравенств этой системы $\forall i \in \mathcal{I}_n$, а верхнее неравенство системы (I) - нулевой группой ограничений.

Имеет место следующее утверждение.

Утверждение I. Полиэдр $\Pi_{nq}(g)$ является многогранником.

Доказательство. Для доказательства утверждения достаточно рассмотреть неравенства групп I и $n-I$, которые с учетом неравенств групп 0 и n дают n -куб:

$$g_1 \leq x_i \leq g_n \quad \forall i \in \mathcal{I}_n. \quad (3)$$

Т.о., $\Pi_{nq}(g)$ ограничено, поскольку является частью n -куба.

В работе [4] введено в рассмотрение множество P_{nq} перестановок с повторениями из чисел $g_1, g_2, \dots, g_n$ и его образ E_{nq} при погружении P_{nq} в n -мерное арифметическое евклидово пространство. В этой же работе показано, что точки

множества E_{nq} можно интерпретировать как вершины некоторого выпуклого многогранника, вписанного в $(n-1)$ -сферу W , определяемую системой уравнений:

$$\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n g_i; \quad (4)$$

$$\sum_{i=1}^n (x_i - t^*)^2 = r^2; \quad (5)$$

где

$$r^2 = \sum_{i=1}^n (g_i - t^*)^2; \quad (6)$$

$$t^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g_i. \quad (7)$$

Имеет место следующая теорема, устанавливающая вид этого многогранника как пересечения полупространств.

Теорема 2. $E_{nq} = V_n$, где V_n — множество вершин многогранника $\Pi_{nq}(g)$.

Доказательство. Для доказательства теоремы поведем сле-

ла

$$E_{nq} \subset V_n, \quad (8)$$

а затем

$$E_{nq} \supset V_n. \quad (9)$$

Докажем (8). Пусть $b^* = (b_{j_1}^*, b_{j_2}^*, \dots, b_{j_n}^*) \in E_{nq}, j_i \in \mathcal{I}_n \forall i \in \mathcal{I}_n$. Покажем, что $b^* \in \Pi_{nq}(g)$. В i -той группе неравенств системы (I) в точке b^* по крайней мере следующее ограничение выполняется как равенство

$$\sum_{j=1}^i x_{\beta_j} - \sum_{j=1}^i g_j \geq 0, \quad (10)$$

где β_j определяется из соотношения $g_j = b_{\beta_j}^* \forall j \in \mathcal{I}_i \forall i \in \mathcal{I}_n$.

Пусть $(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{in})$ — вектор коэффициентов при пере-

менных в i -том неравенстве из системы (10) $\forall i \in \mathcal{I}_n$. Рассмотрим матрицу $C = [c_{ij}] \forall i, j \in \mathcal{I}_n$. Нетрудно видеть, что перестановкой столбцов из C можно получить $C' = [c'_{ij}]$ такую, что $c'_{ij} = 0$ при $j > i$ и $c'_{ij} = 1$ при $j \leq i \forall i, j \in \mathcal{I}_n$. Определитель $\det C'$ отличен от нуля, значит, и $\det C \neq 0$. Следовательно, $\beta^* \in V_n$ и в силу произвольности выбора β^* из E_{nq} имеет место (8).

Докажем (9), воспользовавшись методом математической индукции. Для $n=2,3$ справедливость (9) очевидна. Предположим, что (9) верно и для $n=m-1$, и от противного покажем, что (9) справедливо для $n=m$. Пусть

$$x_p^* = \beta \neq g_j \quad \forall j \in \mathcal{I}_m, \quad p \in \mathcal{I}_m, \quad (II)$$

где $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_m^*) \in V_m$, $g = (g_{d_1}, g_{d_2}, \dots, g_{d_m}) \in E_{mq}$, $d_i \neq d_j \forall i \neq j \forall i, j \in \mathcal{I}_m$. Тогда можно указать $t \in \mathcal{I}_{m-1}$ и $d > 0$ такие, что выполняются соотношения

$$g_t < \beta < g_{t+1}, \quad (I2)$$

$$g_t + d = \beta. \quad (I3)$$

Подставим значение x_q из выражения (II) в систему (I) при $n=m$. Из неравенств нулевой и m -той групп имеем

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^m x_j = \sum_{j \neq 1}^{t-1} g_j + (g_{t+1} - d) + \sum_{j=t+2}^m g_j. \quad (I4)$$

Далее из системы (I) удаляем те неравенства, у которых правая часть меньше соответствующей левой части. При этом для

$\forall s \in \mathcal{I}_t$ имеем

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq s}}^s x_{d_j} \geq \sum_{j=1}^s g_j - \beta; \quad (I5)$$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq s}}^s x_{d_j} \geq \sum_{j=1}^{s-1} g_j, \quad (I6)$$

а для $\forall s \in \mathcal{I}_{m-1} \setminus \mathcal{I}_t$ имеем

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq r}}^s x_{a_j} \geq \sum_{j=1}^{t-1} g_j + (g_{t+1} - \alpha) + \sum_{j=t+2}^s g_j;$$

(I7) -

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq r}}^s x_{a_j} \geq \sum_{j=1}^{s-1} g_j,$$

(I8) ✓

где $a_i \neq a_j$ при $i \neq j \forall i, j \in \mathcal{I}_m$; $a_r = p$; $a_j \in \mathcal{I}_m$. В силу соотношений (2), (I2), (I3) удаляем неравенства (I5), (I8). Из первой группы неравенств системы (I) при подстановке в нее значения x_p из выражения (II) и $n \equiv m$ удалим также верное числовое неравенство или тождество.

Таким образом, после указанной выше подстановки и последующего удаления получаем следующую систему неравенств:

$$\sum_{j=1}^{m-1} \bar{x}_j \leq \sum_{j=1}^{m-1} \bar{b}_j;$$

$$\sum_{j=1}^i \bar{x}_{a_j} \geq \sum_{j=1}^i \bar{b}_j,$$

(I9) ✓

где $a_j \in \mathcal{I}_{m-1}$, $a_i \neq a_r \forall j \neq r \forall i, r \in \mathcal{I}_i \forall i \in \mathcal{I}_{m-1}$;

$\bar{x}_r = x_r \forall r \in \mathcal{I}_{p-1}$, $\bar{x}_r = x_{r+1} \forall r \in \mathcal{I}_{m-1} \setminus \mathcal{I}_{p-1}$;

$\bar{b}_r = g_r \forall r \in \mathcal{I}_{t-1}$, $\bar{b}_t = g_{t+1} - \alpha$; $\bar{b}_r = g_{r+1} \forall r \in \mathcal{I}_{m-1} \setminus \mathcal{I}_t$.

Очевидно, что (I9) - это система вида (I) при $n \equiv m-1$,

т.к. в силу (2), (I2), (I3) имеем $\bar{b}_i \leq \bar{b}_{i+1} \forall i \in \mathcal{I}_{m-2}$. Ус-

ловие (9) для $n = m-1$ справедливо по предположению. Пусть

$\bar{b}^* = (\bar{b}_{a_1}^*, \bar{b}_{a_2}^*, \dots, \bar{b}_{a_{m-1}}^*) \in V_{m-1}$, где V_{m-1} - множе-

ство вершин многогранника $\Pi_{(m-1), q}(b)$. Построим $b^* = (b_{a_1}^*,$

$b_{a_2}^*, \dots, b_{a_m}^*)$ следующим образом $b_{a_i}^* = \bar{b}_{a_i}^* \forall i \in \mathcal{I}_{p-1}$; $b_{a_p}^* = \beta$, $b_{a_i+1}^* =$

$\bar{b}_{a_i}^* \forall i \in \mathcal{I}_{m-1} \setminus \mathcal{I}_{p-1}$, где p определяется из соотношения

$a_p = t$. Точка $b^* \in V_m$, т.к. $\bar{b}^* \in V_{m-1}$ и выполняется (II).

Подставим b^* в (I), положив $n \equiv m$. Нетрудно видеть, что

ан-
дс нол
наиме
дох-л

в группе с номером t нет неравенств, выполняющихся как точные равенства, а в остальных группах имеется $m - I$ линейно независимых условий, обращающихся в точке β^* в равенства. Значит, $\beta^* \notin V_m$. Получили противоречие. Следовательно, (II) неверно, поэтому предположение индукции при $n=m$ справедливо. Таким образом, (9) доказано.

Из справедливости (8) и (9) получаем $E_{nq} = V_n$, что и требовалось доказать.

Будем называть многогранник $\Pi_{nq}(g)$ общим перестановочным многогранником. Частные случаи $\Pi_{nq}(g)$ рассмотрены в работах [1,3]. В работе [3] рассмотрен случай, когда

$$g_1 \geq 0; \quad (20)$$

$$g_i < g_{i+1} \quad \forall i \in \mathcal{I}_{n-1}, \quad (21)$$

а в работе [1] - при более слабых ограничениях, когда условие (20) отсутствует. Другими словами, рассмотрен случай выпуклой оболочки $\Pi_n(g)$ множества $E_n = f(P_n)$ или $E_n = f_N(P_n)$ [4].

Перестановочный многогранник $\Pi_n(g)$ обладает следующим свойством.

Теорема 3 [1,3]. Вершиной ПМ $\Pi_n(g)$, смежной с вершиной $g' = (g_{\alpha_1}, g_{\alpha_2}, \dots, g_{\alpha_n})$ является всякая вершина $g'' = (g_{\beta_1}, g_{\beta_2}, \dots, g_{\beta_n})$, в которой перестановка индексов $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ получается из перестановки $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ транспозицией компонент равных k и $k+1 \quad \forall k \in \mathcal{I}_{n-1}$.

Оказывается, это свойство может быть обобщено на случай многогранника $\Pi_{nq}(g)$.

Теорема 4. Вершиной ОПМ $\Pi_{nq}(g)$, смежной с вершиной $g' = (g_{\alpha_1}, g_{\alpha_2}, \dots, g_{\alpha_n})$ является всякая вершина $g'' = (g_{\beta_1}, g_{\beta_2}, \dots, g_{\beta_n})$, в которой перестановка индексов $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ получается из

перестановки $(d_1, d_2, \dots, d_n)$ транспозицией компонент, равных k и $k+1 \quad \forall k \in \mathcal{I}_{n-1}$ за исключением случая, когда $g_k = g_{k+1}$.

Доказательство. Справедливость этого утверждения следует из теоремы 3 и того факта, что из условий $g' \in E_{nq}, g_k = g_{k+1}$ следует $g' = g''$.

Следующая теорема описывает все грани ПМ $\Pi_n(g)$.

Теорема 5 [3]. Пусть имеют место условия (20), (21). Множество решений системы (I) является i -гранью $(0 \leq i \leq n-2)$ ПМ $\Pi_n(g)$ в том и только том случае, когда каждое из этих решений обращает в равенство неравенства из (I) лишь для подмножеств $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n-i+1}$, обладающих свойством

$$\omega_1 \subset \omega_2 \subset \dots \subset \omega_{n-i+1} \subset \mathcal{I}_n, \quad (22)$$

а также для $\omega_n = \mathcal{I}_n$, $(\omega_i \neq \omega_{i+1} \quad \forall i \in \mathcal{I}_{n-1})$.

Имеет место следующая теорема, обобщающая теорему 5 на случай ОПМ $\Pi_{nq}(g)$ в части описания его вершин.

Теорема 6. Если $x = (x_1, \dots, x_n)$ — вершина $\Pi_{nq}(g)$, то верно $\{d_1\} \subset \{d_1, d_2\} \subset \dots \subset \{d_1, d_2, \dots, d_{n-1}\} \subset \{d_1, d_2, \dots, d_n\} = \mathcal{I}_n$; (23)

$$\sum_{t=1}^i x_{d_t} = \sum_{t=1}^i g_t \quad \forall i \in \mathcal{I}_n. \quad (24)$$

И наоборот, если верны условия (23), (24), то x — вершина ОПМ $\Pi_{nq}(g)$.

Доказательство. Пусть x — вершина $\Pi_{nq}(g)$, т.е. $x \in V_n = E_{nq}$. Тогда $x = (g_{j_1}, g_{j_2}, \dots, g_{j_n})$. Значит,

$$\sum_{t=1}^i g_{j_t} = \sum_{t=1}^i g_t \quad \forall i \in \mathcal{I}_n;$$

где $j_1 = 1; j_2 = 2; \dots; j_n = n$, т.е. $g_{j_t} = x_{d_t}$, а $g_t = x_{d_t}$ и $\{d_1, d_2, \dots, d_i\} \in \{d_1, d_2, \dots, d_{i+1}\} \quad \forall i \in \mathcal{I}_{n-1}$. Т.о., условия (23), (24) выполняются.

Предположим обратное. Пусть выполняются условия (23), (24).

Тогда $x_{\alpha_t} = g_t \quad \forall t \in \mathcal{I}_n$, т.е. $x = (g_{\beta_1}, g_{\beta_2}, \dots, g_{\beta_n}) \in E_{nq}$, что и требовалось показать. Т.о., теорема доказана в обе стороны.

Замечание I. Нетрудно видеть, что число неравенств, входящих в систему (I), равно 2^n , т.к. в i -той группе системы C_n^i неравенств $\forall i \in \mathcal{I}_n$, а как известно,

$$\sum_{i=0}^n C_n^i = 2^n$$

Предположим, что набор чисел $g_1, g_2, \dots, g_n$, для которых выполняются условия (2), обладает свойством

$$g_i = g_{i+1} \quad \forall i \in \mathcal{I}_{p-1} \subset \mathcal{I}_n. \quad (25)$$

Очевидно, что в этом случае при выполнении неравенств группы I системы (I) выполняется неравенства и следующих $n-p-1$ групп. Действительно, т.к. $x_i \geq g_1$, то $x_i + x_j \geq g_1 + g_1 \quad \forall i, j \in \mathcal{I}_n$ и т.д.

$$\sum_{i=1}^p x_{\alpha_i} \geq p \cdot g_1.$$

Т.е. в системе (I) можно оставить неравенства групп 0, I, $p+1$, $p+2, \dots, n$. Поэтому количество R оставшихся неравенств определяется так

$$R = 1 + n + \sum_{i=p+1}^n C_n^i. \quad (26)$$

Аналогичные рассуждения можно провести и в случае, когда набор чисел $g_1, g_2, \dots, g_n$ обладает свойством

$$g_i = g_{i+1} \quad \forall i \in \mathcal{I}_{n-1} \setminus \mathcal{I}_{n-p} \quad (27)$$

при условии (2). Очевидно, что система (I) эквивалентна следующей системе неравенств

$$\sum_{j=1}^n x_j \geq \sum_{j=1}^n g_{n-j+1};$$

$$\sum_{j=1}^i x_{d_j} \leq \sum_{j=1}^i g_{n-j+1}; d_j \in \mathcal{I}_n; d_j \neq d_r; j, r \in \mathcal{I}_i \forall i \in \mathcal{I}_n. \quad (28)$$

Определим группы неравенств системы (28), аналогично тому, как это сделано для системы (I). Очевидно, что при выполнении (27) и неравенств группы I системы (28) выполняются и неравенства следующих $n-p-1$ групп этой системы. Действительно, т.к. $x_i \leq g_n$, то $x_i + x_j \leq 2g_n \quad \forall i, j \in \mathcal{I}_n$ и т.д.

$$x_{d_1} + x_{d_2} + \dots + x_{d_p} \leq p \cdot g_n.$$

Т.е. в системе (27) можно оставить неравенства групп 0, I, $p+1, p+2, \dots, n$. Количество R оставшихся неравенств вычисляются по формуле (26).

Заметим, что неравенства групп 0 и n системы (I) и (28) эквивалентны равенству (4), а неравенство

$$\sum_{j=1}^i x_{d_j} \geq \sum_{j=1}^i g_{n-j+1}$$

из i -той системы (28) эквивалентно с учетом условия (4) неравенству

$$\sum_{j \neq 1}^{n-i} x_{\beta_j} \geq \sum_{j=1}^{n-i} g_j$$

из группы с номером $n-i$ системы (I) $\forall i \in \mathcal{I}_n$, причем $\beta_j \in \mathcal{I}_n \setminus \{d_1, d_2, \dots, d_i\}$. Следовательно, при выполнении условия (27) в системе (I) можно оставить неравенства только следующих групп 0, I, 2, $\dots, n-p-1, n-1, n$.

В работе [5] рассмотрены некоторые вопросы разложимости E_{nq} по гиперплоскостям, основывающиеся на следующем факте.

Теорема 7 [5]. Множество E_{nq} лежит на семействе ги-

гиперплоскостей $\{T_s^t\}$ вида

$$\frac{s}{n-s} \sum_{i=1}^{n-s} x_i - \sum_{i=n-s+1}^n x_i + a_t^s = 0 \quad (29)$$

$$\forall t \in \mathcal{T}_{\gamma_s}, \quad \gamma_s \leq \frac{n!}{s!(n-s)!} \quad \forall s \in \mathcal{T}_{n-1}.$$

где $a_t^s = \sum_{r=n-s+1}^n g_{ir} - \frac{s}{n-s} \sum_{r=1}^{n-s} g_{ir},$

а $g = (g_{i_1}, g_{i_2}, \dots, g_{i_n}) \in E_{nq}.$

Из этой теоремы следует, что все гиперплоскости одного семейства $\{T_s^t\}$ взаимно параллельны, а все гиперплоскости всех семейств $\{T_s^t\}$ ($s \in \mathcal{T}_{n-1}$) ортогональны гиперплоскости (4).

Нижне рассматривается еще один подход к разложению множества E_{nq} . Рассмотрим случай $n=q$, т.е. множество E_n [4].

Теорема 3. Каждое неравенство i -той группы системы (I) порождает множество $D_i(d_1, d_2, \dots, d_i)$, содержащее не более C_n^i параллельных между собой $(n-2)$ -плоскостей, определяемых системой уравнений, состоящей из уравнения (4) и следующего уравнения

$$\sum_{j=1}^i x_{d_j} = \sum_{j=1}^i g_{\beta_j}, \quad (30)$$

где $d_j, \beta_j \in \mathcal{T}_n$, $d_k \neq d_j$; $\beta_k \neq \beta_j$ при $k \neq j$, $k, j \in \mathcal{T}_i$, $i \in \mathcal{T}_{n-1}$.

Доказательство. Так как две различные $(n-2)$ -плоскости, лежащие в одном множестве $D(d_1, d_2, \dots, d_i)$, отличаются только правой частью уравнения (30), то их параллельность очевидна. Количество $(n-2)$ -плоскостей, порождаемых одним неравенством i -той группы системы (I) с левой частью $x_{d_1} + x_{d_2} + \dots + x_{d_i}$, равно количеству способов выбора суммы

$g_{\beta_1} + g_{\beta_2} + \dots + g_{\beta_i}$, стоящей в правой части уравнения (30). Т.к. для множества E_n имеет место условие (2I), то количество разных наборов $g_{\beta_1}, g_{\beta_2}, \dots, g_{\beta_i}$ равно количеству сочетаний из n элементов по i : C_n^i . Но суммы, составленные из этих наборов могут быть равными (это зависит от конкретного набора $g_1, g_2, \dots, g_n$). В этом случае плоскости совмещаются. Поэтому $|D_i(d_1, d_2, \dots, d_i)| \leq C_n^i$. Т.о., теорема доказана.

Утверждение 9. Имеет место равенство $D_i(d_1, d_2, \dots, d_i) = D_{n-i}(d_{i+1}, d_{i+2}, \dots, d_n) \forall i \in \overline{n-1}$.

Доказательство. Справедливость утверждения непосредственно следует из вида системы уравнений (4), (30).

Утверждение 10. Пусть

$$D = \bigcup_{i=1}^{n-1} \bigcup_{\alpha} D_i(d_1, d_2, \dots, d_i),$$

тогда $|D| \leq \frac{1}{2} C_{2n}^n - 1$, здесь $\alpha = (d_1, d_2, \dots, d_i)$.

Доказательство. Справедливость утверждения следует из теоремы 8 и того факта, что i -тая группа неравенств системы (I) содержит C_n^i ограничений. Действительно, каждая группа i порождает $|\bigcup_{\alpha} D_i(d_1, d_2, \dots, d_i)|$ $(n-2)$ -плоскостей вида (4), (30), где $|\bigcup_{\alpha} D_i(d_1, d_2, \dots, d_i)| = C_n^i |D_i(d_1, d_2, \dots, d_i)|$ а

$$|D| = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} C_n^i |D_i(d_1, d_2, \dots, d_i)|$$

(Появление коэффициента $1/2$ объясняется утверждением 9.)

Воспользовавшись теоремой 8, получаем

$$|D| \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} (C_n^i)^2.$$

Как известно,

$$\sum_{i=0}^n (C_n^i)^2 = C_{2n}^n.$$

Т.о., имеем $|D| \leq \frac{1}{2} C_{2n}^n - 1$, что и требовалось показать.

Будем говорить, что $(n-2)$ -плоскость (4), (30) из любого множества $D_i(d_1, d_2, \dots, d_i)$ имеет кратность K , если набор констант $g_1, g_2, \dots, g_n$, определяющий E_n такой, что существует точно K равных сумм из i констант этого набора, взятых по разу.

Утверждение II. Множества $D_i(d_1, d_2, \dots, d_i)$, $i \in \mathcal{I}_{n-1}$, порождаемые неравенствами одной группы системы (I), содержат одинаковое количество $(n-2)$ -плоскостей равной кратности.

Доказательство. Справедливость утверждения непосредственно следует из вида системы (4), (30) и определения кратности плоскости.

Замечание 2. Если каждую $(n-2)$ -плоскость кратности рассматривать как K $(n-2)$ -плоскостей кратности I, считая, что K разным наборам, образующим суммы в правой части уравнения (30), при равных суммах соответствуют K разных $(n-2)$ -плоскостей кратности I, то, понятно, что в каждой i -той группе каждое неравенство порождает точно C_n^i $(n-2)$ -плоскостей кратности I, $i \in \mathcal{I}_{n-1}$. А общее их число $|D^*|$ определяется так

$$|D^*| = \frac{1}{2} C_{2n}^n - 1, \quad (31)$$

где D^* — множество всевозможных $(n-2)$ -плоскостей вида (4), (30) кратности I. Т.е. верно следующее утверждение.

Утверждение I2. Сумма кратностей $(n-2)$ -плоскостей вида (4), (30), порождаемых: а) любым неравенством i -той группы

системы (I) равна C_n^i , $i \in \mathcal{I}_{n-1}$, б) всеми неравенствами i -той группы: $(C_n^i)^2$, в) всеми неравенствами группы i ($i \in \mathcal{I}_{n-1}$): $|D^*|$, эта величина вычисляется по формуле (31).

Теорема 13. Каждая $(n-2)$ -плоскость $H_j^i \in \mathcal{D}_i(d_1, d_2, \dots, d_i)$ кратности K_j^i содержит точно $(n-i)!i!K_j^i$ точек множества $E_n \forall i \in \mathcal{I}_{n-1} \forall j \in \mathcal{I}_t$, где $t = |\mathcal{D}_i(d_1, d_2, \dots, d_i)|$.

Доказательство. Пусть $x = (x_{d_1}, x_{d_2}, \dots, x_{d_n}) \in E_n$. Тогда каждое неизвестное в левой части уравнения (30) может принять значение одной из констант, образующих сумму в правой части этого уравнения. Таких возможностей для одного набора, составляющего сумму в правой части уравнения (30), имеется $i!$. Понятно, что оставшиеся при этом неопределенными переменные, стоящие в левой части уравнения (4) могут определиться $(n-i)!$ способами. А так как рассматриваемая $(n-2)$ -плоскость H_j^i ($i \in \mathcal{I}_n, j \in \mathcal{I}_t$) имеет кратность K_j^i , то одна и та же по значению сумма, стоящая в правой части уравнения (30), может быть получена K_j^i способами. Следовательно, на H_j^i лежит $K_j^i(n-i)!i!$ точек множества $E_n, i \in \mathcal{I}_n, j \in \mathcal{I}_t$, что и требовалось доказать.

Пусть $E(H_j^i) \subset E_n$ — подмножество тех точек из E_n , которые лежат на $(n-2)$ -плоскости $H_j^i, i \in \mathcal{I}_n, j \in \mathcal{I}_t$. Следующая теорема устанавливает разложимость множества E_n по любому семейству $\{H_j^i \forall j \in \mathcal{I}_t\} = \mathcal{D}_i(d_1, d_2, \dots, d_i)$ параллельных $(n-2)$ -плоскостей $H_j^i \forall i \in \mathcal{I}_n \forall j \in \mathcal{I}_t$.

Теорема 14.

$$E_n = \bigcup_{j=1}^t E(H_j^i) \quad \forall i \in \mathcal{I}_n. \quad (32)$$

Доказательство. Обозначим через t_j^i — количество точек

множества E_n , лежащих на $(n-2)$ -плоскости $H_j^i, i \in J_n, j \in J_t$.

Тогда, используя теорему 13, можем записать

$$\sum_{j=1}^t t_j^i = (n-i)! l! \sum_{j=1}^t K_j^i. \quad (33)$$

В силу утверждения II

$$\sum_{j=1}^t K_j^i = C_n^i.$$

Поэтому равенство (33) принимает вид

$$\sum_{j=1}^t t_j^i = n! \quad (34)$$

В силу равенства $|E_n| = n!$, параллельности $(n-2)$ -плоскостей H_j^i (см. теорему 8) и равенства (34) имеем справедливость равенства (32), что и требовалось доказать.

Рассмотрим некоторые вопросы смежности граней ПМ $\Pi_n(q)$.

Будем называть i -грани S_1^i и S_2^i ПМ $\Pi_n(q)$ смежными, если

$$S_1^i \cap S_2^i = S^{i-1}, \quad i \in J_{n-2}. \quad (35)$$

Пусть имеется две i -грани S_1^i и $S_2^i, i \in J_{n-2}$, тогда по теореме 5 существуют множества $\Omega_1^i = \{\omega_j^1\}_{j=1}^{n-i-1}$ и $\Omega_2^i = \{\omega_j^2\}_{j=1}^{n-i-1}$, удовлетворяющие условию (22) для грани S_1^i и S_2^i соответственно. Предположим, что имеет место соотношение (35). По теореме 5 существует множество $\Omega^{i-1} = \{\omega_j^{i-1}\}_{j=1}^{n-i}$, соответствующее грани S^{i-1} и удовлетворяющее условию (22). Т.к. в точках грани S^{i-1} должны выполняться одновременно ограничения, описывающие грани S_1^i и S_2^i , то

$$\Omega^{i-1} = \Omega_1^i \cup \Omega_2^i \quad (36)$$

Предположим, что имеет место условие (36). Из теоремы 5 следует, что существуют грани S_1^i и S_2^i , определяемые множества-

ми Ω_1^i и Ω_2^i , но в силу (36) имеем (35). Т.о. имеет место следующий критерий смежности граней.

Теорема I5. Для того, чтобы две i -грани S_1^i и S_2^i были смежными необходимо и достаточно, чтобы множество Ω^{i-1} , задаваемые формулой (36), определяло $(i-1)$ -грань S^{i-1} , $i \in \mathcal{I}_{n-2}$.

Рассмотрим $(n-2)$ -грани $\Pi \Pi_n(q)$. По теореме 5 каждая грань определяет множество $\omega_1 \subset \mathcal{I}_n$. Назовем типом $(n-2)$ -грани $\Pi_n(q)$ количество элементов $|\omega_1|$ в соответствующем множестве ω_1 , понятно, что $|\omega_1| \in \mathcal{I}_{n-1}$. Обозначим через $K(n, \alpha)$ — количество смежных $(n-2)$ -граней к $(n-2)$ -грани типа α перестановочного многогранника $\Pi_n(q)$. Имеет место следующая теорема.

Теорема I6.

$$K(n, \alpha) = 2^{n-\alpha} + 2^\alpha - 4. \quad (37)$$

Доказательство. Определим количество $K'(n, \alpha)$ $(n-2)$ -граней типов i , где $1 \leq i \leq \alpha$, смежных с выбранной $(n-2)$ -гранью типа α . Нетрудно видеть, что

$$K'(n, \alpha) = \sum_{i=1}^{\alpha-1} C_\alpha^i. \quad (38)$$

Количество $K''(n, \alpha)$ смежных с данной $(n-2)$ -гранью типа α $(n-2)$ -граней типов i , где $\alpha < i \leq n-1$, как нетрудно видеть, вычисляется по формуле

$$K''(n, \alpha) = \sum_{j=1}^{n-\alpha-1} C_{n-\alpha}^j. \quad (39)$$

Складывая правые и левые части равенств (38) и (39), после преобразований получаем

$$K(n, \alpha) = \sum_{j=0}^{n-\alpha} C_{n-\alpha}^j + \sum_{j=0}^{\alpha} C_\alpha^j - 4,$$

откуда и следует формула (37).

Назовем характеристической точкой $(n-2)$ -грани типа i $S^i(d_1, d_2, \dots, d_i)$ точку $O_2 = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, координаты которой удовлетворяют условиям

$$x_{d_1} = x_{d_2} = \dots = x_{d_i}; \quad (40)$$

$$x_{d_{i+1}} = x_{d_{i+2}} = \dots = x_{d_n}; \quad (41)$$

$$x \in S^i(d_1, d_2, \dots, d_i). \quad (42)$$

Утверждение I7. Характеристическая точка $O_2 \in S^i(d_1, d_2, \dots, d_i)$ имеет координаты:

$$x_{d_1} = x_{d_2} = \dots = x_{d_i} = \frac{1}{i} \sum_{j=1}^i g_j = \alpha^*; \quad (43)$$

$$x_{d_{i+1}} = x_{d_{i+2}} = \dots = x_{d_n} = \frac{1}{n-i} \sum_{j=i+1}^n g_j = \beta^*. \quad (44)$$

Доказательство. Справедливость утверждения следует из определения характеристической точки, уравнения $(n-2)$ -плоскости, на которой лежит $(n-2)$ -грань $S^i(d_1, d_2, \dots, d_i)$:

$$\sum_{j=1}^i x_{d_j} = \sum_{j=1}^i g_j \quad (45)$$

и уравнения гиперплоскости (4), содержащей ПМ $\Pi_n(g)$.

Следствие I8. Если $g_i = i \ \forall i \in \mathcal{I}_n$, то координаты характеристической точки следующие

$$x_{d_1} = x_{d_2} = \dots = x_{d_i} = (i+1)/2; \quad (46)$$

$$x_{d_{i+1}} = x_{d_{i+2}} = \dots = x_{d_n} = (n+i+1)/2. \quad (47)$$

Справедливость следствия проверяется непосредственной проверкой.

Будем называть характеристическим лучом $(n-2)$ -грани $S^i(d_1, d_2, \dots, d_i)$ ПМ $\Pi_n(g)$ луч, начинающийся в точке $O_1(t^*, t^*, \dots, t^*)$ и проходящей через характеристическую точку O_2 $(n-2)$ -грани $S^i(d_1, d_2, \dots, d_i)$. Обозначим этот

луч $O_1 O_2$.

Точку пересечения луча $O_1 O_2$ с $(n-1)$ -сферой W , определяемой уравнениями (4), (5) обозначим через O_3 .

Утверждение 19. Координаты точки $O_3 = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ удовлетворяют следующим условиям

$$x'_{d_1} = x'_{d_2} = \dots = x'_{d_i} = d_1^* ; \quad (48)$$

$$x'_{d_{i+1}} = x'_{d_{i+2}} = \dots = x'_{d_n} = \beta_1^* ; \quad (49)$$

$$i d_1^* + (n-i) \beta_1^* = \sum_{j=1}^n g_j ; \quad (50)$$

$$i(t^* - d_1^*)^2 + (n-i)(t^* - \beta_1^*)^2 = r^2, \quad (51)$$

где r находится из соотношения (6).

Доказательство. Так как точка O_3 принадлежит лучу $O_1 O_2$, то ее координаты должны удовлетворять уравнению прямой, содержащей этот луч, т.е. имеет место соотношение

$$\frac{x'_{d_1} - t^*}{d^* - t^*} = \dots = \frac{x'_{d_i} - t^*}{d^* - t^*} = \frac{x'_{d_{i+1}} - t^*}{\beta^* - t^*} = \dots = \frac{x'_{d_n} - t^*}{\beta^* - t^*}, \quad (52)$$

где t^*, d^*, β^* вычисляются по формулам (7), (43), (44) соответственно. Из условия (52) следует, что координаты точки O_3 удовлетворяют соотношениям (48), (49). Но т.к. точка O_3 принадлежит $(n-1)$ -сфере W , то подставляя величины d_1^* и β_1^* в уравнения (4), (5), имеем условия (50), (51) для координат этой точки. Что и требовалось показать.

Следствие 20. Пусть набор чисел $g = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ обладает свойством:

$$g_i = i \quad \forall i \in \mathcal{I}_n, \quad (53)$$

тогда

$$d_1^* = t^* - r\gamma, \quad (54)$$

$$\beta_1^* = t^* + r \frac{1}{n\gamma}, \quad (55)$$

где t^* определяется по формуле (7), τ — находится из соотношения (6), а

$$\gamma = \sqrt{\frac{n-i}{ni}}. \quad (56)$$

Следствие 20 доказывается непосредственной проверкой.

Рассмотрим также некоторые свойства перестановочного многогранника $\Pi_n(q)$, если q обладает свойством (53).

Теорема 21. Расстояния $\rho(O_1, O_2) = \rho_1$; $\rho(O_2, O_3) = \rho_2$; $\rho(O_3, A) = \rho_3$; $\rho(A, O_2) = \rho_4$, где A — произвольная точка из E_n , не зависят от вида $(n-2)$ -грани ПМ $\Pi_n(q)$, а зависят только от ее типа i и равны

$$\rho_1 = 1/2 (in(n-i))^{1/2}; \quad (57)$$

$$\rho_2 = \tau - 1/2 (in(n-i))^{1/2}; \quad (58)$$

$$\rho_3 = (2\tau^2 - \tau(in(n-i))^{1/2})^{1/2}; \quad (59)$$

$$\rho_4 = (\tau^2 - 1/4 ni(n-i))^{1/2}, \quad (60)$$

здесь τ определяется из соотношения (6).

Доказательство. Справедливость теоремы устанавливается непосредственными вычислениями.

Теорема 22. Характеристический луч $O_1 O_2$ $(n-2)$ -грани $S^i(d_1, d_2, \dots, d_i)$ перпендикулярен этой грани.

Справедливость теоремы достаточно очевидна.

Теорема 23. Точки множества E_n , принадлежащие $(n-2)$ -грани $S^i(d_1, d_2, \dots, d_i)$, лежат на семействе $(n-1)$ -сфер с центрами на луче $O_1 O_2$.

Доказательство. Справедливость следует из теоремы 22.

Замечание 3. Три из этих сфер с центрами в точках O_1 , O_2 и O_3 имеют радиусы τ , ρ_4 и ρ_3 соответственно.

Теорема 24. Точки множества E_n , принадлежащие $(n-2)$ -грани $S^i(d_1, d_2, \dots, d_i)$, лежат на $(n-2)$ -сфере с центром в

характеристической точке данной грани.

Доказательство. Искомая сфера получается при сечении $(n-1)$ -сферы с центром в точке O_2 грани $S^i(d_1, d_2, \dots, d_i)$.

Рассмотренные свойства ИМ и ОПМ могут быть использованы и использовались [5] для построения методов и алгоритмов решения оптимизационных задач комбинаторного типа.

Литература

1. Ковалев М.М., Исаченко А.Н., Нгуен Нгиа. Линеаризация комбинаторных задач оптимизации. - Докл. АН БССР, 1978, т.22, №10, с.869-872.

2. Ковалев М.М., Горунович С.А. Перестановочные полиматроиды. - Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук, 1980, №6, с.9-14.

3. Емеличев В.А., Ковалев М.М., Кравцов М.К. Многогранники, графы, оптимизация. - М.: Наука, 1981. - 344с.

4. Стоян Ю.Г. Некоторые свойства специальных комбинаторных множеств. - Харьков, 1980. - 22с. (Препринт/Ин-т пробл. машиностроения АН УССР.:85).

5. Стоян Ю.Г. Об одном отображении комбинаторных множеств в евклидово пространство. - Харьков, 1982. - 33с. (Препринт/Ин-т пробл. машиностроения АН УССР.:173).

6. Стоян Ю.Г., Емец О.А. Об оптимизации на перестановках с использованием больших задач линейного программирования: модели, способы и алгоритмы. - В кн.: Системы прогр. обеспечения решения задач оптим. планир. Седьмой всесоюз. симпоз. (г. Нарва-Энессу, 16-24 апр. 1982г.). Крат. тез. докл. - М., 1982, с.100.

Печатается в соответствии с решением совета Полтавского
инженерно-строительного института от 19 марта 1983г.

В печать 28.03.83

28.03.83

Тир.	Цена	Зак.
------	------	------

252171, Киев-171, ул. Горького, 180		
-------------------------------------	--	--

УкрНИИТИ Госплана СССР		
------------------------	--	--