



МАТЕМАТИЧЕСКОЕ  
МОДЕЛИРОВАНИЕ  
И ОПТИМИЗАЦИЯ ТЕХНИЧЕСКИХ  
СИСТЕМ И ПРОЦЕССОВ

№27,

Киев 1993

УДК 519.85

О.А.ЕМЕЦ

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА НЕДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЙ  
НА ЕВКЛИДОВЫХ КОМБИНАТОРНЫХ МНОЖЕСТВАХ

Приводятся оценки и достаточные условия минимумов недифференцируемых выпуклых функций на евклидовых комбинаторных множествах: общем полиперестановочном, общем множестве размещений, множестве сочетаний с повторениями.

Пусть  $E$  - евклидово комбинаторное множество [I] арифметического евклидова пространства  $R^k$ .

Теорема. Если  $\varphi(x)$  - выпуклая и конечная функция, заданная на выпуклом замкнутом множестве  $X \supset E$ ,  $x \in R^k$ , то I) для всех внутренних точек  $y \in X$

$$\min_{x \in E} \varphi(x) \geq \varphi(y) - (p(y), y) + \min_{x = (x_1, \dots, x_k) \in E} \sum_{i=1}^k p_i(y) x_i;$$

2) чтобы точка  $y \in E \subset \text{int } X$  доставляла минимум на множестве  $E$  функции  $\varphi(x)$ , достаточно выполнения условия  $\min_{x = (x_1, \dots, x_k) \in E}$

$$\sum_{i=1}^k p_i(y) x_i = (p(y), y), \text{ где } p(y) = (p_1(y), \dots, p_k(y)) -$$

субградиент функции  $\varphi(x)$  в точке  $y$ ;  $\text{int } X$  - множество внутренних точек на множестве  $X$ .

Рассмотрим в качестве евклидова комбинаторного множества общее полиперестановочное множество  $E(G, H)$  [I]. Примем  $I_k = \{1, \dots, k\}$ ,  $I_k \cup \{0\} = I_k^0$ ,  $I_0 = \emptyset$ . Рассмотрим упорядоченное разбиение множества  $I_k$  на  $s$  множеств  $K_1, \dots, K_s$ ,  $K_i \neq \emptyset$ ;  $K \cap K_j = \emptyset \forall i, j \in I_s$ .

Обозначим  $H$  множество перестановок  $\pi = (\pi^1, \dots, \pi^s) = (\pi(1), \dots, \pi(k))$ , где  $\pi^i$  - произвольная перестановка элементов множества  $K_i$ . Пусть  $G$  - мульти множество  $\{g_1, \dots, g_k\}$ .

Множество  $E(G, H) = \{g(\pi) = (g_{\pi(1)}, \dots, g_{\pi(k)})\}$ ,  $\forall \pi \in H$  называется общим полиперестановочным множеством. Обозначим  $G^{K_i} \subset G$   $k_i$ -элементное мульти множество ( $k_i = |K_i| \forall i \in I_s$ ), образованное из элементов  $G$  с номерами из множества  $K_i$ . Обозна-

чим элементы  $G^{k_1} g_1^{k_1}, \dots, g_{k_i}^{k_i}$ , чтобы выполнялось соотношение  
 $g_1^{k_1} \leq \dots \leq g_{k_i}^{k_i} \quad \forall i \in J_s$ . 35 (I)

Понятно, что  $k_1 + \dots + k_s = k$ . Обозначим

$$N'_i = \left\{ \left( \sum_{j=1}^{i-1} k_j \right) + l, \dots, \sum_{j=1}^i k_j \right\} \quad \forall i \in J_s. \quad (2)$$

Следствие 1. Если  $\varphi(x)$  — конечная выпуклая функция, заданная на выпуклом замкнутом множестве  $X \supseteq E(G, H), X \subset R^k$ , то I) для всех внутренних точек  $y \in X$

$$\min_{x \in E(G, H)} \varphi(x) \geq \varphi(y) - (p(y), y) + \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{k_i} p_{d_j^i}(y) g_j^{k_i};$$

2) чтобы точка  $y = (y_1, \dots, y_k) \in E(G, H)$  доставляла минимум на множестве  $E(G, H)$  функции  $\varphi(x), E(G, H) \subset int X$ , достаточно выполнения соотношения

$$\sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{k_i} p_{d_j^i}(y) g_j^{k_i} = (p(y), y)$$

где  $p(y) = (p_1(y), \dots, p_k(y))$  — субградиент функции  $\varphi(x)$  в точке  $y$ ; наборы констант  $d_1^1, \dots, d_{k_i}^i; d_j^i \in N'_i, \forall j \in J_{d_j^i}, \forall i \in J_s$  удовлетворяют неравенствам

$$p_{d_1^1}(y) \geq p_{d_2^1}(y) \geq \dots \geq p_{d_{k_1}^1}(y)$$

при  $N'_i (i \in J_s)$  в представлении (2), а наборы констант  $g_j^{k_i}$   $\forall j \in J_{d_j^i}, \forall i \in J_s$  удовлетворяют соотношениям (I),  $k_1 + \dots + k_s = k$ .

Рассмотрим общее евклидово множество  $k$ -размещений  $E_{\text{ул}}^k(G)$  [1], образованных из элементов мультимножества  $G = \{g_1, \dots, g_L\}$ . Не нарушая общности, можем считать, что

$$g_1 \leq \dots \leq g_L. \quad (3)$$

Следствие 2 [2]. Если  $\varphi(x)$  — конечная выпуклая функция, заданная на выпуклом замкнутом множестве  $X \supseteq E_{\text{ул}}^k(G), X \subset R^k$ , а  $G$  удовлетворяет условию (3), то I) для всех внутренних точек  $y \in X$

$$\min_{x \in E_{\text{ул}}^k(G)} \varphi(x) \geq \varphi(y) - (p(y), y) + \sum_{i=1}^s p_{B_i}(y) g_i + \sum_{i=s+1}^L p_{B_i}(y) g_{2-k+i};$$

2) чтобы точка  $y = (y_1, \dots, y_k) \in E_{\text{ул}}^k(G)$  доставляла минимум на

множество  $E_{\mathcal{J}_n}^k(G)$  функции  $\varphi(x)$ ,  $E_{\mathcal{J}_n}^k(G) \subset \text{int } X$ , достаточно выполнения соотношения  $\sum_{i=1}^s p_{\beta_i}(y)g_i + \sum_{i=s+1}^k p_{\beta_i}(y)g_{n-k+i} = (\rho(y), y)$ ,

где  $\rho(y) = (p_1(y), \dots, p_k(y))$  — субградиент функции  $\varphi(x)$  в точке  $y$ , а перестановка  $\beta_1, \dots, \beta_k$  элементов множества  $\mathcal{J}_n$  и константа  $s \in \mathcal{J}_n^o$  определяются условием

$$p_{\beta_1}(y) \geq p_{\beta_2}(y) \geq \dots \geq p_{\beta_s}(y) \geq 0 \geq p_{\beta_{s+1}}(y) \geq p_{\beta_k}(y).$$

Пусть  $G = \{g_1, \dots, g_n\}$  — мульти множество с основанием  $S(G) = \{g_1, \dots, g_n\}$  и первичной спецификацией  $[G] = \{\eta_1, \dots, \eta_n\}$ ,  $\eta_i \geq k \forall i \in \mathcal{J}_n$ . Не нарушая общности, можем считать, что выполняется условие (3). Рассмотрим введенное в [3] евклидово множество  $\bar{\mathcal{S}}_n^k(G)$ .

Следствие 3. Если  $\varphi(x)$  — конечная выпуклая функция, заданная на выпуклом замкнутом множестве  $X \supset \bar{\mathcal{S}}_n^k(G)$ ,  $X \subset \mathbb{R}^k$ , а  $G$  удовлетворяет условию (3), то I) для всех внутренних точек  $y \in X$

$$\min_{x \in \bar{\mathcal{S}}_n^k(G)} \varphi(x) \geq \varphi(y) - (\rho(y), y) + g_1 \sum_{i=1}^s p_i(y) + g_2 \sum_{i=s+1}^k p_i(y);$$

2) чтобы точка  $y = (y_1, \dots, y_k) \in \bar{\mathcal{S}}_n^k(G)$  доставляла минимум на множестве  $\bar{\mathcal{S}}_n^k(G)$  функции  $\varphi(x)$ ,  $\bar{\mathcal{S}}_n^k(G) \subset \text{int } X$ , достаточно выполнения соотношения

$$g_1 \sum_{i=1}^s p_i(y) + g_2 \sum_{i=s+1}^k p_i(y) = (\rho(y), y),$$

где  $\rho(y) = (p_1(y), \dots, p_k(y))$  — субградиент функции  $\varphi(x)$  в точке  $y$ ;  $s \in \mathcal{J}_n^o$  вычисляется из системы соотношений

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^k p_{s+j}(y) \geq 0 & \forall t \in \mathcal{J}_s, \\ \sum_{j=t}^k p_{s+j}(y) \leq 0 & \forall t \in \mathcal{J}_{k-s}. \end{cases}$$

#### Список литературы

I. Е м е ц О.А. Евклидовы комбинаторные множества и оптимизация на них. Новое в математическом программировании: Учеб. пособие. — Киев: УМК ВО, 1992. — 92 с.

2. Е м е ц О.А. Экстремальные свойства недифференцируемых выпуклых функций на общем евклидовом множестве размещений // Сис-

темы программного обеспечения решения экономических задач. - М.: РАН, ЦЭМИ, ВЦ РАН, 1992. - С. 7-8.

З. Е м е ц О.А. Множество сочетаний с повторениями, отображенное в  $R^k$ , и свойства задач оптимизации на нем // Докл. АН Украины. - 1991. - № 4. - С. 69-72.

Получено 01.04.93

УДК 519.85

О.А.ЕМЕЦ, Л.Г.ЕВСЕЕВА

МЕТОД РЕШЕНИЯ КОМПЬЮТАТОРНОЙ ЗАДАЧИ РАЗМЕЩЕНИЯ ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ОЦЕНКИ И ДОСТАТОЧНОГО УСЛОВИЯ МИНИМУМА ВЫПУКЛОЙ НЕДИФФЕРЕНЦИРУЕМОЙ ФУНКЦИИ

Для задачи упаковки прямоугольников [1] как задачи минимизации выпуклой функции на множестве перестановок построен алгоритм метода ветвей и границ, дает оценки минимума целевой функции. Доказано достаточное условие минимума.

Пусть имеются набор прямоугольников  $m$  шириной  $k$ , длины которых образуют мульти множество  $M = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$  и полубесконечная полоса шириной  $a$ , разделенная на  $k$  полосок шириной  $1$  каждая. Данный набор прямоугольников необходимо упаковать так, чтобы минимизировать длину занятой части полосы. Эта задача является частным случаем (не имеет зон запрета) задачи [1,2]. Не нарушая общности, можно считать, что  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_m$ .

Примем  $s = m - k + 1$ . Пусть  $G = \{g_1, \dots, g_k\}$  - мульти множество, основание которого состоит из  $q$  элементов. При этом  $n = ks$ ,  $g_1 = \dots = g_{n-m} = 0$ ,  $g_{n-m+1} = a_1, \dots, g_n = a_m$ .

Рассмотрим матрицу  $A = [x_{ij}]$ , элемент  $x_{ij}$  ( $i = 1, \dots, k$ ;  $j = 1, \dots, s$ ) которой равен длине прямоугольника, упакованного на  $j$ -е место  $i$ -й полоски, т.е.  $x_{ij} \in G$ . Поставим в соответствие этой матрице точку  $x = (x_{11}, \dots, x_{1s}, x_{21}, \dots, x_{2s}, \dots, x_{k1}, \dots, x_{ks})$ ,  $x \in R^n$ .

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение . . . . .	3
ШЕВЧЕНКО А.Н., ЦУКАНОВ И.Г. Система для интерактивной обработки геометрической, логической и аналитической информации. . . . .	4
СЛЕСАРЕНКО А.П., САФОНОВ Н.А. Методы R-функций и итераций в решении нелинейных нестационарных задач радиационно-конвективного теплообмена. . . . .	7
КАРТАШОВ А.В. Особенности построения области допустимых решений $E_k(R^3)$ -задач размещения. . . . .	12
КУРПА Л.В., КУРПА Л.И. Применение теории R-функций к задачам устойчивости ортотропных пластин переменной толщины. . . . .	14
ЛОЙКО А.Ф. Математическая модель задачи компоновки технических систем блочной конструкции. . . . .	18
ПАНДОРИН А.К. Моделирование технологических ограничений при термической резке листовых материалов. . . . .	23
НОВОЖИЛОВА М.В. Метод решения задачи оптимизации линейной функции цели на структуре нелинейных неравенств. . . . .	25
АРИСТОВА И.В. Метод решения задачи размещения прямоугольников с учетом минимальных допустимых расстояний. . . . .	30
ЕМЕЦ О.А. Экстремальные свойства недифференцируемых выпуклых функций на евклидовых комбинаторных множествах. . . . .	34
ЕМЕЦ О.А., ЕВСЕЕВА Л.Г. Метод решения комбинаторной задачи размещения прямоугольников с использованием оценки и достаточного условия минимума выпуклой недифференцируемой функции. . . . .	37
ПАЧКРАТОВ А.В., ПОНОМАРЕНКО Л.Д. Метод точного решения задачи $N$ -мерного гильотинного раскюра. . . . .	41
РОМАНОВА Т.Е., ЯСЬКОВ Г.Н. Построение вектора геометрической информации о $\varphi^*$ -объекте. . . . .	43
ЧУВАШЕВА С.И., КРЫЖАНСВСКИЙ В.Б. Дифференцируемость решения задачи Коши для уравнения параболического типа по параметрам размещения источника. . . . .	45
ЭЛЬКИН Б.С. О некоторых оценках решений краевых задач при оптимизации систем с распределенными параметрами. . . . .	49
ДАБАГЯН А.В., МИХАЙЛЧЕНКО А.М. Оптимизация процесса подготовки трудовых ресурсов в условиях рыночной экономики. . . . .	54
АКСАК Н.Г., БОБУХ А.А., РУДЕНКО О.Г. Факторизование алго-	