МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ И ПРОЦЕССОВ

№27,

Киев 1993

УДК 519.85

О.А.ЕМЕЦ

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА НЕДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЙ НА ЕВКЛИДОВЫХ КОМБИНАТОРНЫХ МНОЖЕСТВАХ

Приводятся оценки и достаточные условия минимумов недифференцируемых выпуклых функций на евклидовых комбинаторных множествах: общем полиперестановочном, общем множестве размещений, множестве сочетаний с повторениями.

Пусть E - евклидово комбинаторное множество [I] арифметического евклидова пространства R^k.

Теорема. Если $\varphi(x)$ - выпуклая и конечная функция, заданная на выпуклом замкнутом множестве $X \supset E$, $X \subset R^k$, то I) для всех внутренних точек $y \in X$

$$\min_{x\in E} \varphi(x) \geq \varphi(y) - (p(y), y) + \min_{x=(x_1,\dots,x_k)\in E} \sum_{i=1}^{k} p_i(y) x_i ;$$

2) чтобы точка $y \in E \subset int\, X$ доставляла минимум на множестве E функции $\varphi(x)$, достаточно выполнения условия $\min\limits_{x=(x_1,\dots,x_k)\in E} \sum\limits_{i=1}^{k} p_i(y) x_i = (p(y), y)$, где $p(y) = (p_1(y), \dots, p_k(y))$ - субградиент функции $\varphi(x)$ в точке y; $int\, X$ - множество внутренних точек на множестве X.

Рассмотрим в качестве евклидова комбинаторного множества общее полиперестановочное множество $E(G,H)$ [I]. Примем $J_k = \{1,\dots,k\}$, $J_k \cup \{0\} = J_k^0$, $J_0 = \varnothing$. Рассмотрим упорядоченное разбиение множества J_k на s множеств $K_1,\dots,K_s$, $K_i \neq \varnothing$; $K \cap K_j = \varnothing$ $\forall i, j \in J_s$. Обозначим H множество перестановок $\pi = (\pi^1,\dots,\pi^s) = (\pi(1),\dots,\pi(k))$, где π^i - произвольная перестановка элементов множества K_i. Пусть G - мультимножество $\{g_1,\dots,g_k\}$. Множество $E(G,H) = \{g(\pi) = (g_{\pi(1)},\dots,g_{\pi(k)}),$ $\forall \pi \in H\}$ называется общим полиперестановочным множеством. Обозначим $G^{K_i} \subset G$ k_i-элементное мультимножество ($k_i = |K_i|$ $\forall i \in J_s$), образованное из элементов G с номерами из множества K_i. Обозна-

ISBN 5-7702-0468-0 Мат. моделирование и оптимизация техн. систем и процессов. Киев, 1993.

чим элементы $G^{k_i}\ g_1^{k_i},\dots,g_{k_i}^{k_i}$, чтобы выполнялось соотношение

$$g_1^{k_i} \le \dots \le g_{k_i}^{k_i} \quad \forall i\in J_s. \qquad (I)$$

Понятно, что $k_1+\dots+k_s=k$. Обозначим

$$N_i' = \{(\sum_{j=1}^{i-1} k_j)+1,\dots,\sum_{j=1}^{i} k_j\} \quad \forall i\in J_s. \qquad (2)$$

Следствие I. Если $\varphi(x)$ - конечная выпуклая функция, заданная на выпуклом замкнутом множестве $X\supset E(G,H), X\subset R^k$, то I) для всех внутренних точек $y\in X$

$$\min_{x\in E(G,H)} \varphi(x) \ge \varphi(y)-(\rho(y),y)+\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{k_i} \rho_{\alpha_j^i}(y)\, g_j^{k_i};$$

2) чтобы точка $y=(y_1,\dots,y_k)\in E(G,H)$ доставляла минимум на множестве $E(G,H)$ функции $\varphi(x)$, $E(G,H)\subset \operatorname{int} X$, достаточно выполнения соотношения

$$\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{k_i} \rho_{\alpha_j^i}(y)\, g_j^{k_i} = (\rho(y),y),$$

где $\rho(y)=(\rho_1(y),\dots,\rho_k(y))$ - субградиент функции $\varphi(x)$ в точке y; наборы констант $\alpha_1^i,\dots,\alpha_{k_i}^i$; $\alpha_j^i\in N_i'$, $\forall j\in J_{k_i}$, $\forall i\in J_s$ удовлетворяют неравенствам

$$\rho_{\alpha_1^i}(y)\ge\rho_{\alpha_2^i}(y)\ge\dots\ge\rho_{\alpha_{k_i}^i}(y)$$

при N_i' $(i\in J_s)$ в представлении (2), а наборы констант $g_j^{k_i}$ $\forall j\in J_{k_i}$, $\forall i\in J_s$ удовлетворяют соотношениям (I), $k_1+\dots+k_s=k$.

Рассмотрим общее евклидово множество k-размещений $E_{\eta n}^k(G)$ [I], образованных из элементов мультимножества $G=\{g_1,\dots,g_\eta\}$. Не нарушая общности, можем считать, что

$$g_1 \le \dots \le g_\eta. \qquad (3)$$

Следствие 2 [2]. Если $\varphi(x)$ - конечная выпуклая функция, заданная на выпуклом замкнутом множестве $X\supset E_{\eta n}^k(G)$, $X\subset R^k$, а G удовлетворяет условию (3), то I) для всех внутренних точек $y\in X$

$$\min_{x\in E_{\eta n}^k(G)} \varphi(x) \ge \varphi(x)-(\rho(y),y)+\sum_{i=1}^{s}\rho_{B_i}(y)g_i+\sum_{i=s+1}^{k}\rho_{B_i}(y)g_{\eta-k+i};$$

2) чтобы точка $y=(y_1,\dots,y_k)\in E_{\eta n}^k(G)$ доставляла минимум на

множестве $E_{\eta n}^{k}(G)$ функции $\varphi(x)$, $E_{\eta n}^{k}(G) \subset int\, X$, достаточно выполнения соотношения $\sum_{i=1}^{s} \rho_{\beta_i}(y) g_i + \sum_{i=s+1}^{k} \rho_{\beta_i}(y) g_{\eta-k+i} = (\rho(y), y)$,

где $\rho(y) = (\rho_1(y), \dots, \rho_k(y))$ – субградиент функции $\varphi(x)$ в точке y, а перестановка $\beta_1, \dots, \beta_k$ элементов множества J_k и константа $s \in J_k^0$ определяются условием

$$\rho_{\beta_1}(y) \geq \rho_{\beta_2}(y) \geq \dots \geq \rho_{\beta_s}(y) \geq 0 > \rho_{\beta_{s+1}}(y) \geq \rho_{\beta_k}(y).$$

Пусть $G = \{g_1, \dots, g_\eta\}$ – мультимножество с основанием $S(G) = \{g^1, \dots, g^n\}$ и первичной спецификацией $[G] = \{\eta_1, \dots, \eta_n\}$, $\eta_i \geq k \;\; \forall i \in J_n$. Не нарушая общности, можем считать, что выполняется условие (3). Рассмотрим введенное в [3] евклидово множество k-сочетаний с повторениями $\bar{S}_n^k(G)$.

Следствие 3. Если $\varphi(x)$ – конечная выпуклая функция, заданная на выпуклом замкнутом множестве $X \supset \bar{S}_n^k(G)$, $X \subset R^k$, а G удовлетворяет условию (3), то 1) для всех внутренних точек $y \in X$

$$\min_{x \in \bar{S}_n^k(G)} \varphi(x) \geq \varphi(y) - (\rho(y), y) + g_1 \sum_{i=1}^{s} \rho_i(y) + g_\eta \sum_{i=s+1}^{k} \rho_i(y);$$

2) чтобы точка $y = (y_1, \dots, y_k) \in \bar{S}_n^k(G)$ доставляла минимум на множестве $\bar{S}_n^k(G)$ функции $\varphi(x)$, $\bar{S}_n^k(G) \subset int\, X$, достаточно выполнения соотношения

$$g_1 \sum_{i=1}^{s} \rho_i(y) + g_\eta \sum_{i=s+1}^{k} \rho_i(y) = (\rho(y), y),$$

где $\rho(y) = (\rho_1(y), \dots, \rho_k(y))$ – субградиент функции $\varphi(x)$ в точке y; $s \in J_k^0$ вычисляется из системы соотношений

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{t} \rho_{s+1-j}(y) \geq 0 & \forall t \in J_s, \\ \sum_{j=1}^{t} \rho_{s+j}(y) \leq 0 & \forall t \in J_{k-s}. \end{cases}$$

Список литературы

1. Емец О.А. Евклидовы комбинаторные множества и оптимизация на них. Новое в математическом программировании: Учеб. пособие. – Киев: УМК ВО, 1992. – 92 с.

2. Емец О.А. Экстремальные свойства недифференцируемых выпуклых функций на общем евклидовом множестве размещений // Сис-

темн программного обеспечения решения экономических задач. - М.: РАН, ЦЭМИ, ВЦ РАН, 1992. - С. 7-8.

3. Е м е ц О.А. Множество сочетаний с повторениями, отображенное в R^k, и свойства задач оптимизации на нем // Докл. АН Украины. - 1991. - № 4. - С. 69-72.

Получено 01.04.93

УДК 519.85

О.А.ЕМЕЦ, Л.Г.ЕВСЕЕВА

МЕТОД РЕШЕНИЯ КОМБИНАТОРНОЙ ЗАДАЧИ РАЗМЕЩЕНИЯ ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ОЦЕНКИ И ДОСТАТОЧНОГО УСЛОВИЯ МИНИМУМА ВЫПУКЛОЙ НЕДИФФЕРЕНЦИРУЕМОЙ ФУНКЦИИ

Для задачи упаковки прямоугольников [1] как задачи минимизации выпуклой функции на множестве перестановок построен алгоритм метода ветвей и границ, даны оценки минимума целевой функции. Доказано достаточное условие минимума.

Пусть имеются набор прямоугольников m шириной h, длины которых образуют мультимножество $M=\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ и полубесконечная полоса шириной а, разделенная на k полосок шириной h каждая. Данный набор прямоугольников необходимо упаковать так, чтобы минимизировать длину занятой части полосы. Эта задача является частным случаем (не имеет зон запрета) задачи [1,2]. Не нарушая общности, можно считать, что $a_1 \le a_2 \le \dots \le a_m$.

Примем $s=m-k+1$. Пусть $G=\{g_1, \dots, g_n\}$ - мультимножество, основание которого состоит из q элементов. При этом $n=ks$, $g_1=\dots=g_{n-m}=0$, $g_{n-m+1}=a_1, \dots, g_n=a_m$.

Рассмотрим матрицу $A=[x_{ij}]$, элемент x_{ij} $(i=1,\dots,k;$ $j=1,\dots,s)$ которой равен длине прямоугольника, упакованного на j-е место i-й полоски, т.е. $x_{ij} \in G$. Поставим в соответствие этой матрице точку $x=(x_{11},\dots,x_{1s}, x_{21},\dots,x_{2s},\dots,x_{k1},\dots$ $\dots, x_{ks})$, $x \in R^n$.

ISBN 5-7702-0468-0 Мат. моделирование и оптимизация техн. систем и процессов. Киев, 1993.

СОДЕРЖАНИЕ