Українська Федерація Інформатики

Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України
Вищий навчальний заклад Укоопспілки
«Полтавський університет економіки і торгівлі» (ПУЕТ)

ІНФОРМАТИКА ТА СИСТЕМНІ НАУКИ (ІСН – 2017)

МАТЕРІАЛИ
VIII Всеукраїнської науково-практичної
конференції за міжнародною участю

(м. Полтава, 16–18 березня 2017 року)

За редакцією професора О. О. Ємця

Полтава
ПУЕТ
2017

УДК 004+519.7
I-74

ПРОГРАМНИЙ КОМІТЕТ

I-74 **Інформатика** та системні науки (ІСН – 2017) : матеріали VIII Всеукраїнської науково-практичної конференції за міжнародною участю (м. Полтава, 16–18 березня 2017 р.) / за ред. Ємця О. О. – Полтава : ПУЕТ, 2017. – 333 с.

ISBN 978-966-184-272-3

Збірник тез конференції містить сучасну проблематику в таких галузях інформатики та системних наук, як теоретичні основи інформатики та кібернетики, математичне моделювання й обчислювальні методи, математичне та програмне забезпечення обчислювальних машин і систем, системний аналіз і теорія оптимальних рішень. Подано доповіді, що відображають проблеми сучасної підготовки фахівців з інформатики, прикладної математики, системного аналізу та комп'ютерних інформаційних технологій.

Збірник розраховано на фахівців із кібернетики, інформатики та системних наук.

УДК 004+519.7

Матеріали друкуються в авторській редакції мовами оригіналів.
За виклад, зміст і достовірність матеріалів відповідають автори

ISBN 978-966-184-272-3

УДК 519.8

МНОГОГРАННИК СПОЛУЧЕНЬ З НЕОБМЕЖЕНИМИ ПОВТОРЕННЯМИ: СИМПЛЕКСНА ФОРМА

О. О. Ємець, *д. ф.-м. н., професор;*
Є. М. Ємець, *к. ф.-м. н., професор;*
Ол-ра О. Ємець, *к. ф.-м. н., доцент;*
С. В. Ванжа, *аспірант*
Вищий навчальний заклад Укоопспілки «Полтавський університет економіки і торгівлі»
yemetsli@ukr.net, yemetsli@mail.ru, yemets2008@ukr.net

В доповіді наводиться правила утворення симплексної форми многогранника сполучень з необмеженими повтореннями. Для симплексної форми многогранника сполучень з необмеженими повтореннями доведено ряд тверджень. На прикладі проілюстровано формування симплексної форми многогранника сполучень з необмеженими повтореннями.

Iemets O. O., Yemets' Ye. M., Yemets' O. O., Vanzha S. V. The polyhedron of combinations with unlimited repetitions: the simplex form. The report provides rules for the formation of the simplex form of polyhedron of combinations with unlimited repetitions. For the simplex form of the polyhedron of combinations with unlimited number of repetitions some statements are proven. In the example it is illustrated forming of the simplex form of the polyhedron of combinations with unlimited repetitions.

Ключові слова: МНОГОГРАННИК СПОЛУЧЕНЬ, СИМПЛЕКСНА ФОРМА МНОГОГРАННИКА, СПОЛУЧЕННЯ З НЕОБМЕЖЕНИМИ ПОВТОРЕННЯМИ.

Keywords: POLYHEDRON OF COMBINATIONS, SIMPLEX FORM OF POLYHEDRON, COMBINATIONS WITH UNLIMITED REPETITIONS.

Вступ. Актуальним напрямком розвитку теорії оптимізації є комбінаторна оптимізація (див., зокрема, [1–17]). Дослідження властивостей комбінаторних множин та їх многогранників є підґрунтям розробки методів комбінаторної оптимізації. Часто одним з етапів таких методів є лінійна релаксація з використанням комбінаторних многогранників. Якщо при цьому використовувати алгоритм Кармаркара (АК), то многогранник треба мати в формі, що дозволяє застосовувати АК – в так звані симплексній формі. В роботах [18–19] досліджувалась симплексна форма переставного многогранника. В цій роботі розглядається симплексна форма опуклої оболонки евклідової комбінаторної множини сполучень з необмеженими повтореннями, яка введена в [2].

1. Постановка задачі. Розглянемо мультимножину $G=\{g_1,...,g_\eta\}$ з основою $S(G)=\{e_1,...,e_n\}$, первинною специфікацією $[G]=(k^n)$, яка означає, що кратність кожного елемента e_i основи в G є k $\forall i\in J_n=\{1,2,...,n\}$. Тоді кожна упорядкована k-вибірка $(x_1,...,x_k)$, де $x_1\le x_2\le...\le x_k$ називається [2] евклідовим сполученням з необмеженими (тобто від 0 аж до k) повтореннями (кожного елемента основи). Множина всіх таких сполучень називається [2] евклідовою множиною сполучень з необмеженими повтореннями, позначається $\overline{S}_n^k(G)$, а її опукла оболонка $conv\,\overline{S}_n^k(G)$ позначається $\overline{Q}_n^k(G)$ і називається многогранником сполучень з необмеженими повтореннями.

Як відомо [2], вершинами цього многогранника є точки $(e_1,...,e_1)$, $(e_1,...,e_1,e_n)$, $\dots$, $(e_1,...,e_1,e_n,...,e_n)$, $\dots$, $(e_n,...,e_n)$ і тільки вони, а многогранник $\overline{Q}_n^k(G)$ описується системою $e_1\le x_1\le x_2\le...\le x_k\le e_n$ та є симплексом з названими вершинами.

Розглянемо, як многогранник $\overline{Q}_n^k(G)$ представляється в симплексній формі.

Для цього спершу розглянемо необхідні далі перетворення допустимої області ЗЛП в симплексну форму (див., наприклад, [20, 21]).

2. Алгоритм перетворення (АП) допустимих умов ЗЛП в симплексну форму. Нехай

$$cx\to max; \tag{1}$$

$$Ax\le b; \tag{2}$$

$$x\ge 0, \tag{3}$$

$$c=(c_1,...,c_k),\quad x=(x_1,...,x_k)^T,\quad A=(a_{ij})_{j=\overline{1,k}}^{i=\overline{1,r}},\quad b=(b_1,...,b_r)^T.$$

Крок 1. Систему (2), (3) зведемо до так званого канонічного вигляду [22, с. 17]

$$Ax + y = b; \quad x, y \geq 0, \tag{4}$$

де $y = (y_1, ..., y_r)^T$.

Крок 2. Записується додаткове обмеження вигляду

$$\sum_{j=1}^{k} x_j + \sum_{i=1}^{r} y_i \leq U, \tag{5}$$

тут U таке велике дійсне додатне число, що всі точки системи (2), (3) задовольняють (5). Якщо $u \geq 0$, то (5) еквівалентно рівності:

$$\sum_{j=1}^{k} x_j + \sum_{i=1}^{r} y_i + u = U. \tag{6}$$

Крок 3. Зводимо систему (4) до однорідної, що еквівалента системі (4). Це можна зробити, помноживши праву частину рівнянь на одиницю у вигляді такого виразу:

$$\frac{\sum_{j=1}^{k} x_j + \sum_{i=1}^{r} y_i + u}{U}.$$

Рівняння в (4) набудуть вигляду

$$A^x x + A^y y - bu = \overline{0}, \tag{7}$$

де матриця $A^x = \left(a_{ij}^x\right)_{j=\overline{1,k}}^{i=\overline{1,r}}$ з елементами з елементами $a_{ij}^x = a_{ij} - \dfrac{b_i}{U}$ $\forall j \in J_k$, $\forall i \in J_r$; матриця $A^y = \left(a_{ij}^y\right)_{j=\overline{1,k}}^{i=\overline{1,r}}$ з елементами $a_{ii}^y = 1 - \dfrac{b_i}{U}$ $\forall i \in J_r$: $a_{ij}^y = -\dfrac{b_i}{U}$, $j \neq i$ $\forall i \in J_r$, $\forall j \in J_k$; $\overline{0} = (0, ..., 0)^T \in R^r$ – нульовий вектор стовбець з r елементами.

Крок 4. Перетворюємо умову (6) в гіперплощину, що відсікає на координатних осях одиниці, вводячи нові змінні

$$X_j = \frac{x_j}{U};\ \ Y_i = \frac{y_i}{U};\ \ \frac{u}{U} = V\ \ \forall i \in J_r,\ \ \forall j \in J_k. \tag{8}$$

Умови задачі разом з перетвореною умовою (6) після заміни (7) визначають симплекс з вершиною в початку координат, а основа описується гіперплощиною, що з осями координат перетинається в одиницях.

З умов (1), (6), (7), використовуючи (8), маємо

$$UcX \to max \tag{9}$$

за умов

$$A^X X + A^Y Y - bV = \overline{0}, \tag{10}$$

$$\sum_{j=1}^{k} X_j + \sum_{i=1}^{r} Y_i + V = 1, \tag{11}$$

$$X = (X_1, ..., X_k)^T \geq 0;\ \ Y = (Y_1, ..., Y_r)^T \geq 0;\ \ V \geq 0, \tag{12}$$

де

$$A^X = \left(a_{ij}^X\right)_{j=\overline{1,k}}^{i=\overline{1,r}};\ \ a_{ij}^X = a_{ij}U - b_j\ \ \forall i \in J_r\ \ \forall j \in J_k;$$

$$A^Y = \left(a_{ij}^Y\right)_{j=\overline{1,k}}^{i=\overline{1,r}};\ \ a_{ii}^Y = U - b_i\ \ \forall i \in J_r;$$

$$a_{ij}^Y = -b_i\ \ \forall i \neq j;\ \ i \in J_r;\ \ j \in J_k.$$

Крок 5. Здійснюються перетворення задачі, що задовольняють вимогу: точка, що є центром (барі-центром) симплекса $\left(\frac{1}{N}, \frac{1}{N}, ..., \frac{1}{N}\right) \in R^N$, задовольняє умовам задачі; тут N – вимірність простору змінних задачі, що визначається при цьому перетворенні.

Для цього в кожному рівнянні (10) (нехай його номер i) віднімемо в лівій частині невід'ємну змінну Z_i, $i \in J_r$, помноживши її на коефіцієнт, який дорівнює алгебраїчній сумі всіх коефіцієнтів лівої частини цього рівняння. Крім цього, щоб забезпечити змінній Z_i нульове значення при максимізації, цільова функція модифікується доданком $-MZ_i$, який відіграє штрафну місію за рахунок того, що $M>0$ вибирається достатньо великим. Це робиться для всіх рівнянь ($\forall i \in J_r$). В ліву частину (11) додається $\sum_{i=1}^{r} Z_i$.

Задача (9)–(12) набуває вигляду:

$$UcX - M\sum_{i=1}^{r} Z_i \to max, \tag{13}$$

$$A^X X + A^Y Y - A^Z Z - bV = \overline{0}; \tag{14}$$

$$\sum_{j=1}^{k} X_j + \sum_{i=1}^{r} Y_i + \sum_{i=1}^{r} Z_i + V = 1; \tag{15}$$

$$X \ge 0;\ Y \ge 0;\ Z = \left(Z_1, \ldots, Z_r\right)^T \ge 0;\ V \ge 0, \tag{16}$$

де в (14) $A^X;\ A^Y$ матриці описані раніше, а $A^Z = \left(a_{ij}^Z\right)_{j=\overline{1,k}}^{i=\overline{1,r}}$,

$a_{ii}^Z = U\sum_{j=1}^{k} a_{ij} - kb_i + U - b_i - \left(k-1\right)b_i - b_i = U\sum_{j=1}^{k} a_{ij} + U - \left(2k+1\right)b_i$
$\forall i \in J_r;\ \ a_{ij}^Z = 0\ \ \forall i \ne j,\ \ i \in J_r;\ \ j \in J_k$.

Легко бачити, що для системи (14)–(16) точка $\left(X^*, Y^*, Z^*, V^*\right) = \left(\frac{1}{N}, \ldots, \frac{1}{N}\right) \in R^N$ є допустимою, а вимірність простору $N = k + 2r + 1$, якщо $X_i^* = Y_j^* = Z_i^* = V = \frac{1}{N}$ $\forall i \in J_r$; $\forall j \in J_k$.

3. Перетворення в симплексну форму многогранника сполучень з необмеженими повтореннями. Розглянемо задачу $\sum_{j=1}^{k} c_j x_j \to max$ за умов, $x = \left(x_1, \ldots, x_k\right) \in \overline{Q}_n^k\left(G\right)$, тобто: $e_1 \le x_1 \le \ldots \le x_j \le \ldots \le x_k \le e_n$.

Нехай $e_1 > 0$. Обмеження многогранника $\overline{Q}_n^k\left(G\right)$ можна записати так:

$$\begin{cases} -x_1 \le -e_1, \\ x_1 - x_2 \le 0, \\ \quad \ldots \\ x_{j-1} - x_j \le 0, \\ \quad \ldots \\ x_{k-1} - x_k \le 0, \\ x_k \le e_n. \end{cases} \tag{17}$$

Застосовуємо АП.

Крок 1. Зводимо (17) до канонічної форми, вводячи в рівняння змінні $y_{j-1,j} \quad \forall j \in J_{k+1}$:

$$-x_1 + y_{0,1} = -e_1, \tag{18}$$

$$x_{j-1} - x_j + y_{j-1,j} = 0 \quad \forall j \in J_k^2 = \{2, 3, ..., k\}, \tag{19}$$

$$x_k + y_{k,k+1} = e_n. \tag{20}$$

Крок 2. Записуємо додаткове обмеження:

$$\sum_{j=1}^{k} x_j + \sum_{j=1}^{k+1} y_{j-1,j} \le U \tag{21}$$

у формі рівності

$$\sum_{j=1}^{k} x_j + \sum_{j=1}^{k+1} y_{j-1,j} + u = U, \tag{22}$$

де $u \ge 0$.

Оцінимо змінну U. Додамо $\forall j \in J_k^2$ обмеження (19). Маємо:

$$x_1 - x_k + \sum_{j=2}^{k} y_{j-1,j} = 0,$$

або

$$\sum_{j=2}^{k} y_{j-1,j} = x_k - x_1 \le e_n - e_1; \tag{23}$$

з (18)

$$y_{0,1} = x_1 - e_1 \le e_n - e_1, \tag{24}$$

а з (20):

$$y_{k,k+1} = e_n - x_k \le e_n - e_1. \tag{25}$$

З (23)–(25) одержуємо:

$$\sum_{j=1}^{k} y_{j-1,j} \le 3(e_n - e_1). \tag{26}$$

Як відомо [3], в многограннику сполучень з необмеженими повтореннями є вершина $(e_n, ..., e_n) \in R^k$, і це найбільші можливі значення кожної з координат *x*, тобто $\forall x$ з цього многогранника

$$\sum_{i=1}^{k} x_i \le ke_n. \tag{27}$$

З умов (21), (26), (27) маємо

$$\sum_{j=1}^{k} x_j + \sum_{j=1}^{k+1} y_{j-1,j} \le (k+3)e_n - 3e_1. \tag{28}$$

Отже, доведене таке.

Твердження 1. Для многогранника сполучень з необмеженими повтореннями справедлива нерівність (21), де

$$U = (k+3)e_n - 3e_1. \tag{29}$$

Крок 3. Для зведення системи (18)–(20) до однорідної помножимо праві частини (18) та (20) на вираз

$$\frac{\sum_{j=1}^{k} x_i + \sum_{j=1}^{k+1} y_{j-1,j} + u}{(k+3)e_n - 3e_1},$$

що згідно (22), (29) є одиницею. Одержимо

$$-x_1 + y_{0,1} = \frac{e_1}{3e_1 - (k+3)e_n}\left(\sum_{j=1}^{k} x_j + \sum_{j=1}^{k+1} y_{j-1,j} + u\right); \tag{30}$$

$$x_k + y_{k,k+1} = \frac{e_n}{(k+3)e_n - 3e_1}\left(\sum_{j=1}^{k} x_j + \sum_{j=1}^{k+1} y_{j-1,j} + u\right); \tag{31}$$

або після спрощення

$$\left[4e_1 - (k+3)e_n\right]x_1 + e_1\sum_{j=2}^{k} x_j + \left[(k+3)e_n - 2e_1\right]y_{0,1} +$$

$$+e_1\sum_{j=2}^{k+1} y_{j-1,j} + e_1 u = 0, \tag{32}$$

$$e_n\sum_{j=1}^{k-1} x_j + \left[3e_1 - (k+2)e_n\right]x_k + e_n\sum_{j=1}^{k} y_{j-1,j} +$$

$$+\left[3e_1 - (k+2)e_n\right]y_{k,k+1} + e_n u = 0. \tag{33}$$

Крок 4. Робимо заміну змінних згідно (8). Маємо задачу

$$\left[(k+1)e_n - e_1\right]\sum_{j=1}^{k} c_j X_j \to max,$$

що еквівалентно (1), за умов:

$$\left[4e_1 - (k+3)e_n\right]X_1 + e_1\sum_{j=2}^{k} X_j + \left[(k+3)e_n - 2e_1\right]Y_{0,1} +$$

$$+e_1\sum_{j=2}^{k+1} Y_{j-1,j} + e_1 V = 0; \tag{34}$$

$$X_{j-1} - X_j + Y_{j-1,j} = 0 \quad \forall j \in J_k^2; \tag{35}$$

$$e_n\sum_{j=1}^{k-1} X_j + \left[3e_1 - (k+2)e_n\right]X_k + e_n\sum_{j=1}^{k} Y_{j-1,j} +$$

$$+\left[3e_1 - (k+2)e_n\right]Y_{k,k+1} + e_n V = 0; \tag{36}$$

$$\sum_{j=1}^{k} X_j + \sum_{j=1}^{k+1} Y_{j-1,j} + V = 0\,. \tag{37}$$

Крок 5. В кожному з рівнянь (34)–(36) в лівій частині віднімемо власну невід'ємну змінну $W_{j-1,j}$ (з тими індексами, з якими входить у відповідне рівняння змінна $Y_{j-1,j}$), $\forall j \in J_k^2$ – в (35); $W_{0,1}$ в (34), $W_{k,k+1}$ – в (36)). Коефіцієнт при $W_{j-1,j}$ позначимо $\alpha_{j-1,j}$ $\forall j \in J_{k+1}^1 = \{1, 2, ..., k+1\}$. В (37) введемо змінну $W_{k+1,k+2}$ з коефіцієнтом $\alpha_{k+1,k+2}$.

Твердження 2. Коефіцієнт $\alpha_{j-1,j}$ $\forall j \in J_{k+1}^1$ обчислюється так:

$$\alpha_{0,1} = 4e_1 - (k+3)e_n + e_1(k-1) + \left[(k+3)e_n - 2e_1\right] + (k+1)e_1 + e_1 =$$

$$= e_1(4 + k - 2 + k + 1 + 1) = (2k+3)e_1;$$

$$\alpha_{j-1,j} = 1 - 1 + 1 = 1 \quad \forall j \in J_k^2;$$

$$\alpha_{k,k+1} = e_n(k-1) + 3e_1 - (k+2)e_n + e_n k + 3e_1 - (k+2)e_n + e_n =$$

$$= 6e_1 + e_n(k - 1 - k - 2 + k - k - 2 + 1) = 6e_1 - 4e_n.$$

$$\alpha_{k+1,k+2} = k + k + 1 + 1 = 2(k+1).$$

Після кроку 5 маємо задачу:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j - M \sum_{j=1}^{k+2} W_{j-1,j} \to max$$

$$\left[2e_1 - (k+1)e_n\right]X_1 + e_1 \sum_{j=2}^{k} X_j + (k+1)e_n Y_{0,1} + e_1 \sum_{j=2}^{k+2} Y_{j-1,j} +$$

$$+ e_1 V - (2k+3)e_1 W_{0,1} = 0, \tag{38}$$

$$X_{j-1} - X_j + Y_{j-1,j} - W_{j-1,j} = 0; \quad \forall j \in J_k^2, \tag{39}$$

$$e_n \sum_{j=1}^{k-1} X_j + (e_1 - ke_n)X_k + e_n \sum_{j=1}^{k} Y_{j-1,j} + (e_1 - ke_n)Y_{k,k+1} + e_n V -$$

$$-(6e_1 - 4e_n)W_{k,k+1} = 0, \tag{40}$$

$$\sum_{j=1}^{k} X_j + \sum_{j=1}^{k+1} Y_{j-1,j} + V - 2(k+1)W_{k+1,k+2} = 1. \qquad (41)$$

Зауважимо, що $r = k+1$, отже $N = k + 2r + 1 = = k + 2k + 2 + 1 = 3(k+1)$.

Висновки. Одержано симплексну форму многогранника сполучень з необмеженими повтореннями. Як напрямок подальших досліджень доцільно дослідити її використання в задачах оптимізації на сполученнях.

Список використаних джерел

1. Сергиенко И. В. Модели и методы решения на ЭВМ комбинаторных задач оптимизации / И. В. Сергиенко, М. Ф. Каспшицкая. – Киев : Наук. думка, 1981. – 288 с.
2. Стоян Ю. Г. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації [Електронний ресурс] / Ю. Г. Стоян, О. О. Ємець. – Киев : Ін-т системн. досліджень освіти, 1993. – 188 с. – Режим доступу: http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/487. – Назва з екрана.
3. Стоян Ю. Г. Оптимізація на полірозміщеннях: теорія та методи [Електронний ресурс] / Ю. Г. Стоян, О. О. Ємець, Є. М. Ємець. – Полтава : ПУСКУ, 2005. – 103 с. – Режим доступу: http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/376. – Назва з екрана.
4. Емец О. А. Евклидовы комбинаторные множества и оптимизация на них. Новое в математическом программировании [Електронний ресурс] : учеб. пособие / О. А. Емец. – Киев : УМК ВО, 1992. – 92 с. – Режим доступу: http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/489. – Назва з екрана.
5. Ємець О. О. Дослідження областей визначення задач евклідової комбінаторної оптимізації на переставних множинах [Електронний ресурс] / О. О. Ємець, Л. М. Колєчкіна, С. І. Недобачій. – Полтава : Полтавський державний технічний університет ім. Юрія Кондратюка, ЧПКП «Легат», 1999. – 64 с. – Режим доступу: http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/488. – Назва з екрана.
6. Емец О. А. Оптимизация на полиперестановках [Електронний ресурс] / О. А. Емец, Н. Г. Романова. – Киев : Наук. думка, 2010. – 105 с. – Режим доступу: http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/474. – Назва з екрана.
7. Ємець О. О. Задачі комбінаторної оптимізація з дробово-лінійними функціями / О. О. Ємець, Л. М. Колєчкіна. – Київ : Наук. думка, 2005. – 117 с. – Режим доступу: http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/474. – Назва з екрана.

8. Ємець О. О. Задачі оптимізації на полікомбінаторних множинах: властивості та розв'язування [Електронний ресурс] : монографія / О. О. Ємець, О. В. Роскладка. – Полтава : ПУСКУ, 2006. – 129 с. – Режим доступу: http://dspace.uccu.org.ua/handle/ 123456789/377. – Назва з екрана.
9. Ємець О. О. Розв'язування задач комбінаторної оптимізації на нечітких множинах [Електронний ресурс] : монографія / О. О. Ємець, Ол-ра О. Ємець. – Полтава : ПУЕТ, 2011. – 239 с. – Режим доступу: http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/352. – Назва з екрана.
10. Емец О. А. Оптимизация дробно-линейных функций на размещениях [Електронний ресурс] : монография / О. А. Емец, О. А. Черненко. – Киев : Наук. думка, 2011. – 154 с. – Режим доступу: http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/467. – Назва з екрана.
11. Ємець О. О. Моделі евклідової комбінаторної оптимізації [Електронний ресурс] : монографія / О. О. Ємець, О. О. Черненко. – Полтава : ПУЕТ, 2011. – 204 с. – Режим доступу: http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/354. – Назва з екрана.
12. Ємець О. О. Транспортні задачі комбінаторного типу: властивості, розв'язування, узагальнення [Електронний ресурс] : монографія / О. О. Ємець, Т. О. Парфьонова. – Полтава : ПУЕТ, 2011. – 174 с. – Режим доступу: http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/353. – Назва з екрана.
13. Емец О. А. Комбинаторная оптимизация на размещениях [Електронний ресурс] / О. А. Емец, Т. Н. Барболина. – Киев : Наук. думка, 2008. – 159 с. – Режим доступу: http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/473. – Назва з екрана.
14. Донець Г. П. Екстремальні задачі на комбінаторних конфігураціях : монографія / Г. П. Донець, Л. М. Колєчкіна. – Полтава : ПУЕТ, 2011. – 309 с.
15. Панишев А. В. Модели и методы оптимизации в проблеме коммивояжера / А. В. Панишев, Д. Д. Плечистый. – Житомир : ЖДТУ, 2006. – 300 с.
16. Гуляницький Л. Ф. Розробка моделей і наближених методів комбінаторної оптимізації та їх застосування в інформаційних технологіях: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня д-ра техн. наук : спец. 01.05.02 «Математичне моделювання та обчислювальні методи» / Л. Ф. Гуляницький. – Київ, 2005. – 32 с.
17. Гребеннік І В. Математичні моделі і методи комбінаторної оптимізації в геометричному проектуванні : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня д-ра техн. наук: спец. 01.05.02 «Математичне моделювання та обчислювальні методи» / І. В. Гребеннік. – Х., 2006. – 30 с.

18. Ємець О. О. Оптимізація лінійної функції на переставленнях: перетворення переставного многогранника до вигляду, необхідного для використання в алгоритмі Кармаркара / О. О. Ємець, Є. М. Ємець, Д. М. Ольховський // Наукові вісті НТУУ «КПІ». – 2010. – № 2. – С. 43–49.
19. Емец О. А. Симплексная форма общего перестановочного многогранника, заданного неприводимой системой / О. А. Емец, М. В. Леонова // Проблемы управления и информатики. – 2014. – №1. – С. 68–79.
20. Зайченко Ю. П. Исследование операций / Ю. П. Зайченко. – Киев : Видавничий дім «Слово», 2003. – 688 с.
21. Таха Х. А. Введение в исследование операцій / Х. А. Таха. – Москва : Издат. дом «Вильямс», 2005. – 912 с.
22. Ермольев Ю. М. Математические методы исследования операций / Ю. М. Ермольев, И. И. Ляшко, В. С. Михалевич, В. И. Тюптя. – Киев : Вища шк., 1979. – 312 с.

УДК 519.8

МЕТОД ГІЛОК ТА МЕЖ В КОМБІНАТОРНІЙ, НЕЧІТКІЙ ТА ІНТЕРВАЛЬНІЙ ОПТИМІЗАЦІЇ: ОГЛЯД РОБІТ ПОЛТАВСЬКИХ ДОСЛІДНИКІВ

О. О. Ємець, *д. ф.-м. н., професор*
Вищий навчальний заклад Укоопспілки «Полтавський університет економіки і торгівлі»
yemetsli@ukr.net
І. М. Поляков, *аспірант*
Вищий навчальний заклад Укоопспілки «Полтавський університет економіки і торгівлі»
ivanplkv1@gmail.com

В доповіді наведено огляд робіт з методу гілок та меж за 25 років.

Iemets O. O., Polyakov I. M. Branch and bound method in combinatorial, fuzzy and interval optimization: the review of publications of Poltava researchers. The report provides an overview of works of the branch and bound method for 25 years.

Ключові слова: КОМБІНАТОРНА ОПТИМІЗАЦІЯ, РОЗМІЩЕННЯ, МЕДОД ГІЛОК ТА МЕЖ, ПЕРЕСТАНОВКИ, НЕЧІТКА ОПТИМІЗАЦІЯ, ІНТЕРВАЛЬНА ОПТИМІЗАЦІЯ.

Keywords: COMBINATORIAL OPTIMIZATION, ARRANGEMENTS, BRANCH AND BOUND METHOD, PERMUTATIONS, FUZZY OPTIMIZATION, INTERVAL OPTIMIZATION.