УДК 519.81

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К УСЛОВНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ НА СФЕРИЧЕСКИ РАСПОЛОЖЕННЫХ ДИСКРЕТНЫХ МНОЖЕСТВАХ

***О. С. Пичугина**, докторант*
Харьковский национальный университет радиоэлектроники
pichugina_os@mail.ru
***К. П. Коробчинский,** ст. преподаватель*
Национальный аэрокосмический университет
kirill.korobchinskiy@gmail.com

В данном докладе предложена схема методов условной оптимизации на сферических дискретных множествах, основанная на использовании специфики таких множеств и свойств функций на них.

Pichugina O., Korobchinskiy K. In this report, a scheme of constrained optimization methods over spherical discrete sets is proposed. It is based on a specifics of the sets and properties functions on them.

Ключевые слова: ДИСКРЕТНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ, ГИПЕРСФЕРА, ВЕРШИННО РАСПОЛОЖЕННОЕ МНОЖЕСТВО, УСЛОВНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ, ШТРАФНЫЕ И БАРЬЕРНЫЕ ФУНКЦИИ, МЕТОД УСЛОВНОГО ГРАДИЕНТА

Keywords: DISCRETE OPTIMIZATION, HYPERSPHERE, VERTEX LOCATED SET, PENALTY FUNCTION, PENALTY AND BARRIER FUNCTIONS, CONDITIONAL GRADIENT METHOD

Рассмотрим дискретную задачу следующего вида:

$$f_0(x) \to \min, \tag{1}$$

$$x \in E \subset R^n, \tag{2}$$

$$E = \left\{ x \in E' \subseteq R^n : \; f_i(x) \le 0, \; i \in J_k, \; f_i(x) = 0, \; i \in J_m \setminus J_k \right\}, \tag{3}$$

где множество E' – конечно. Дополнительно потребуем чтобы E' было вписано в гиперсферу

$$E' \subseteq S_r(a), \qquad (4)$$

где $S_r(a)$ – сфера радиуса r с центром в точке $a \in R^n$. Здесь и далее $J_m = \{1,...,m\}$.

Заметим, что

$$E' = P \cap S_r(a), \qquad (5)$$

где

$$P = \mathrm{conv} E'. \qquad (6)$$

Множества, удовлетворяющие условия (5), названы полиэдрально-сферическими [1,2]. Нетрудно видеть, что для полиэдрально-сферического множества E'

$$E' = \mathrm{vert}\, P, \qquad (7)$$

т.е. такое множество вершинно расположено [3].

Известно [1], что для функций, заданных на вершинно расположенном множестве E', существуют выпуклые дифференцируемые продолжения. Таким образом, мы будем считать что функция $f_0(x)$ в задаче (1)-(3) является выпуклой и дифференцируемой в R^n.

Рассмотрим последовательность задач

$$F(x,\lambda_j,\mu_j) = f_0(x) + \lambda_j \sum_{i=1}^{k} g_i(f_i(x)) + \mu_j \sum_{i=k+1}^{m} h_i(f_i(x)) \to \min_{E'}. \qquad (8)$$

где $g_i(.)$ – барьерная функция, $h_i(.)$ – штрафная функция, $\{\lambda_j,\mu_j\}_j$ – барьерные и штрафные коэффициенты, $j \in N$. Пусть $x^{*j} = \operatorname*{argmin}_{E'} F(x,\lambda_j,\mu_j)$, $z^{*j} = f(x^{*j})$.

Учитывая представление (5), осуществим переход от дискретной задачи (8) к эквивалентной непрерывной задаче на многограннике P при помощи добавления уравнения сферы $f_{m+1}(x) = (x-a)^2 - r^2 = 0$ ко множеству функциональных ограничений:

$$\Phi(x,\lambda_j,\mu_j) = f(x) + \lambda_j \sum_{i=1}^{k} g_i(f_i(x)) + \mu_j \sum_{i=m'+1}^{m+1} h_i(f_i(x)) \to \min_{P'}. \qquad (9)$$

Теперь решаем задачу (9) методом условного градиента [4] для последовательности $\{\lambda_j,\mu_j\}_j$, отвечающей классическим требованиям к штрафным и барьерным коэффициентам [4]. Как известно, в ходе реализации данного метода решаются вспомогательные линейные задачи на P и формируется последовательность его вершин P. Учитывая (7), можно видеть, что эти вспомогательные линейные задачи решаются на E', т.е. имеют вид:

$$\mathbf{LP(E',c)}:\ x^{lin,c}=\underset{E'}{\arg\min}\ c^T x,\ z^{lin,c}=\min_{E'}\ c^T x.$$

В результате, на j-ой итерации, помимо решения $x^{Pj}=\underset{P}{\arg\min}\ \Phi\left(x,\lambda_j,\mu_j\right)$ задачи (9), формируется как последовательность допустимых точек многогранника (6) – $\mathbf{x}^{Pj}=\left\{x^{Pjt}\right\}_t\subseteq P:\ x^{Pjt}\underset{t\to\infty}{\to}x^{Pj}$, так и последовательность $\mathbf{y}^j=\left\{y^{jt}\right\}_t\subseteq E'$ решений вспомогательных $LP(E',.)$-задач, Кроме этого, находится еще одна последовательность допустимых точек E' – $\mathbf{p}^j=\left\{p^{jt}\right\}_t\subseteq E'$ – в результате проектирования $\mathbf{x}^{Pj}$ на E': $p^{jt}=Pr_{E'}x^{jt}$, где $Pr_{E'}x$ – проекция x на E'. Лучшая из точек последовательностей $\mathbf{y}^j,\mathbf{p}^j$ по значению целевой функции будет определять лучшее приближение к x^{*j} : $z^{*j}\approx z^j$, где $z^j=\min\limits_{x\in\left\{\mathbf{y}^j,\mathbf{p}^j\right\}} f_0\left(x\right),\ x^j=\arg\min\limits_{x\in\left\{\mathbf{y}^j,\mathbf{p}^j\right\}} z^j$.

Допустимые точки множества E в $\left\{\mathbf{y}^j,\mathbf{p}^j\right\}_j$ формируют последовательность приближений к глобальному решению исходной задачи:

$$z^*=\min_{E}\ f\left(x\right),\ x^*=\arg\min_{E}\ f\left(x\right). \qquad (10)$$

Лучшее из них является итоговым приближением к (10):

$$z^*\approx z^{**},\ z^{**}=\min_{x\in\left\{\mathbf{y}^j,\mathbf{p}^j\right\}_j\cap E} f\left(x\right),\ x^{**}=\arg\min_{x\in\left\{\mathbf{y}^j,\mathbf{p}^j\right\}_j\cap E} z^{**}.$$

Тот факт, что $\left\{y_j,p_j\right\}\cap E\neq\varnothing$, соответственно x^{**} будет найдено, обеспечивается тем, что по построению $y^{ij}\underset{i,j\to\infty}{\to}y^*\in E$.

<u>Замечание 1</u>. Как видно, в ходе реализации предлагаемой вычислительной схемы возникают две вспомогательные комбинаторные задачи – $LP(E',c)$ и $Pr_{E'}x$. В первом случае ограничения в представлении (3) предлагается разбивать на прямые – $x\in E'$ – и функциональные $f_i\left(x\right)=0,\ i\in J_{m'}$;

$f_j(x) \le 0,\ j \in J_m \setminus J_{m'}$ так, чтобы $LP(E',c)$ была легко разрешима, а при добавлении любого из функциональных ограничений – уже нет. Задача же проектирования $Pr_{E'}x$ для полиэдрально-сферических множеств эквивалентна $LP(E',a\text{-}x)$ [1].

Вывод. В данном докладе представлена схема методов условной оптимизации на сферических дискретных множествах, основанная на использовании специфики таких множеств и свойств функций на них. Описана возможность совместного использования методов штрафных функций, барьерных функций и метода уловного градиента для решения указанного класса задач.

Литература

1. Pichugina, O., Yakovlev, S.: Convex Extensions and Continuous Functional Representations in Optimization, with Their Applications. J. Coupled Syst. Multiscale Dyn. 4, 129-152 (2016).
2. Pichugina, O. S., Yakovlev, S. V. The penalty method for solving optimization problems over polyhedral-spherical combinatorial sets. Radioelectronics & Informatics Journal . 1, 18-26 (2016).
3. Yakovlev, S.: The theory of convex continuations of functions at the vertices of convex 308 polygons. Comput. Math. Math. Phys. 34(7), 959–965 (1994).
4. Bertsekas, D. P.: Nonlinear Programming, 2nd edn. Mass: Athena Scientific, Belmont (1999).