**УДК 519.6:532.546:539.3**

# ПОБУДОВА РОЗРИВНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ПОЧАТКОВО-КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПАРАБОЛО-ГІПЕРБОЛІЧНИХ СИСТЕМ

***О.О. Марченко,*** *к.ф.-м. н., ст. наук. співр.,*
***Т.А. Самойленко,*** *к.ф.-м.н.,*
*Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України*
*tkucheruk@rambler.ru*

*В доповіді представлено побудову наближеного розривного розв'язку початково-крайової задачі для параболо-гіперболічної системи рівнянь.*

*Marchenko O.O., Samoilenko T.A. Construction of discontinuous solution for initial-boundary problems for parabolic-hyperbolic systems. In the report we present construction of the discontinuous approximate solution for the initial-boundary problem for the parabolic-hyperbolic system.*

*Ключові слова:* ПАРАБОЛО-ГІПЕРБОЛІЧНА СИСТЕМА, МЕТОД ГАЛЬОРКІНА, МСЕ.

*Keywords:* PARABOLIC-HYPERBOLIC SYSTEM, GALERKIN METHOD, FEM.

Розглядається початково-крайова задача для системи параболо-гіперболічних рівнянь, що описує напружено-деформований стан неоднорідної за структурою ґрунтової споруди з урахуванням змінного температурного режиму. Система має наступний вигляд

$$\tilde{\mu}\frac{\partial h}{\partial t} - div(K_{\phi}(T,\theta)\, grad\, h) = 0,$$

$$c_T\ \frac{\partial T}{\partial t} - div(\lambda_T\ grad\, T - c_{в} v T) = 0, \qquad (1)$$

$$\rho_{гр}\frac{\partial^2 w_{ск}}{\partial t^2} - (Aw_{ск})(w_{ск}) - grad\, P = F,\ \ (x,y,t)\in\Omega\times(0,\tilde{T}]\ ,$$

де $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, $h$ – п'єзометричний напір, $T$ – температура,

$w_{ск}=(u_{ск},v_{ск})^T$ – вектор зміщень скелету ґрунту, $\tilde{\mu}$ – вологоємність, $K_ф(T,\theta)=\bar{K}_ф(T)e^{\varepsilon(\theta)}$, $\theta$ – об'ємна деформація, $v=-K_ф\, grad\, h$, $c_T$, $c_в$ – об'ємні теплоємності середовища і води, $\rho_{гр}$, $\rho_в$ – щільність ґрунту і води відповідно, $A$ – оператор теорії пружності, $P=\rho_в g(h-y)$ – тиск, $F=(0,-\rho_{гр}g)^T$ .

Крайові умови – неоднорідні змішані.

Початкові умови (вважається відомою на момент часу $t=0$ і динаміка процесу волого-, теплопереносу) для $(x,y)\in\bar{\Omega}$ :

$$h(x,y,0)=H_0(x,y),\quad T(x,y,0)=T_0(x,y),\quad w_{ск}(x,y,0)=W_0(x,y),$$
$$\frac{\partial h}{\partial t}(x,y,0)=\tilde{H}_0(x,y),\ \frac{\partial T}{\partial t}(x,y,0)=\tilde{T}_0(x,y),\ \frac{\partial w_{ск}}{\partial t}(x,y,0)=0. \quad (2)$$

Умови спряження на ділянці контакту ґрунтових пластів $\gamma=\bar{\Omega}_1\cap\bar{\Omega}_2$ мають вигляд

$$\{K_ф(T,\theta)\frac{\partial h}{\partial x}\cos(n,x)+K_ф(T,\theta)\frac{\partial h}{\partial y}\cos(n,y)\}^{\pm}=r_1[h], \quad (3)$$

$$\{(\lambda_T\frac{\partial T}{\partial x}-c_в v_x T)\cos(n,x)+(\lambda_T\frac{\partial T}{\partial y}-c_в v_y T)\cos(n,y)\}^{\pm}=r_2[T], \quad (4)$$

$$[w_{ск,n}]=0\,, \quad (5)$$

$$[\sigma_n]=0\,,\ [\tau_s]=0\,,\ \{\tau_s\}^{\pm}=R[w_{ск,s}]\,,\ (x,y,t)\in\gamma\times[0,\tilde{T}]\,. \quad (6)$$

Нехай $Z$, $Z_0$ – множини вектор-функцій $w(x,y,t)=(h(x,y,t),$ $T(x,y,t),w_{ск}(x,y,t))^T=(w_1(x,y,t),w_2(x,y,t),w_3(x,y,t),w_4(x,y,t))^T$ та $z(x,y,t)=(z_1(x,y,t),z_2(x,y,t),z_3(x,y,t),z_4(x,y,t))^T$ відповідно, які задовольняють головним крайовим умовам і головній умові спряження (5) (неоднорідним в $Z$ та відповідним однорідним в $Z_0$) та компоненти яких і їх частинні похідні на кожній з областей $\Omega_i$ належать простору $L_2(\Omega_i)$, $i=1,2$, [1].

Узагальненим розв'язком початково-крайової задачі (1) - (6) на базі методу Гальоркіна є $w\in Z$, яка $\forall z\in Z_0$ задовольняє наступним співвідношенням

$$m(\partial^2 w/\partial t^2,z)+\bar{m}(\partial w/\partial t,z)+a(w,z)=(F,z)\quad \forall t\in(0,\tilde{T}],$$

$$(w(\cdot,\cdot,0),z)=(w_0,z),\quad (\partial w/\partial t(\cdot,\cdot,0),\ z)=(\tilde{w}_0,\ z)\qquad \forall z\in Z_0,$$

$$m(\partial^2 w/\partial t^2,z)=\sum_{i=1}^{2}\iint_{\Omega_i}\rho_{гр}\Big(\frac{\partial^2 w_3}{\partial t^2}z_3+\frac{\partial^2 w_4}{\partial t^2}z_4\Big)\,d\Omega_i,$$

$$\overline{m}(\partial w/\partial t,z)=\sum_{i=1}^{2}\iint_{\Omega_i}\Big(\tilde{\mu}\,\frac{\partial w_1}{\partial t}z_1+c_T\,\frac{\partial w_2}{\partial t}z_2\Big)\,d\Omega_i,$$

$$a(w,z)=W_1(w,\ z)+W_2(w,\ z)+W_3(w,\ z),$$

$$W_1(w,z)=\sum_{i=1}^{2}\iint_{\Omega_i}\Big(K_ф(w_2,w_3,w_4)\Big(\frac{\partial w_1}{\partial x}\frac{\partial z_1}{\partial x}+\frac{\partial w_1}{\partial y}\frac{\partial z_1}{\partial y}\Big)+\lambda_T\Big(\frac{\partial w_2}{\partial x}\frac{\partial z_2}{\partial x}+$$

$$+\frac{\partial w_2}{\partial y}\frac{\partial z_2}{\partial y}\Big)\Big)d\Omega_i+r_1\int_{\gamma}[w_1][z_1]d\gamma+r_2\int_{\gamma}[w_2][z_2]d\gamma,$$

$$W_2(w,z)=\sum_{i=1}^{2}\iint_{\Omega_i}\Big((\lambda+2\mu)\Big(\frac{\partial w_3}{\partial x}\frac{\partial z_3}{\partial x}+\frac{\partial w_4}{\partial y}\frac{\partial z_4}{\partial y}\Big)+\lambda\Big(\frac{\partial w_3}{\partial y}\frac{\partial z_4}{\partial x}+$$

$$+\frac{\partial w_4}{\partial x}\frac{\partial z_3}{\partial y}\Big)+\mu\Big(\frac{\partial w_3}{\partial y}+\frac{\partial w_4}{\partial x}\Big)\Big(\frac{\partial z_3}{\partial y}+\frac{\partial z_4}{\partial x}\Big)\Big)d\Omega_i+R\int_{\gamma}[w_{34,s}][z_{34,s}]d\gamma,$$

$$W_3(w,z)=\sum_{i=1}^{2}\iint_{\Omega_i}\Big(c_в K_ф(w_2,w_3,w_4)w_2\Big(\frac{\partial w_1}{\partial x}\frac{\partial z_2}{\partial x}+\frac{\partial w_1}{\partial y}\frac{\partial z_2}{\partial y}\Big)+$$

$$+\rho_в\, g\,(w_1-y)\Big(\frac{\partial z_3}{\partial x}+\frac{\partial z_4}{\partial y}\Big)\Big)d\Omega_i,\quad (F,z)=-\sum_{i=1}^{2}\iint_{\Omega_i}\rho_{гр}\,g\ z_4\,d\Omega_i,$$

$$w_0=(H_0,T_0,U_0,V_0)^T,\ \tilde{w}_0=(\tilde{H}_0,\tilde{T}_0,0,0)^T.$$

Пропонується наближений розв’язок даної задачі Коші шукати МСЕ за допомогою схеми Кранка-Ніколсона [1].

У доповіді розглянуто квазілінійну параболо-гіперболічну модель динаміки шаруватого за структурою ґрунтового масиву з урахуванням процесів волого-, теплопереносу, запропоновано алгоритм її розв’язання.

### *Література*

1. Марченко О.А. Исследование приближенного решения квазилинейной параболо-гиперболической задачи / О.А. Марченко, Т.А. Самойленко // Кибернетика и системный анализ. – 2012. – №5. – С. 142-154.