УДК 519.6

МЕТОД ЗНАХОДЖЕННЯ ЛІНІЙ РОЗРИВУ ФУНКЦІЇ ДВОХ ЗМІННИХ ЗА ДОПОМОГОЮ РОЗРИВНИХ СПЛАЙНІВ

***Ю. І. Першина**, д. ф.-м. н., доцент*
Українська інженерно-педагогічна академія
yulia_pershyna@ukr.net

В статті розроблено та досліджено метод знаходження точок розриву та ε-розриву першого роду білінійної функції двох змінних, наближуючи її розривним інтерполяційним чи апроксимаційним білінійним сплайном.

Pershyna I. I. Method of finding break lines function of two variables with discontinuous splines. The paper was developed and researched method of break points and ε-break of the first kind bilinear function of two variables the approach of discontinuous interpolation or bilinear spline approximation

Ключові слова: РОЗРИВНА ФУНКЦІЯ, ІНТЕРЛІНАЦІЯ, РОЗРИВНИЙ СПЛАЙН.
Keywords: DISCONTINUOUS FUNCTION, INTERLINEATION, DISCONTINUOUS SPLINE.

Нехай задана білінійна функція двох змінних $f(x,y)$ в області $D=[0,1]^2$ та задане деяке розбиття на елементи (прямокутники) $\Pi_{i,j}=[x_i,x_{i+1}]\times[y_j,y_{j+1}]$. Причому розташування ліній розриву функції $f(x,y)$ невідоме. В якості експериментальних даних будемо використовувати скінченну кількість інтерполяційних значень розривної функції $f(x,y)$ у кутах заданої прямокутної сітки

$$C_{i,j}^{++}=f(x_i+0,y_i+0)\,,\quad C_{i,j}^{-+}=f(x_i-0,y_j+0)\,,$$

$$C_{i,j}^{+-}=f(x_i+0,y_j-0)\,,\quad C_{i,j}^{--}=f(x_i-0,y_i-0)\,.$$

Треба побудувати та дослідити метод відновлення розривної білінійної функції $f(x,y)$ та виявити лінії ε - розриву.

Перенумеруємо задані значення матриці C так $C_{p,\ell}$, $p=\overline{1,n\cdot m}$, $\ell=\overline{1,4}$ розривної функції $f(x,y)$, де p – номер прямокутного елемента, що розглядається.

Визначення 1. Якщо $\left|f(x_q+0,y)-f(x_q-0,y)\right|<\varepsilon, \forall y$, то функцію $f(x,y)$ будемо називати ε-непрервною на лінії $x=x_q$, аналогічно, якщо $\left|f(x,y_s+0)-f(x,y_s-0)\right|<\varepsilon, \forall x$, то функцію $f(x,y)$ будемо називати ε-непрервною на лінії $y=y_s$.

Визначення 2. Якщо виконуються всі чотири нерівності з визначення 1 в точці (x_q,y_s)

$$\left|f(x_q+0,y_s+0)-f(x_q-0,y_s+0)\right|<\varepsilon,$$

$$\left|f(x_q+0,y_s+0)-f(x_q+0,y_s-0)\right|<\varepsilon,$$

$$\left|f(x_q-0,y_s+0)-f(x_q-0,y_s-0)\right|<\varepsilon,$$

$$\left|f(x_q-0,y_s-0)-f(x_q+0,y_s-0)\right|<\varepsilon,$$

то функцію $f(x,y)$ будемо називати ε-непрервною в точці (x_q,y_s).

Визначення 3. Якщо $f(x,y)$ є ε-непрервною $\forall(x,y)\in\Pi_{i,j}$, то будемо її називати ε-непрервною в усьому прямокутному елементі $\Pi_{i,j}$.

Теорема 1. Якщо $f(x,y)\in C^{-1}[0;1]^2$ має одну точку розриву першого роду $x^*=\frac{m}{2^k}, y^*=\frac{p}{2^k} m,k,p\in N,\ m<2^k,\ p<2^k$, то можна її виявити за небільше ніж k ітерацій.

Теорема 2. Якщо $f(x,y)\in C^{-1}[0;1]^2$ є кусково-лінійною функція і має одну точку розриву першого роду (x^*,y^*), то виявити її можна за $k=\lceil -\log_2 2\varepsilon \rceil$ ітерацій з похибкою ε. .

Приклад 1. Нехай розривна білінійна функція $f(x,y)$ має розрив першого роду в точці $(x^*, y^*) = (\pi, \pi - 3) \approx (3.14.15.92.65;\ 0.14159265)$. Складемо таблицю результатів виявлення точки ε-розриву (табл.1), тобто ε-інтервал, та номер ітерації в залежності від заданої похибки ε.

Таблиця 1. Кількість ітерацій для досягнення похибки ε.

Похибка ε	Номер ітерації, k	ε-інтервал
0,01	6	(0.140625; 0.15625)
0,001	9	(0.140625; 0.1425781)
0,0001	13	(0.14147949; 0.1416016)

Визначення 4. Базисним розривним білінійним сплайном на елементв $[0;1]^2$ будемо називати сплайн

$$B(x,y) = \begin{cases} h(x,y), & (x,y) \in [0;1]^2, \\ 0, & (x,y) \notin [0;1]^2 \end{cases},$$

де $h(x,y)$ – білінійний неперервний поліном.

Теорема 3. Довільну розривну білінійну функцію $f(x,y)$ зі скінченною кількістю розривів першого роду можна представити у вигляді суми базисних розривних сплайнів.

Дійсно, завжди, знайдуться такі $M, L \in N$ і параметри $C_{i,j}^{\pm\pm}$, що білінійну розривну функцію можна записати у вигляді

$$f(x,y) = \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{L} B(Mx - i; Ly - j; C_{i,j}^{\pm\pm}),\quad C_{i,j}^{\pm\pm} = f\left(\frac{i}{M} \pm 0, \frac{j}{L} \pm 0\right).$$

Література

1. Литвин О. М. Інтерлінація функцій та деякі її застосування / О. М. Литвин. – Харків: Основа, 2002. –544 с.

2. Литвин О. Н. Восстановление разрывных функций двух переменных, когда линии разрыва неизвестны (прямоугольные элементы) / О. Н. Литвин, Ю. И. Першина, И. В. Сергиенко // Кибернетика и системный анализ. – 2014. – №4.– С. 126–134.