

РОЗДІЛ 4. ОПТИМІЗАЦІЯ ЛІНІЙНОЇ ФУНКЦІЇ НА ПЕРЕСТАНОВКАХ

Багато екстремальних задач комбінаторної оптимізації, такі як планування роботи підприємства, розподіл ресурсів, задача управління, мережеве планування описуються моделями дискретної оптимізації. Із задач дискретного моделювання виділяються задачі комбінаторної оптимізації, які виникають в найрізноманітніших галузях людської діяльності [8, 11, 46–50, 52, 140, 145, 147–165, 238–240].

Задачі на комбінаторних конфігураціях цікаві тим, що область допустимих розв'язків є деяким комбінаторним многогранником, властивості якого вивчені і досліджені. Знання специфічних властивостей комбінаторного многогранника дає можливість використовувати їх для побудови нових і для вдосконалення існуючих методів розв'язання комбінаторних оптимізаційних задач.

При вивченні графів многогранників виникає велика кількість задач, що представляє інтерес не тільки для теорії графів, комбінаторики, топології, але і для теорії лінійного програмування. Використання властивостей графів комбінаторних многогранників можуть послужити підвищенню ефективності «традиційних» і розробці нових методів комбінаторної оптимізації. Комбінаторні моделі можуть бути застосовані для представлення оптимізаційних задач, що виникають при оптимальному розміщенні на графах. Комбінаторна теорія многогранників вивчає екстремальні властивості многогранників, розглядаючи множину його граней всіх розмірностей як деякий комплекс. Але при розв'язанні таких задач виникають проблеми, пов'язані з складністю математичних моделей, великим об'ємом інформації і т. д., оскільки більшість задач на комбінаторних множинах є *NP*-повними. Більшість задач на графах стосується визначення компонент зв'язності, пошуку маршрутів, відстаней і т. п. Проте при розв'язанні прикладних задач відповідні їм графи досить великі, а аналіз можливий лише із залученням сучасної обчислювальної техніки. Отже, метою даного розділу є опис і реалізація нового підходу для розв'язування екстремальних задач з лінійною функцією на комбінаторних конфігураціях з застосуванням теорії графів та много-

гранників. Зокрема, в розділі досліджується комбінаторна задача на різних комбінаторних конфігураціях перестановок, сполучень, розміщень, що представлені в [88, 90–93, 96–100, 239, 242–245]. На підставі встановленого взаємозв'язку між задачами на комбінаторних конфігураціях і їх графами вивчаються деякі структурні властивості допустимої області, а також сформульовано ряд тверджень, що дають можливість застосувати для побудови методів розв'язання екстремальних задач з використанням графів. Зокрема, в роботі [58] описаний спосіб побудови гамільтонового шляху усередині гіперграней. У статті [61] ставиться задача про побудову гамільтонового шляху між гіпергранями, тобто, як добудувати гамільтонів шлях, помістивши між двома підграфами третій підграф, якщо гамільтонів шлях усередині двох перших підграфів побудовано.

4.1. Загальна математична постановка задачі на комбінаторних конфігураціях

Загальна задача комбінаторної оптимізації полягає у відшуванні екстремуму довільної цільової функції на довільних комбінаторних конфігураціях. Як правило, при розв'язанні класу таких задач досліджується можливість їх лінеаризації, тобто побудови опуклої оболонки допустимих розв'язків задачі. Перехід від параметричної форми задання опуклого многогранника до аналітичної має велике значення для задач дискретної оптимізації, оскільки дозволяє сформулювати їх в термінах лінійного програмування. Але застосування методів лінійного програмування не завжди відповідає характеру екстремальних задач. Застосування теорії графів до розв'язання таких задач дає в багатьох випадках можливість отримати розв'язок з меншими витратами комп'ютерних ресурсів. Підзадачею вище сформульованої задачі може бути визначення гамільтонового шляху, який визначає зміну значення цільової функції на множині комбінаторних конфігурацій. Многогранник гамільтонових циклів графа є гранню многогранника гамільтонових циклів повного графа. Отже, розглянемо побудову послідовності значень лінійної цільової функції на графі перестановок. При цьому не обов'язково будувати повний граф, достатньо знайти таку

часткову упорядкованість, яка дозволить виділити такі спадаючі (або зростаючі) за значеннями функції шляхи, які приведуть нас до екстремуму функції. Це зобов'язує більш детально вивчати цільову функцію та враховувати властивості і структуру послідовності перестановок, на якій розглядається задача.

Розглянемо екстремальну задачу комбінаторної оптимізації вигляду:

$$Z(\Phi, P(A)) : \max\{\Phi(a) / a \in P(A)\},$$

яка полягає в максимізації функції $\Phi(a)$ на множині перестановок $P(A)$, де $\Phi(a) = \sum_{j=1}^n c_j x_j$. Відомо, що можна сформулювати екстремальну задачу $Z(F, X)$ максимізації критерію $F(x)$ на множині X , причому кожній точці $a \in P_{nk}(A)$ відповідатиме точка $x \in X$, така, що $F(x) = \Phi(a)$.

$$Z(F, X) : \max\{F(x) / x \in X\}, \quad (4.1)$$

де $F(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j$, X – не порожня множина в R^n , яка визначається таким чином $X = \text{vert } \Pi(A)$, $\Pi = \text{conv } P(A)$.

Слід зазначити, що іноді є доцільним розв'язувати задачу вигляду:

$$x^* = \arg \max_{x \in \Pi(A)} F(x),$$

для значення функції $y^* = F(x^*)$. Так само має сенс розглядати різновид вище зазначеної задачі, де значення цільової функції знаходиться в інтервалі

$$F(\bar{x}) \leq F(x) \leq F(\bar{\bar{x}}). \quad (4.1)'$$

Тоді задача прийме вигляд: визначити

$$\bar{x} = \arg \max_{x \in \Pi(A)} F(x) \text{ при } \bar{y} = F(\bar{x}),$$

$$\bar{\bar{x}} = \arg \max_{x \in \Pi(A)} F(x) \text{ при } \bar{\bar{y}} = F(\bar{\bar{x}}) \quad (4.2)$$

при умові $|\bar{x} - \bar{\bar{x}}| \rightarrow \min$.

Розглядаємо перестановку як впорядковану вибірку елементів $a = (a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n})$, де $a_{i_j} \in A \forall i_j \in N_n, \forall j \in N_n, i_s \neq i_t$, якщо $s \neq t \forall s \in N_n, \forall t \in N_n$ з деякої мультимножини $A = \{a_1, a_2, \dots, a_q\}$, яке характеризується основою $S(A) = \{e_1, e_2, \dots, e_k\}$, де $e_j \in R^1, \forall j \in N_k$ і кратністю елементів $k(e_j) = r_j, j \in N_k, r_1 + r_2 + \dots + r_k = q$ згідно [98, 242, 245].

Множина перестановок з повтореннями з n дійсних чисел, серед яких k різних, називається загальною множиною перестановок і позначається $P_{nk}(A)$. Це множина впорядкованих n -вибірок з мультимножини A при умові $n = q > k$.

При $n = k = q$ маємо множину перестановок без повторень. Позначимо її P_n . Очевидно, що $P_n(A) = P_{nn}(A)$. У тих випадках, коли не указується вигляд множині перестановок, записуватимемо ці множини, як $P(A)$. Відомо [87, 98], що опуклою оболонкою множини перестановок є переставний многогранник $\Pi(A) = \text{conv } P(A)$, множина вершин якого рівна множині $P(A)$ перестановок: $\text{vert } \Pi(A) = P(A)$.

Не втрачаючи загальності, упорядкуємо елементи мультимножини A по неспаданню:

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n, \quad (4.3)$$

і елементи його основи – по зростанню: $e_1 < e_2 < \dots < e_k$. Тоді опуклою оболонкою загальної множини перестановок $P(A)$ є загальний переставний многогранник $\Pi(A) = \text{conv } P(A)$, який описується відомою системою лінійних нерівностей:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n x_j \leq \sum_{j=1}^n a_j, \\ \sum_{j=1}^i x_{\alpha_j} \geq \sum_{j=1}^i a_j, \end{cases} \quad (4.4)$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^i x_{\alpha_j} \geq \sum_{j=1}^i a_j, \end{cases} \quad (4.5)$$

$\alpha_j \in N_n, \alpha_j \neq \alpha_i, \forall j \neq i, \forall j, t \in N_i, \forall i \in N_n$, а $P(A) = \text{vert } \Pi(A)$.

Розглянемо підхід до розв'язання задач, що ґрунтується на впорядковуванні значень цільової лінійної функції $F(x)$ і побудові гамільтонового шляху для точок, в яких ці значення досягаються, а потім в застосуванні методу дихотомії до визначеного гамільтонового шляху. Далі під задачею $Z(\Phi, P(A))$ розуміємо задачу $Z(F, X)$.

Для побудови методу, перш за все, на початковому етапі необхідно визначити початкову точку. Розглянемо факт у вигляді твердження.

Твердження 4.1. Якщо для елементів мультимножини A і коефіцієнтів цільової функції задачі

$$\text{extr} \left\{ f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \mid x \in \text{vert } \Pi(A) \right\} \quad (4.6)$$

виконуються відповідно умови (4.3) і

$$c_{i_1} \leq c_{i_2} \leq \dots \leq c_{i_n}, \quad (4.7)$$

$i_n \in N_n$, то максимум функції $f(x)$ на допустимій множині досягається в точці $x^* = (x_{i_1}^*, \dots, x_{i_n}^*) \in \text{vert } \Pi(A)$, яка задається таким чином:

$$x_{i_j}^* = a_j \quad \forall j \in N_n,$$

а мінімум відповідно в точці $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, де

$$y_{i_{j+1}} = a_{n-j} \quad \forall j \in N_{n-1} \cup \{0\}.$$

Слід зазначити, що загальне число q лінійних нерівностей, що входять в систему (4.4), (4.5), що описує переставний

многогранник $P(A)$ рівно $\sum_{i=0}^n C_n^i = 2^n$, а це задача великої розмірності і є дуже складною при розв'язанні традиційними методами лінійного програмування. Тому є необхідність в розробці нових методів, які базуються на властивостях множини допустимих розв'язків і цільових функцій.

Для даної задачі (4.6) область допустимих розв'язків визначає переставний многогранник, вершини якого є точками загальної множини перестановок.

Як відомо з попереднього розділу, множину перестановок можна представити у вигляді графа перестановок $G(P_n)$, який є об'єднанням підграфів.

Тоді можна стверджувати, що вершини переставного многогранника, які є точками загальної множини перестановок $P(A)$, розміщені у вершинах графа перестановок $G(P_n)$.

Граф перестановок має ряд цікавих властивостей, тому використання властивостей графа множини перестановок дають можливість при реалізації методу для розв'язання екстремальної задачі $Z(F, X)$ мінімізувати витрати часу на перевірку належності знайденої точки комбінаторним обмеженням многогранника і зменшити кількість обмежень в початковій системі.

4.2. Метод упорядкування значень лінійної функції на перестановках

Як було визначено вище, розглядається задача, в якій необхідно визначити точку – вершину переставного многогранника $P(A)$ за відомим значенням цільової функції. Для цього спочатку достатньо знайти значення цільової функції в кожній точці, побудувати для цих значень шлях (орієнтований ланцюг), який відображає монотонність цільової функції, переходи від точки до точки, і з'ясувати залежність між ними.

Для генерації всіх $n!$ перестановок n – елементної множини існує багато методів, огляд яких зроблено в другому розділі. Використовуючи описані деякі методи генерування комбінатор-

них множин, генеруємо послідовність перестановок і формуємо графічні структури.

Послідовності перестановок $P(A)$, визначаємо як вершини графа $G(P_n)$, що відповідають всім точкам множини перестановок. Для такого графа дві вершини будемо визнавати суміжними, якщо коди відповідних перестановок відрізняються однією транспозицією двох елементів. З'єднуючи відповідні вершини по ходу генерації перестановок, одержуємо спочатку неорієнтований граф. Немає необхідності (як можна впевнитися далі) з'єднувати всі суміжні вершини, а тільки ті, що генеруються в даний момент і будь-який гамільтонів ланцюг відповідає деякому варіанту генерування всіх перестановок. Якщо в кожній вершині графа знайти відповідне значення заданої цільової функції $F(x)$, то відносно значень функції можна побудувати орієнтований граф, зорієнтувавши його ребра у напрямі від більшого значення функції у суміжних вершинах до меншого. Досить актуальною для розробки нових методів розв'язування задачі є питання побудови гамільтонового шляху, уздовж якого всі значення функції строго впорядковані за спаданням (збільшенням). Очевидно, що кінцеві точки гамільтонового шляху визначають екстремальні точки (перестановки). Тоді є важливим наступний факт, який можна сформулювати у вигляді леми.

Лема 4.1. Якщо з перестановки $p_1 = (i_1, i_2, \dots, i_n) \in P(A)$ одержана перестановка $p_2 \in P(A)$ транспозицією двох чисел $i_k < i_l$, де $k < l$, то $F(p_1) \geq F(p_2)$.

Розглянемо лінійну функцію

$$F(x, c) = (c, x) = \sum_{i=1}^n c_i x_i. \quad (4.8)$$

Тут $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ множина довільних чисел, що визначають коефіцієнти цільової функції, а $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ – перестановка чисел $(1, 2, \dots, n)$. Розглянемо u -перестановку з симетричної групи перестановок S_n . Нехай

$$F(x, c, u) = \sum_{i=1}^n c_i x_{u(i)}. \quad (4.9)$$

Основна проблема комбінаторної оптимізації полягає в тому, щоб знайти таку перестановку u_0 , що $F(x, c, u_0) \leq F(x, c, u)$ для довільного $u \in H$, де H – довільна не порожня підмножина симетричної групи S_n . Якщо $t \in S_n$, то позначимо

$$c^t = (c_{t(1)}, c_{t(2)}, \dots, c_{t(n)}), \quad x^t = (x_{t(1)}, x_{t(2)}, \dots, x_{t(n)}).$$

Тоді $F(x, c) = F(c^t, x^t) = (c, x) = (c^t, x^t)$. Аналогічно

$$F(x, c, u) = F(x^t, c^t, u^t),$$

де $u^t = t^{-1}ut$ для всякого u з S_n . Отже, при розв'язанні основної проблеми завжди можна замінити пару (x, c) на пару (x^t, c^t) .

Зокрема, завжди можна вважати:

$$c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_n, \quad (a)$$

або

$$c_1 \geq c_2 \geq \dots \geq c_n. \quad (б)$$

Якщо $H = S_n$, то проблема розв'язана [57]. Доведено, що якщо має місце (а), то максимум функції $F(x, c, u)$ досягається для перестановки $u_0 = (1, 2, \dots, n)$, а мінімум – для перестановки $u^* = (n, n-1, \dots, 2, 1)$. У подальших дослідженнях передбачається, що для коефіцієнтів c_i ($1 \leq i \leq n$) завжди має місце (а). Розглянемо тепер детально структуру відповідних графів для невеликих значень n . Для $n = 3$ граф зображений на рис. 4.1, де дуга, що виходить з перестановки p_3 і заходить в перестановку p_j рівносильна співвідношенню $F(x, c, p_1) \geq F(x, c, p_2)$.

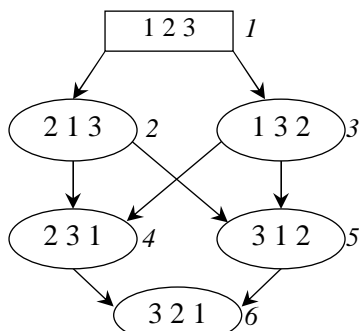


Рис. 4.1. Структура значень $F(x)$ для $n = 3$

Зазначимо, що на рис. 4.1. дуги відображають зміну значень цільової функції, а вершини графа побудовано згідно рекурсивного методу, що описаний в другому розділі. Доведемо, що граф однозначно відображає впорядкування значень функцій. Для цього достатньо зробити безпосереднє обчислення перестановок.

Наприклад:
$$\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}$$
. Різниця відповідає різниці значень

функції $c_2 - c_3 \leq 0$, що відповідає дійсності. На цьому графі немає з'єднань між перестановками $(1\ 3\ 2)$ і $(2\ 1\ 3)$, а так само між $(2\ 3\ 1)$ і $(3\ 1\ 2)$. Цим парам відповідає різниця $(1 - 2\ 1)$, що рівносильна $c_1 - 2c_2 + c_3$, значення якої не може бути визначено однозначно.

Розглянемо тепер граф для $n = 4$, що вже побудовано.

Приклад 4.1. Нехай, дана множина $A = \{1, 2, 3, 4\}$, за допомогою якої утворюється множина перестановок $P(A)$. Визначена функція $F(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4$, коефіцієнти якої впорядковані таким чином $c_1 \leq c_2 \leq c_3 \leq c_4$ і приймають значення $\{1, 2, 3, 4\}$. Зазначимо, що якщо коефіцієнти цільової функції є невпорядковані, то згідно з визначенням 1.1. нормалізуємо функцію $F(x) = \sum_{i=1}^n c_i x_i$, за допомогою відображення перестановки $\varphi: N \rightarrow C$, що встановлює впорядкування коефіцієнтів

c_1, c_2, \dots, c_n цільової функції по зростанню. Тоді функція є нормалізованою і відповідає умові задачі. Нехай задано значення $y^* = F(x^*)$ функції в деякій точці.

Необхідно знайти $x^* = \arg \text{extr} F(x)$, де $x^* \in P(A)$.

Розв'язання. Представимо розкладання графа переставного многогранника $\Pi(A)$ на підграфи, в яких виділено зафіксований елемент для функції, згідно рекурсивного методу, описаного в другому розділі. Згідно умови впорядкування коефіцієнтів, у прямокутній вершині підграфа досягається максимальне значення цільової функції. Зафіксуємо ті перестановки, для яких $x_4 = 3$. Оскільки при обчисленні різниці кодів на четвертій позиції завжди буде 0, то очевидно, що цей підграф буде точною копією графа, зображеного на рис. 4.1. Підграф при $x_4 = 4$ представлений на рис. 4.2а якщо об'єднати перестановки, в яких на четвертому місці стоїть цифра 3, то одержимо підграф, представлений на рис. 4.2б. Аналогічно будуть представлені графи перестановок, де на останньому місці елементів зафіксовані цифри 2 і 1 відповідно.

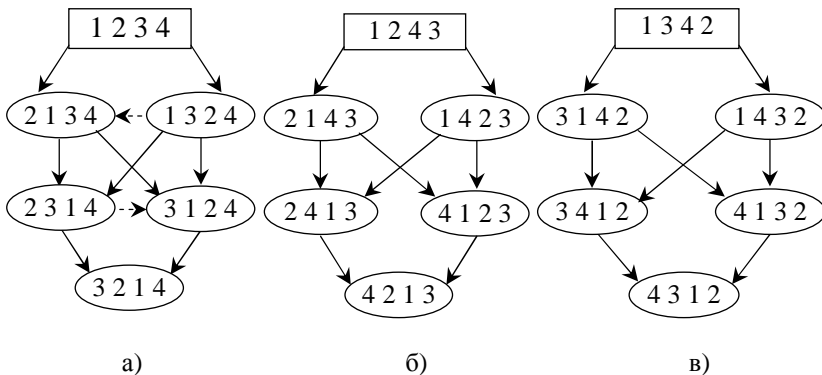


Рис. 4.2. Розкладання графа перестановок на підграфи

На рис. 4.2. стрілки указують перехід від точки до точки за спаданням значень цільових функцій, згідно теореми. Слід зазначити, що практично всі зв'язки визначені, але між сусідніми елементами всередині як і на рис. 4.2, зв'язок необхідно дослідити.

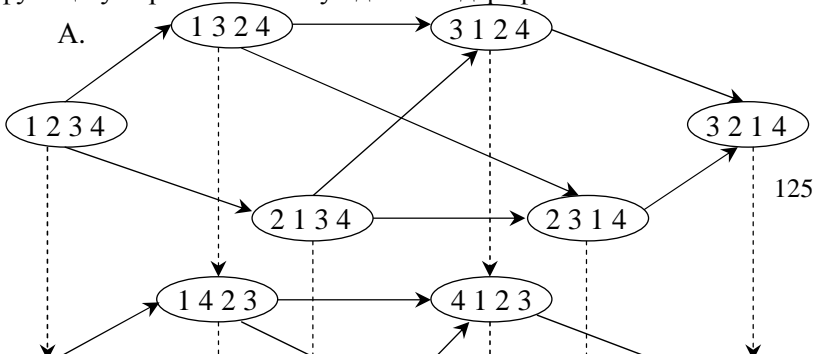
дити і вивчити, тоді можна буде представити повний гамільтонів шлях на графі переставного многогранника.

Позначимо перший підграф – A , що зображено на рис. 4.2а, то, можна зобразити всі підграфи, які одержані з A за допомогою однієї транспозиції. Слід зазначити, що у всіх графах однозначно визначається максимальне і мінімальне значення функції. І взагалі, всі графи є копією графа A , так що їх можна в тому ж порядку помістити один під одним, об'єднавши в загальний граф послідовності перестановок і вказавши зміну значень заданої цільової функції в даних перестановках в порядку спадання. Неважко помітити, що граф B отримаємо з графа A , якщо в останньому у всіх перестановках зробити транспозицію чисел 4 і 4. Аналогічно граф C отримаємо з графа B , якщо в останньому зробити транспозицію $(3, 2)$, а граф D з графа C після транспозиції чисел $(2, 1)$. Звідси випливає, що значення функції тим більше, чим вище знаходиться відповідний підграф. Це можна представити схематично так

$$F(x)_{[A]} \geq F(x)_{[B]} \geq F(x)_{[C]} \geq F(x)_{[D]}. \quad (4.10)$$

Об'єднання всіх підграфів дає загальний орієнтований граф $G(P_n) = A \cup B \cup C \cup D$. На рис. 4.3 представлений граф для $n=4$, який є об'єднанням підграфів. Причому підграфи є ізоморфними, а отже еквівалентними, оскільки ізоморфізм графів є відношення еквівалентності.

Аналізуючи рис. 4.1, 4.2, 4.3, приходимо до висновку, що в кожному підграфі A, B, C, D залишаються по дві незрівнянні вершини. Для знаходження гамільтонового шляху із спадаючими значеннями функції необхідно порівняти значення функції в цих вершинах, крім того ще потрібно порівняти значення функції у вершинах між сусідніми підграфами.



B.

C.

D.

Рис. 4.3. Граф послідовності перестановок

На підставі вище висловлених міркувань і рис. 4.1, 4.2, 4.3 можна зробити висновок, що точки множини перестановок $P(A)$ можна розкласти за підграфами, або паралельними гіперплощинами у порядку спадання значень лінійної цільової функції $F(x)$ у цих точках.

Розкладання точок комбінаторної множини перестановок $P(A)$ при $n \geq 4$ забезпечує ієрархічне розташування цих точок по гіперплощинах A, B, C, D , (рис. 4.2) згідно значень цільової функції $y^* = F(x^*)$.

Введемо наступні позначення $\Delta_1 = c_2 - c_1$; $\Delta_2 = c_3 - c_2$; $\Delta_3 = c_4 - c_3$, для подальшого розгляду властивостей графа рис. 4.4. Між ними можуть бути різні співвідношення залежно від їх конкретних значень. Для вище введених позначень встановимо можливі співвідношення:

1) $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3$; це коли всі різниці однакові. Якщо вони різні, то в залежності від величин можливі шість співвідношень

$$\begin{aligned} 1\ 2\ 3 \rightarrow 2) \Delta_1 > \Delta_2 > \Delta_3; \quad 1\ 2\ 3 \rightarrow 3) \Delta_1 > \Delta_3 > \Delta_2; \\ 2\ 1\ 3 \rightarrow 4) \Delta_2 > \Delta_1 > \Delta_3; \quad 2\ 3\ 1 \rightarrow 5) \Delta_2 > \Delta_3 > \Delta_1; \\ 3\ 1\ 2 \rightarrow 6) \Delta_3 > \Delta_1 > \Delta_2; \quad 3\ 2\ 1 \rightarrow 7) \Delta_3 > \Delta_2 > \Delta_1. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Можна розглянути ще і окремі випадки:

$$\begin{aligned} 1) \Delta_1 = \Delta_2 > \Delta_3; \quad 2) \Delta_1 = \Delta_2 < \Delta_3; \quad 3) \Delta_1 = \Delta_3 > \Delta_2; \\ 4) \Delta_1 = \Delta_3 < \Delta_2; \quad 5) \Delta_2 = \Delta_3 > \Delta_1; \quad 6) \Delta_2 = \Delta_3 < \Delta_1. \end{aligned}$$

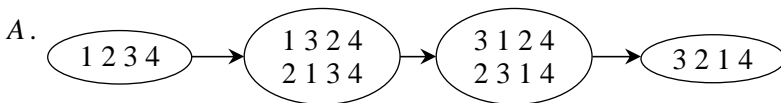
Для побудови гамільтонового шляху необхідно встановити співвідношення на кожному з підграфів A, B, C, D , (рис. 4.2) між парами точок (3;2), (5;4) (точки пронумеровані на рис. 4.4).

По кожному з цих випадків необхідно обчислити схему на підграфах A, B, C, D , потім скласти загальне співвідношення і вказати гамільтонів шлях по всьому переставному многограннику $\Pi(A)$. Як приклад розглянемо перший випадок, коли $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3$.

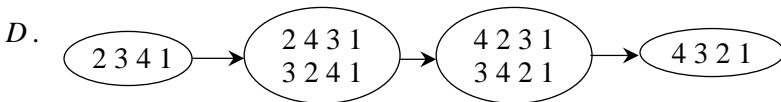
Верхній підграф A одержує дві пари вершин (3;2), (5;4), де значення функції співпадає і між якими необхідно встановити зв'язок. Тому обчислимо співвідношення:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & +2 & -1 & \end{array} = \Delta_1 - \Delta_2 = 0, \quad \begin{array}{cccc} 3 & 1 & 2 & 4 \\ -2 & 3 & 1 & 4 \\ +1 & -2 & +1 & \end{array} = -\Delta_1 + \Delta_2 = 0.$$

Тоді, можна зобразити наступну схему для гіперплощини A :



Аналогічна ситуація в підграфі D :

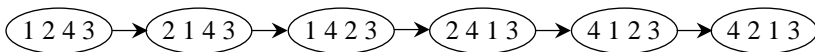


Якщо розглянути підграф B (рис. 4.2), то одержуємо співвідношення для таких пар вершин

$$\begin{array}{cccc} 1 & 4 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 4 & 3 \\ \hline -1 & +3 & -2 & \end{array} = \Delta_1 - 2\Delta_2 = -\Delta_2 < 0$$

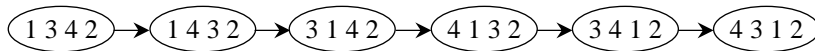
$$\begin{array}{cccc} & 4 & 1 & 2 & 3 \\ - & 2 & 4 & 1 & 3 \\ \hline +2 & -3 & +1 & \end{array} = -2\Delta_1 + \Delta_2 < 0$$

На підграфі B виникають співвідношення $\Delta_1 - 2\Delta_2$ і $-2\Delta_1 + \Delta_2$. Тому гамільтонів шлях на B має вигляд:
B.



На підграфі C аналогічна ситуація: $1 4 3 2 > 3 1 4 2$ і $4 1 3 2 > 3 4 1 2$, тому маємо:

C.



Введемо в розгляд поняття α_i -питань, що необхідно дослідити для взаємовідношення між внутрішніми точками підграфів, що розглядаються на рис. 4.2.

При розв'язанні α_i -питань, також слід зазначити, що простежується залежність між точками, які знаходяться на різних гіперплощинах.

Відзначимо, що на гіперплощинах A і B є точки, для яких виконується наступне співвідношення:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 4 & 3 \\ \hline +1 & -2 & +1 & \end{array} = -\Delta_3 + \Delta_4 = 0 \text{ тобто їх значення рівні.}$$

Аналогічно, значення в точці $(3\ 1\ 2\ 4)$ на гіперплощині A дорівнює значенню в точці $(1\ 4\ 2\ 3)$ на гіперплощині B , оскільки

$$\begin{array}{cccc} 3 & 1 & 2 & 4 \\ -1 & 4 & 2 & 3 \\ \hline +2 & -3 & 0 & 1 \end{array} = -2\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 = 0, \text{ а значення в точці}$$

$(3\ 2\ 1\ 4)$ з гіперплощини A більше, ніж значення в точці $2\ 4\ 1\ 3$ з гіперплощини B , оскільки виконується умова:

$$\begin{array}{cccc} 3 & 2 & 1 & 4 \\ -2 & 4 & 1 & 3 \\ \hline +1 & -2 & 0 & 1 \end{array} = -\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 > 0.$$

Розрахуємо значення цільової функції в точках:

$$F(x_1) = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 = 30$$

$$F(x_7) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 4 = 27$$

$$F(x_2) = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 4 = 29$$

$$F(x_8) = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 = 27$$

$$F(x_3) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 = 29$$

$$F(x_9) = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 4 = 26$$

$$F(x_4) = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 3 = 29$$

$$F(x_{10}) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 3 = 25$$

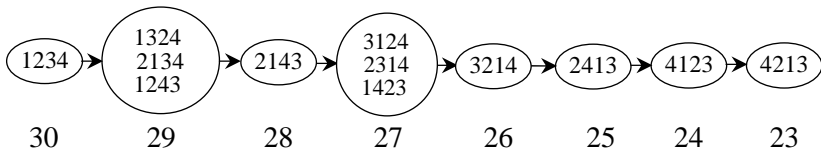
$$F(x_5) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 3 = 28$$

$$F(x_{11}) = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 = 24$$

$$F(x_6) = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 4 = 27$$

$$F(x_{12}) = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 3 = 23$$

В результаті вище висловлених міркувань, точки на підграфах A і B можна розташувати в наступний ланцюжок в залежності від значень цільової функції:



Розглянемо точки на підграфі C , зокрема $(3\ 1\ 4\ 2)$, $(1\ 4\ 3\ 2)$,

$$\begin{array}{cccc} 3 & 1 & 4 & 2 \end{array}$$

оскільки $\frac{-1 \quad 4 \quad 3 \quad 2}{+2 \quad -3 \quad 1} = -2\Delta_1 + \Delta_2 = -\Delta_1 < 0$, то значення в

$(3\ 1\ 4\ 2)$ більше значення в точці $(1\ 4\ 3\ 2)$.

Аналогічно із значеннями в точках $(4\ 1\ 3\ 2)$ і $(3\ 4\ 1\ 2)$,

$$\begin{array}{cccc} 4 & 1 & 3 & 2 \end{array}$$

оскільки $\frac{-3 \quad 4 \quad 1 \quad 2}{+1 \quad -3 \quad +2} = -\Delta_1 + 2\Delta_2 = \Delta_2 > 0$.

Виникає співвідношення $-\Delta_1 + 2\Delta_2$, яке необхідно вирішити. Якщо розглядати відношення точок з різних гіперплощин, то

значення в точці $(1\ 3\ 4\ 2)$ з B дорівнює значенню в точці $(1\ 4\ 2\ 3)$ з B , оскільки

$$\frac{\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 4 & 2 \\ -1 & 4 & 2 & 3 \\ \hline & -1 & 2 & -1 \end{array}}{=} \Delta_2 - \Delta_3 = 0.$$

Аналогічна ситуація з точками $(3\ 2\ 1\ 4)$ з A і $(1\ 4\ 3\ 2)$ з B , оскільки значення співвідношення дорівнює

$$\frac{\begin{array}{cccc} 3 & 2 & 1 & 4 \\ -1 & 4 & 3 & 2 \\ \hline +2 & -2 & -2 & +2 \end{array}}{=} -2\Delta_1 + 2\Delta_2 = 0.$$

Ще розглянемо точки $(2\ 4\ 1\ 3)$ з B і $(1\ 4\ 3\ 2)$ з C і їх співвідношення:

$$\frac{\begin{array}{cccc} 2 & 4 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & 3 & 2 \\ \hline +1 & -2 & +1 & \end{array}}{=} -\Delta_1 + \Delta_3 = 0,$$

а також точки $(2\ 4\ 1\ 3)$ з B і $(3\ 1\ 4\ 2)$ з C , їх значення рівні,

$$\text{оскільки } \frac{\begin{array}{cccc} 2 & 4 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & 4 & 2 \\ \hline -1 & +3 & -3 & 1 \end{array}}{=} \Delta_1 - 2\Delta_2 + \Delta_3 = 0.$$

Маємо також рівність значень в точках $(4\ 2\ 1\ 3)$ з B і $(4\ 1\ 3\ 2)$ з C , оскільки

$$\frac{\begin{array}{cccc} 4 & 2 & 1 & 3 \\ -4 & 1 & 3 & 2 \\ \hline +1 & -2 & +1 & \end{array}}{=} -\Delta_2 + \Delta_3 = 0.$$

Розглядаючи гіперплощину D , знаходимо наступні співвідношення між точками $(2\ 3\ 4\ 1)$ з D дорівнює значенню

$$(4\ 1\ 2\ 3) \text{ з } B, \text{ оскільки } \frac{\begin{matrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ -4 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & +2 & +2 & -2 \end{matrix}}{=} = -\Delta_1 + \Delta_3 = 0.$$

Аналогічна ситуація з точками $(4\ 1\ 3\ 2)$ з C і $(3\ 2\ 4\ 1)$ з D ,

$$\text{оскільки } \frac{\begin{matrix} 4 & 1 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 4 & 1 \\ +1 & -1 & -1 & +1 \end{matrix}}{=} = -\Delta_1 + \Delta_3 = 0, \text{ а також з точками}$$

$$(4\ 3\ 1\ 2) \text{ з } C \text{ і } (3\ 4\ 2\ 1) \text{ з } D, \text{ оскільки}$$

$$\frac{\begin{matrix} 4 & 3 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & 2 & 1 \\ +1 & -1 & -1 & +1 \end{matrix}}{=} = -\Delta_1 + \Delta_3 = 0.$$

В результаті розрахунків одержимо гамільтонів шлях графа перестановочного многогранника і впорядкування всіх значень лінійної функції $F(x)$ у порядку їх спадання для точок підграфів A, B, C, D :

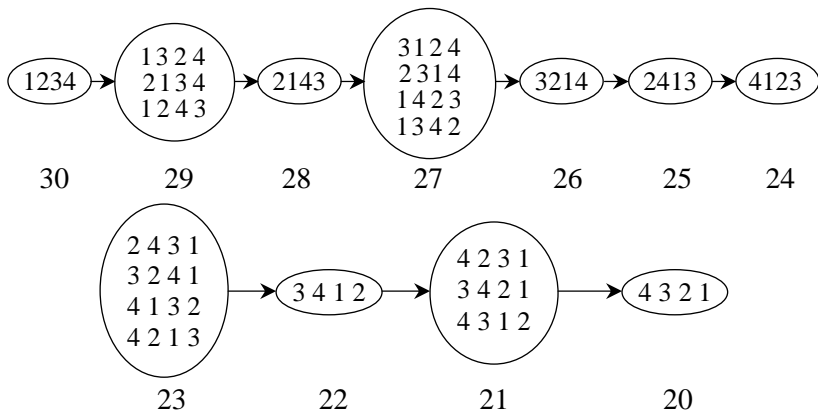


Рис. 4.4. Гамільтонів шлях після знаходження всіх співвідношень лінійної цільової функції $F(x)$

Аналогічно розраховуються і інші варіанти з (10–11).

В процесі визначення гамільтонового шляху виникають три питання, які назвемо α -питаннями. В процесі попередніх обчислень вони вже зустрічалися: $\alpha_1 = \Delta_1 - \Delta_2$ (>0 або <0), $\alpha_2 = \Delta_1 - 2\Delta_2$ (>0 або <0), $\alpha_3 = 2\Delta_1 - \Delta_2$ (>0 або <0). Питання мають деяку залежність, яку можна позначити співвідношеннями:

$$1) \text{ Якщо } \alpha_1 > 0 \rightarrow \alpha_3 > 0 \quad \alpha_2 = ?$$

$$2) \text{ Якщо } \alpha_1 > 0 \rightarrow \alpha_2 < 0 \quad \alpha_3 = ?$$

$$3) \text{ Якщо } \alpha_1 = 0 \rightarrow \alpha_2 < 0 \rightarrow \alpha_3 > 0$$

В даному випадку $\alpha_1 > 0$; $\alpha_3 > 0$; $\alpha_2 = ?$ – невизначений.

Загальна схема на рис. 4.4 перетвориться в схему на рис. 4.5, на якій, якщо $\alpha_i > 0$, то напрями стрілки зберігається.

Тут додані ще шість стрілок, які позначені як β -питання. Ці питання виникають при порівнянні вершин, що належать різним сусіднім підграфам. В даному випадку необхідно з'ясувати тільки одне співвідношення: $\sigma\beta = -\Delta_1 + 2\Delta_2 + \Delta_3$, точні його знак (>0 або <0). При інших розв'язаннях α -питань можуть з'явитися додаткові β -питання.

Для побудови гамільтонового шляху існуючих дуг недостатньо. Необхідно ще порівняти вершини в сусідніх стовпцях, наприклад, пари 2314 і 3142, 2413 і 3241. Питання такого типу називатимемо γ -питаннями.

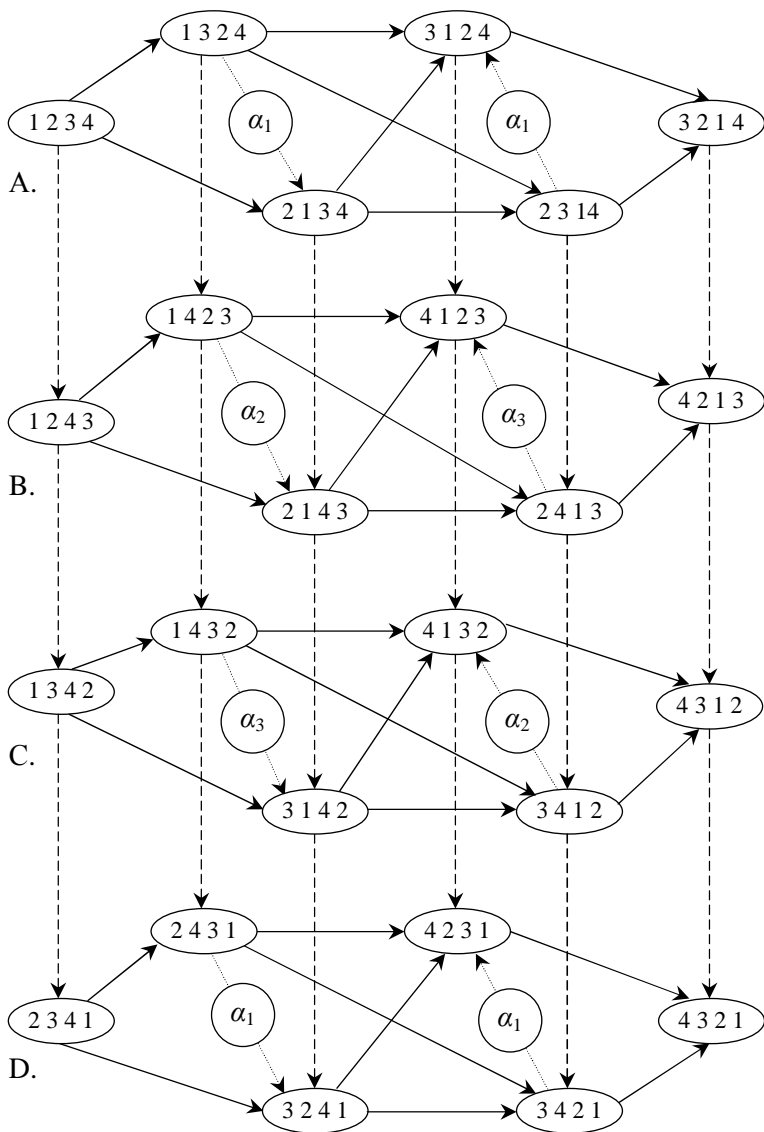


Рис. 4.5. Гамільтонів шлях і α -питання

Якщо $\alpha_2 > 0$, то загальний граф набуває вигляд рис. 4.6.

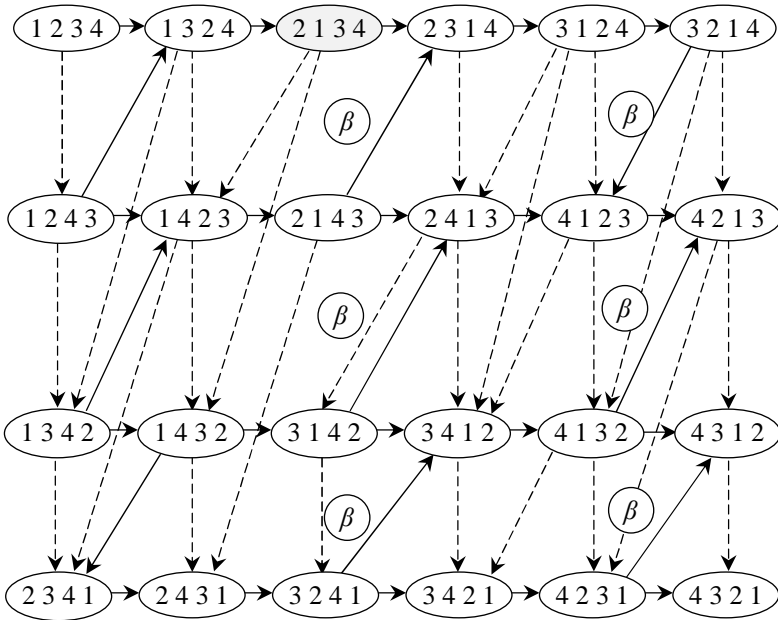


Рис. 4.6. Загальний граф з позначеними β -питаннями

Вище було розглянуто приклад для випадку $n = 4$, але результати можна узагальнити для $n = 5$, а також для довільного значення n . Так в множині перестановок $P(A)$ розглядається $5! = 120$ точок, які розташовані на 5 гіперплощинах вигляду A (рис. 4.2) і містять по 24 точки кожна. Схематично це можна зобразити на рис. 4.7.

Відповідно, необхідно розгляди α -питань усередині кожного підграфа A, B, C, D, E , які мають вигляд рис. 4.2.

Для довільної n розмірності матимемо ту ж ситуацію, що і у попередньому випадку, тобто переставний многогранник завжди міститиме підграфи вигляду A , тому буде необхідність розглядати α і β -питання.

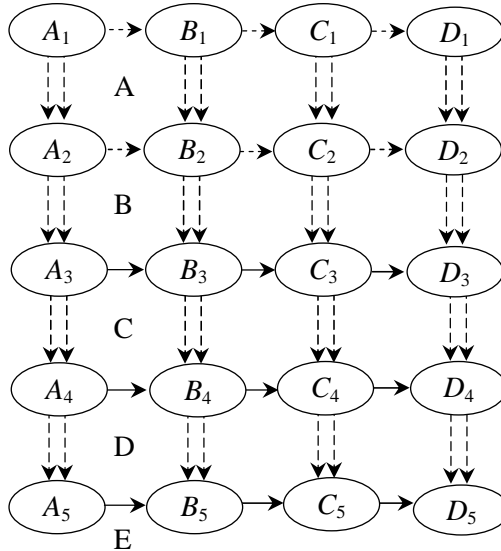


Рис. 4.7. Схематичний граф для $n = 5$

Розглянемо приклад, в якому елементи мультимножини повторюються.

Приклад 4.2. Нехай, дана множина $A = \{1, 2, 2, 4\}$, за допомогою якої утворюється множина перестановок з повтореннями $P_{nk}(A)$, де n – загальна кількість елементів $P_{nk}(A)$, k – різних.

Визначена функція $F(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4$, коефіцієнти якої впорядковані таким чином $c_1 \leq c_2 \leq c_3 \leq c_4$ і приймають значення $\{1, 2, 3, 4\}$, а $y^* = F(x^*)$ – значення функції в деякій точці. Необхідно знайти

$$x^* = \arg \text{extr} F(x), \text{ де } x^* \in P(A).$$

Розв’язання. Представимо розкладання графа переставного многогранника $\Pi(A)$ за гіперплощинами. Слід зазначити, що кількість повторень в загальній множині перестановок $P_{nk}(A)$ приводить до «склеювання» гіперплощин, на яких розміщені точки. Визначимо значення цільової функції в кожній вершині

многогранника і побудуємо гамільтонів шлях, а також дослідимо взаємозв'язки між гіперплощинами. Тут a_i – відповідні перестановки на рис. 4.4.

$$F(a_1) = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 4 = 27$$

$$F(a_7) = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 = 19$$

$$F(a_2) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 4 = 26$$

$$F(a_8) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 4 = 25$$

$$F(a_3) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 4 = 25$$

$$F(a_9) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 = 21$$

$$F(a_4) = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 2 = 25$$

$$F(a_{10}) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 1 = 22$$

$$F(a_5) = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 2 = 23$$

$$F(a_{11}) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 20$$

$$F(a_6) = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 2 = 20$$

$$F(a_{12}) = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 18$$

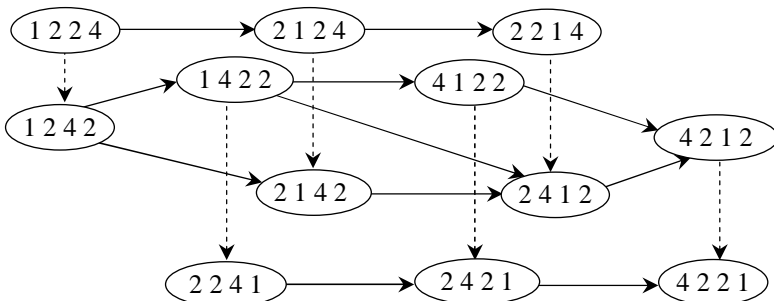


Рис. 4.8. Розкладання точок множини перестановок з повтореннями за значеннями цільової функції

Складемо схему, яка буде відображати розташування точок множини перестановок з повтореннями $P_{nk}(A)$ за значеннями цільової функції на гіперплощинах A, B, C , що дасть можливість зобразити гамільтонів шлях для точок всього переставного многогранника $M(A)$. В результаті розрахунків маємо гамільтонів шлях і впорядкування всіх значень лінійної функції $F(x)$:

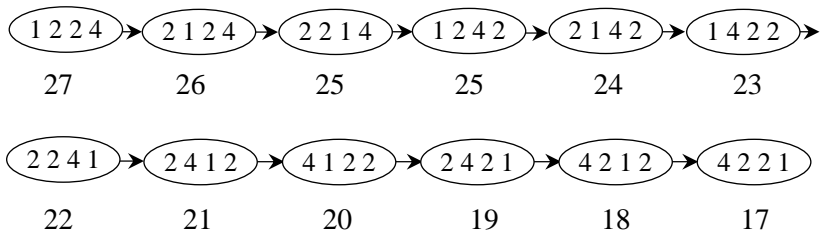


Рис. 4.9. Гамільтонів шлях після визначення значень лінійної цільової функції $F(x)$

Переважає кількість задач на множині перестановок є NP – повними. Описаний підхід дає можливість використовувати специфічні властивості перестановок, на яких задана лінійна цільова функція. Незалежно від коефіцієнтів функції граф її значень має стандартне часткове упорядкування. Для побудови гамільтонового шляху необхідно до цього графу додати ще декілька дуг, для чого треба зробити відповідні обчислення значень функції. Складність розв’язання задач залежить від кількості цих додаткових обчислень.

4.3. Алгоритм пошуку значень лінійної функції на лексикографічно упорядкованих перестановках

В принципі задачі на комбінаторній множині перестановок можна розв’язувати, якщо множині перестановок $P(A)$ поставити у відповідність повний орієнтований граф, в якому перестановки представлені як вершини, а дві вершини $p_1, p_2 \in P_n(A)$, сполучені дугою, що йде від p_1 до p_2 , якщо $F(p_1) \geq F(p_2)$. Очевидно, що максимальне значення функція приймає у вершині, в яку не входить жодна дуга, а мінімальне –

у вершині, з якої не виходить жодна дуга. Гамільтонів шлях в цьому графі відповідатиме послідовності перестановок, для яких значення функції утворює незростаючу послідовність. Якщо перенумерувати цю послідовність, то задачу (4.1)' можна розв'язати шляхом дихотомії послідовності перестановок до тих пір, поки шуканий аргумент для заданого значення функції не потрапить в інтервал мінімальної довжини. Проте простота алгоритму при його реалізації натрапляє на непереборні труднощі обчислювального характеру, якщо врахувати ту обставину, що число вершин графа, який необхідно побудувати, рівне $n!$. Для визначення напряму дуг графа необхідно виконати $n!$ обчислень значень функції F і C_m^2 порівнянь цих значень, де $m = n!$. Навіть для порівняно невеликих значень n реалізувати цей алгоритм практично нереально. Для подолання цих труднощів побудуємо спеціальний підграф шуканого повного графа. При цьому напрям частини дуг між деякими вершинами можна визначити, не обчислюючи в них значення функції. Замінімо $P(A)$ на $uP(A)$, де u – перестановка, що переводить коефіцієнти $F(x)$ в неспадаючу послідовність. Тому надалі, не порушуючи загальності подальших міркувань, вважатимемо, що $c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_u$. Згідно лемі 4.1, якщо з перестановки $p_1 = (i_1, i_2, \dots, i_n) \in P(A)$ одержана перестановка $p_2 \in P(A)$ транспозицією двох чисел $i_k < i_l$, де $k < l$, то $F(p_1) \geq F(p_2)$. Дійсно

$$F(p_1) - F(p_2) = c_k i_k + c_l i_l - c_k i_l = (i_l - i_k)(c_l - c_k) \geq 0,$$

оскільки обидві величини в дужках невід'ємні.

Побудуємо шуканий граф G_n по індукції. Для $n = 2$ граф містить дві вершини $(1,2)$ і $(2,1)$. По лемі 4.1 від першої вершини до другої виходить дуга. Якщо побудовано граф G_n , то граф G_{n+1} утворюється як $n+1$ копій графа G_n за правилом: у першій копії графа G_n кожній перестановці (вершині) справа приписується число $n+1$. Друга копія виходить з першої транспозицією у всіх перестановках чисел $n+1$ і n . І так далі – з j -ї копії транспозицією чисел $(n+2-j)$ і $(n+1-j)$, де $1 \leq j \leq n$, одержуємо $(j+1)$ -у копію. При цьому від всіх вершин j -ї копії

йдуть дуги в відповідні вершини $(j+1)$ -ї копії. Приклад побудови графів приведено на рис. 4.10. На цьому графі всі дуги побудовані за лемою 4.1.

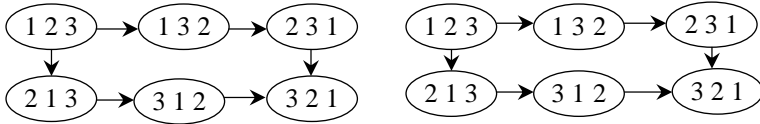


Рис. 4.10

Дуже важливою задачею, яка виникає при побудові залежності між елементами перестановки за значеннями лінійної цільової функції, є задача організації впорядкування і вибору елемента перестановки. Розглянемо алгоритми, які дають можливість встановити взаємозалежність між впорядкуванням елементів перестановки та їх номером.

Алгоритм відображення за номером перестановки N елемента перестановки $P(A)$.

У даному алгоритмі елементи перестановок нумеруються в лексикографічному порядку, який будується за правилом: з двох перестановок

$$a = (a_1, a_2, \dots, a_k, \dots, a_n), \quad b = (b_1, b_2, \dots, b_k, \dots, b_n), \quad b > a,$$

якщо знайдеться таке k , при якому $b_k > a_k$, а $b_i = a_i, i > k$, $(1 < k \leq n, i \leq n)$. Алгоритм дає можливість знайти за заданим номером $1 \leq N \leq n!$ відповідну перестановку. Розглянемо роботу алгоритму на прикладі для $n=4$. Побудуємо послідовність перестановок за вищевикладеним правилом.

Таблиця 4.1

Послідовності перестановок

1)	1234		7)	1243		13)	1342		19)	2341
2)	2134		8)	2143		14)	3142		20)	3241
3)	1324		9)	1423		15)	1432		21)	2431
4)	3124		10)	4123		16)	3412		22)	4231
5)	2314		11)	2413		17)	3412		23)	3421
6)	3214		12)	4213		18)	4312		24)	4321

Задача 4.1. Задано: n – кількість елементів у множині, тоді $n!$ – кількість перестановок, N – номер елемента перестановки.

Знайти: елемент перестановки $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Початкові дані: $k = n$, $N_0 = N$ масив $r = (1, 2, \dots, n)$.

Алгоритм працює за кроками: $\Delta = (k-1)!$; $j = \left\lfloor \frac{N_0 - 1}{\Delta} \right\rfloor$;
 $x_k = r_{k-j}$. В масиві r викреслюється елемент r_{k-j} . $N_0 = N_0 - j \cdot \Delta$;
 $k = k - 1$; якщо $k = 1$, то $x_1 = r_1$ і кінець. В термінах програмної
 реалізації алгоритм для $N = 19$ виглядатиме таким чином:
 $k = 4$; $r = [1234]$.

$i = 1; \Delta = 3! = 6;$	$i = 2, \Delta = 2;$	$i = 3, \Delta = 1;$
$j = \left\lfloor \frac{19-1}{6} \right\rfloor = 3;$	$j = \left\lfloor \frac{1-1}{2} \right\rfloor = 0;$	$j = \left\lfloor \frac{1-1}{1} \right\rfloor = 0;$
$x_4 = r_{4-3} = 1;$	$x_3 = r_{3-1} = 4;$	$x_2 = r_{2-0} = 3;$
$r = [234];$	$r = [23];$	$r = [2];$
$N_0 = 19 - 3 \cdot 6 = 1;$	$N_0 = 1 - 2 \cdot 0 = 1;$	$N_0 = 1 - 1 \cdot 0 = 1;$
$k = 3; i = 2.$	$k = 2, i = 3$	$k = 1; i = 4; x_1 = 2.$

В результаті одержимо перестановку $x = (2, 3, 4, 1)$, що відповідає номеру елемента в таблиці.

Алгоритм відображення номера перестановки N за елементом перестановки $P(A)$. Даний алгоритм дає можливість розв'язати обернену задачу: за заданою перестановкою знайти її номер в лексикографічно впорядкованій послідовності перестановок. Розглянемо реалізацію даного алгоритму на прикладі.

Нехай задана перестановка $x = (x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n})$. Знайти: N – номер елемента перестановки. Початкові дані: $k = n$, $N = 0$, масив $r = (1, 2, \dots, n)$. Робота алгоритму: за значенням x_k знаходимо номер елемента j в масиві r і викреслюємо його. Обчислюємо $N = (k-1)!(k-j) + N$; $k = k - 1$; якщо $k = 1$, то $N = N + 1$ і кінець.

В термінах програмної реалізації алгоритм виглядатиме таким чином при початкових параметрах: $n = 4$, $x_n = (2, 4, 3, 1)$, $N = 0$.

$$r = (1, 2, 3, 4), k = n = 4.$$

$$k = 4, x_4 = 1, j = 1, N = 3!(4 - 1) = 18; r = [234];$$

$$k = 3, x_3 = 3, j = 2, N = 18 + 1 \cdot 2! = 20; r = [24];$$

$$k = 2, x_2 = 4, j = 2, N = 20 + 0 = 20; r = [2];$$

$$k = 1, x_1 = 2, j = 4, N = 20 + 1 = 21.$$

В результаті одержимо $N = 21$.

4.4. Горизонтальний метод локалізації значення лінійної функції, заданої на перестановках

Далі розглянемо граф $G(P_n)$ переставного многогранника, в якому вершини є множиною всіх перестановок P_n , а дві вершини утворюють дугу $\overrightarrow{p_1 p_2}$, якщо $f(p_1) \geq f(p_2)$, $p_1, p_2 \in P_n$ і якщо перестановка p_2 одержана з p_1 за допомогою транспозиції двох елементів.

В даному підрозділі розглядається задача (4.2) – локалізація значень лінійної функції на перестановках – та пропонується метод її розв'язання.

Є множина, що визначає граф перестановок, ставиться задача відшукування підмножини перестановок, на яких досягається задане значення функції.

Якщо не існує жодної такої перестановки, то тоді необхідно розв'язувати задачу (4.2), що визначена для деякої підмножини перестановок. Якщо сформулювати задачу локалізації значення функції в термінах теорії графів, то вона буде звучати наступним чином: для деякої перестановки p_i відомо значення лінійної цільової функції; тоді для задачі (4.2) необхідно визначити відповідну вершину, чи множину вершин графа $G(P_n)$ переста-

новок, в яких це значення досягається; а для задачі (4.2) необхідно визначити множину ребер $\{(p, q)\}$ цього графа таких, що $f(q) < f(p_i) < f(p)$.

При розв'язуванні даної задачі важливим є визначення підмножини перестановок – послідовності підграфів G_1, G_2, \dots, G_s , на яких буде розглядатися пошук необхідного значення. Після попадання на множину вершин деякого підграфа G_1 переходимо до підграфа G_2 з довільної вершини $p_i \in P_n$, якщо є необхідним визначення заданого значення на ньому. Як видно з наведених рисунків графів перестановок, всі вони, незалежно від величини n мають ієрархічний вигляд, де підграфи з більшим значенням функції у вершинах знаходяться вище, ніж підграфи з меншим значенням функції у вершинах. Кожні такі підграфи, в чвою чергу, містять зліва максимальне значення функції, а справа – мінімальне значення.

Це наводить на думку про те, що при розв'язуванні задачі локалізації функції необхідно спочатку розглядати лише ці крайні значення підграфів, а при необхідності – проміжкові значення між ними. Звідси і зрозуміло, чому даний метод локалізації значень функції дістав назву горизонтального.

Визначення 4.1. Назвемо підграфом r -ранга графа переставного многогранника $G(P_u)$ граф, вершини якого мають r фіксованих старших координат.

З цієї точки зору граф $G(P_u)$ є підграфом 0-ранга многогранника $G(P_u)$ і складається з n підграфів 1-ранга $G(P_{n-1})$, де старша координата дорівнює відповідно $n, n-1, n-2, \dots, 2, 1$. Аналогічно можна класифікувати і підграфи більших рангів.

Відомо, що максимальне значення лінійна функція $f(x)$ на переставному многограннику $G(P_n)$ приймає в перестановці $(1, 2, \dots, n)$, а мінімальне – в перестановці $(n, n-1, \dots, 2, 1)$, якщо коефіцієнти цільової функції впорядковані за збільшенням. Очевидно, що ця властивість зберігається і для підграфів, утворених підмножиною перестановок, у яких фіксовані останні k елементів.

Очевидно, що обидві задачі локалізації – (4.1) – можна вирішити, якщо на графі $G(P_n)$ побудувати множину дуг між несуміжними перестановками, які дозволять пройти по дугам шлях від початкової вершини, де $f(x)$ приймає максимальне значення, до кінцевої, де $f(x)$ приймає мінімальне значення, тобто побудувати між ними гамільтонів шлях, як це описано в попередньому підрозділі та в роботі [60]. Якщо відома послідовність перестановок, через які він проходить, то за допомогою методу дихотомії гамільтонового шляху, обчислюючи значення функції у відповідній перестановці, завжди можна локалізувати довільне значення цільової функції $f(x)$. З погляду теорії графів, екстремальну комбінаторну задачу оптимізації можна сформулювати наступним чином: серед деякої множини шляхів L , що з'єднують дві задані вершини, відшукати мінімальний (або максимальний), тобто шлях, що має мінімальне (або максимальне) значення λ . Як множина L може бути вибрана, наприклад, множина всіх гамільтонових шляхів. Розглянемо теорему, яка дає можливість визначення мінімального і максимального шляху серед всіх простих шляхів, що сполучають дві фіксовані вершини.

Теорема 4.1. [122, 203] Нехай деякий шлях, що сполучає вершину x рівня m і вершину x' рівня s , є мінімальним (максимальним). Тоді його підшлях між вершиною y рівня k і вершиною y' рівня p ($m \leq k < p \leq s$) також є мінімальним (максимальним).

Наведена теорема лежить в основі методу відшукування максимальних шляхів в графі без контурів і дає можливість при побудові алгоритму локалізації значень розглянути підграфи графа $G(P_n)$. Задачі (4.1) та (4.2) розглядаються на вершинах графа, тоді знаходження відповідної вершини розглядаємо послідовно, починаючи з деякої початкової, а потім всі вершини графа у порядку спадання значень цільової функції в цих вершинах і приписуємо кожній вершині число, рівне деякому значенню функції $f(x)$. Для відшукування мінімальних шляхів у графах, що мають контури, також існують різні методи. Розглянемо далі підхід до розв'язання задач (4.1) та (4.2), що дозволяє

вибирати лише частину вершин графа і знаходити необхідне значення.

Визначення 4.2. Назвемо схему зображення графа перестановок $G(P)_n$, в якій кожен з n підграфів 1-ранга $G(P_{n-1})$ зображений у вигляді одного ребра, що з'єднує дві вершини з максимальним та мінімальним значеннями функції, **структурним графом** перестановок.

Це поняття має об'єктивний зміст, і його використання лягло в основу алгоритму реалізації горизонтального методу локалізації значення лінійної функції цілі.

Алгоритм локалізації значення лінійної функції на перестановках. Початковий крок:

1) вводимо n – кількість елементів перестановки і розмірність цільової функції;

2) задаємо значення коефіцієнтів c_1, c_2, \dots, c_u цільової функції $f(x)$, нормалізуємо цільову функцію при потребі;

3) вводимо значення елементів множини перестановок: a_1, a_2, \dots, a_n причому введення здійснюється так, щоб елементи були впорядковані по наступному співвідношенню: $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$;

4) задаємо значення цільової функції $y_0 = f(x)$.

Крок 1. Обчислюємо $n!$.

Крок 2. Визначаємо значення: $b = (n-1)!$, яке характеризує кількість точок в загальному структурному графі в кожному підграфі.

Під загальним структурним графом розуміємо граф, що відображає часткову впорядкованість елементів конфігурації за значеннями цільової функції і містить лише вершини, що розміщені на еквівалентних підграфах і в яких досягаються лише екстремальні значення функції.

Крок 3. Обчислюємо мінімальне і максимальне значення заданої функції $f(x)$: $f(x)_{max} = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_{n-1}x_{n-1} + c_nx_n$;

$$f(x)_{min} = c_nx_1 + c_{n-1}x_2 + \dots + c_2x_{n-1} + c_1x_n.$$

Крок 4. Будуємо структурний граф, який має n підграфів, а на кожному підграфі – початкову і кінцеву вершини.

Крок 5. Визначаємо значення цільової функції $f(x)$ у точках – вершинах підграфів $x = (x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n})$.

Крок 6. Визначаємо зліва в структурному графі множину точок, для яких виконується умова $f(\bar{x}_i) \geq f(x^0)$, де x^0 точка, для якої $f(x^0) \geq y^0$, а $\bar{x}_i, i \in N_k$, множина точок, значення цільової функції $f(x)$ у яких більше заданого.

Крок 7. Справа визначимо множину точок, які дають значення цільової функції згідно з виконанням умови: $f(\bar{x}_j) \leq f(x^0)$, де x^0 – точка, для якої виконується умова $f(x^0) \leq y^0$; а $\bar{x}_j, j \in N_{n-k}$, множина точок, для яких значення цільової функції $f(x)$ менше заданого.

Крок 8. Визначаємо множину підграфів як множину перетинів, елементи якого задовольняють умовам, згідно кроку б та 7.

Крок 9. Формуємо множину точок – елементів перестановки, що задовольняють умову $f(x_0) = y_0$. Якщо всі точки знайдені, тобто серед множини підграфів, визначених на кроці 8, немає таких, для вершин яких виконувалася б умова $f(\bar{x}_j) \leq y_0 \leq f(\bar{x}_j)$, то задача розв'язана. Здійснюється вибір елементів точок перестановки. Інакше перехід на наступний крок.

Крок 10. Визначаємо підграф, для якого виконується умова $f(\bar{x}_j) \leq y_0 \leq f(\bar{x}_j)$. Фіксуємо останню координату в точці, вершині підграфа.

Крок 11. Покладаємо $n := n - 1$. Здійснюємо перехід на крок 1.

Слід зазначити, що генерація точок – вершин перестановок в крайніх вершинах підграфів здійснюється рекурсивним методом, що описаний в другому розділі, причому з $n!$ елементів необхідно згенерувати тільки $2n$ на початковому етапі.

Алгоритм був програмно реалізований, проведені чисельні експерименти. Нижче наведено чисельний приклад описаного алгоритму:

Приклад 4.4. Дано: а) функція $f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$, де $n = 6$, тоді $f(x) = 4x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 7x_4 + 3x_5 + 6x_6$;

б) визначене значення функції $f(x^*) = 109$;

в) елементи множини перестановки (1 2 3 4 5 6).

Знайти: точки – вершини переставного многогранника $x^* = ?$, в яких досягається задане значення цільової функції.

Розв'язання: Знаходимо перетворення для впорядкування коефіцієнтів цільової функції, якщо вони були не впорядковані.

$$f(x) = \tilde{c}_1x_1 + \dots + \tilde{c}_nx_n, \quad \tilde{c}_1 \leq \tilde{c}_2 \leq \dots \leq \tilde{c}_n,$$

$$c = (4, 8, 2, 7, 3, 6), \quad \tilde{c} = (2, 3, 4, 6, 7, 8),$$

$$\tilde{c}_i = c_{\pi^{-1}}, \quad \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 1 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \pi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 1 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix};$$

$$\tilde{c}_1 = c_3; \tilde{c}_2 = c_5; \tilde{c}_3 = c_1; \tilde{c}_4 = c_6; \tilde{c}_5 = c_4; \tilde{c}_6 = c_2.$$

Будемо структурний граф для $n = 6$. Всього вершин у графі $G(P_6) = 6! = 720$, а у структурному графі – 12. Визначимо максимальне і мінімальне значення лінійної функції на множині перестановок

$$\max := 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 6 \cdot 4 + 7 \cdot 5 + 8 \cdot 6 = 127$$

$$\min := 2 \cdot 6 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 4 + 6 \cdot 3 + 7 \cdot 2 + 8 \cdot 1 = 83.$$

Аналогічно визначимо мінімум і максимум в решті крайніх вершин кожного підграфа і зобразимо це на рисунку.

На рис. 4.11 зображений структурний граф, де відмічені крайні точки гіперплощин (підграфів), Зліва знаходяться вершини, в яких досягається максимальні значення цільової функції на підграфі, справа – вершини, в яких досягається мінімальне значення функцій.

Слід зазначити, що значення функції визначаються підставкою координат вершин в цільову функцію вигляду

$$f(x) = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 6x_4 + 7x_5 + 8x_6.$$

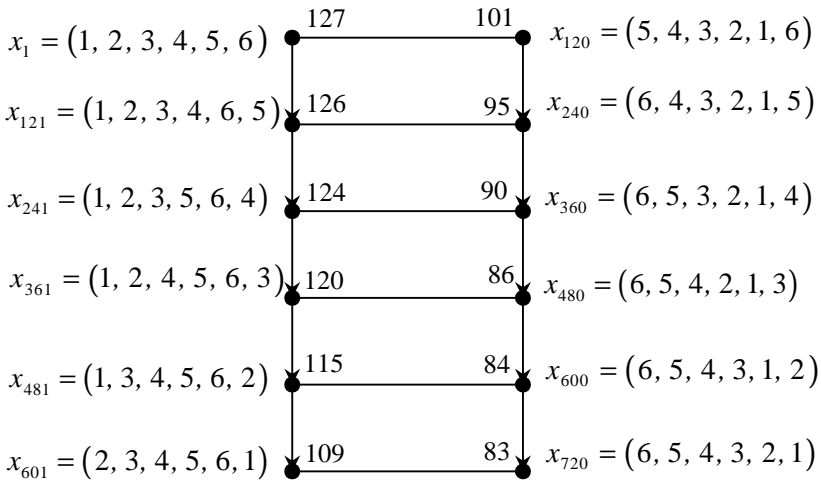


Рис. 4.11. Структурний граф переставного многогранника

Вибір відповідної структури редставлення графів має принципний вплив на ефективність алгоритмів, тому докладніше зупинимося на цій проблемі. Згідно рис. 4.11 є вершина, для якої шукане значення функції досягається $f(x) = 109$ – це точка

$x_{601} = (2, 3, 4, 5, 6, 1)$ – вершина в нижньому підграфі. Відповідно, в ньому більше не буде вершин – перестановок, в яких досягається таке значення. Значить, пошук наступного значення здійснюється на наступному, що вище стоїть, підграфі, де $84 \leq f(x) \leq 115$. Для цього підграфа характерною є умова, що остання координата вершин перестановок підграфа рівна $x_6 = 2$.

Далі розглянемо цей підграф, зафіксувавши $x_6 = 2$, структурний граф цього підграфа для $n = 5$ і п'ять його підграфів рангу $r = 1$.

Наступний крок: у рис. 4.12 відкидаємо 2 нижні підграфи і беремо три верхні підграфи рангу $r = 2$, далі розглядаємо підграф з вершинами, в яких останні дві координати рівні: $x_6 = 2$; $x_5 = 4$ оскільки в двох відкинутих не знайдуться вершини, які задовольняють умову $f(x) = 109$.

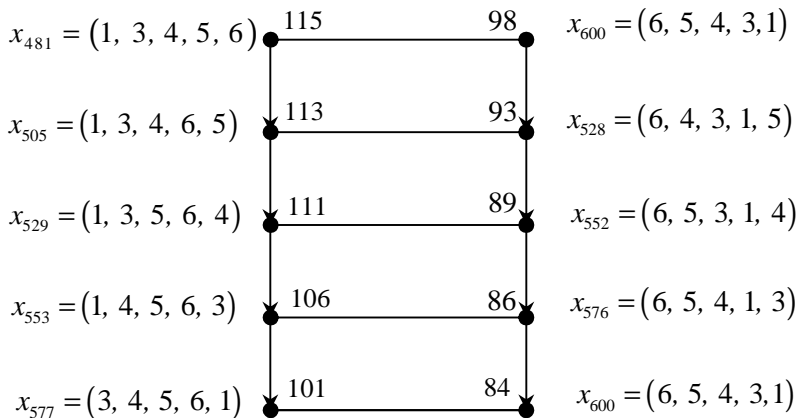


Рис. 4.12. Структурний граф при $n = 5$

Визначимо значення функції $f(x)$ у крайніх точках графа:

$$f(1, 3, 5, 6, 4, 2) = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 5 + 6 \cdot 6 + 7 \cdot 4 + 8 \cdot 2 = 111$$

$$f(1, 3, 6, 5, 4, 2) = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 6 + 6 \cdot 5 + 7 \cdot 4 + 8 \cdot 2 = 109$$

$$f(1, 5, 6, 3, 4, 2) = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 6 + 6 \cdot 3 + 7 \cdot 4 + 8 \cdot 2 = 103$$

$$f(3, 5, 6, 1, 4, 2) = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 6 + 6 \cdot 1 + 7 \cdot 4 + 8 \cdot 2 = 95$$

$$f(5, 3, 1, 6, 4, 2) = 2 \cdot 5 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 1 + 6 \cdot 6 + 7 \cdot 4 + 8 \cdot 2 = 103$$

$$f(6, 3, 1, 5, 4, 2) = 2 \cdot 6 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 1 + 6 \cdot 5 + 7 \cdot 4 + 8 \cdot 2 = 99$$

$$f(6, 5, 1, 3, 4, 2) = 2 \cdot 6 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 1 + 6 \cdot 3 + 7 \cdot 4 + 8 \cdot 2 = 93$$

$$f(6, 5, 3, 1, 4, 2) = 2 \cdot 6 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 3 + 6 \cdot 1 + 7 \cdot 4 + 8 \cdot 2 = 89$$

Тоді на рисунку представимо структурний підграф рангу $r = 2$ при $x_5 = 4$; $x_6 = 2$ у вигляді:

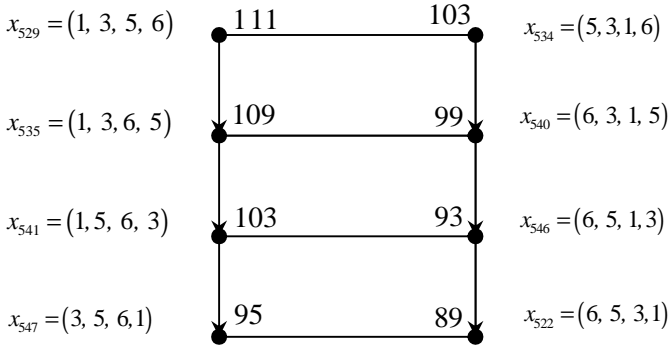


Рис. 4.13. Структурний граф при $n = 4$

Далі, робимо аналогічну процедуру порівняння знайдених значень цільової функції в крайніх вершинах із заданим значенням $f(x) = 109$ згідно умові задачі.

Знову, визначаємо значення цільової функції $f(x)$ у крайніх вершинах графа:

$$f(1, 3, 5, 6, 4, 2) = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 5 + 6 \cdot 6 + 7 \cdot 4 + 8 \cdot 2 = 111$$

$$f(1, 5, 3, 6, 4, 2) = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 3 + 6 \cdot 6 + 7 \cdot 4 + 8 \cdot 2 = 109$$

$$f(3, 5, 1, 6, 4, 2) = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 1 + 6 \cdot 6 + 7 \cdot 4 + 8 \cdot 2 = 105$$

$$f(3, 1, 5, 6, 4, 2) = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 5 + 6 \cdot 6 + 7 \cdot 4 + 8 \cdot 2 = 109$$

$$f(5, 1, 3, 6, 4, 2) = 2 \cdot 5 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + 6 \cdot 6 + 7 \cdot 4 + 8 \cdot 2 = 105$$

$$f(5, 3, 1, 6, 4, 2) = 2 \cdot 5 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 1 + 6 \cdot 6 + 7 \cdot 4 + 8 \cdot 2 = 103$$

Розглянемо підграф, для вершин якого: $x_4 = 6$, $x_5 = 4$; $x_6 = 2$. На підставі обчислень, одержуємо наступне розташування вершин:

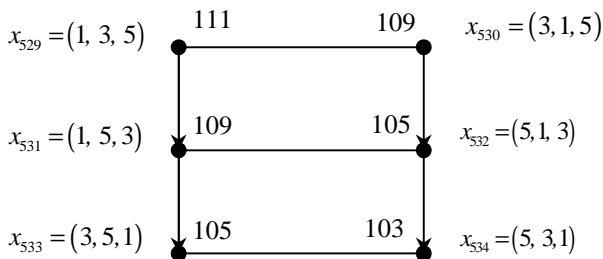


Рис. 4.14. Структурний граф при $n = 3$

На підставі елементарних операцій порівняння одержимо розв'язки для $x_{531}^* = (1, 5, 3, 6, 4, 2)$, $x_{530}^* = (3, 1, 5, 6, 4, 2)$, які досягаються в вершинах структурного підграфа переставного многогранника, в яких досягається значення функції $f(x) = 109$.

Це був розглянутий один нижній підграф при фіксованій координаті $x_6 = 2$ із структурного графа, зображеного на рис. 4.11. Розглянемо третій підграф знизу з рис. 4.11 при $x_6 = 3$.

Проробляємо ту ж процедуру: переглянемо значення цільової функції в крайніх вершинах. Далі розглядається структурний граф, у вершинах якого розташовані точки $[x_{361}; x_{480}]$, при останній координаті $x_6 = 3$ і значення цільової функції в цих вершинах знаходиться в межах $120 \geq f(x) \geq 86$. На підставі обчислень з графа виділяємо підграф, для яких виконується умова $x_5 = 4$, $x_6 = 3$. Графічне представлення наступне:

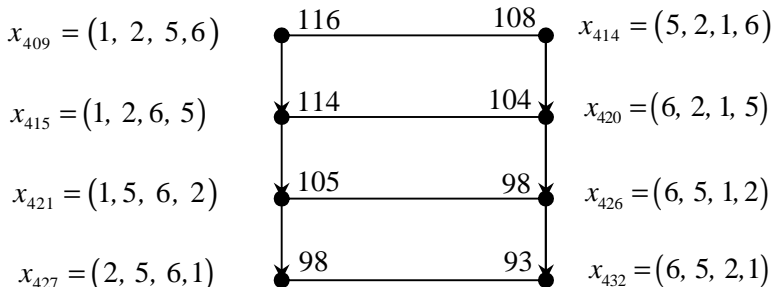


Рис. 4.15. Структурний граф при $n = 4$

На підставі аналізу рис. 4.15 є доцільним розглянути підграф, для вершин $[x_{415}; x_{420}]$, значення функції в яких знаходяться в межах $114 \geq F(x) \geq 104$. Далі розглядається розташування вершин на підграфі, в якому зафіксована третя координата, за наявності зафіксованих двох останніх: $x_4 = 5$; $x_5 = 4$; $x_6 = 3$.

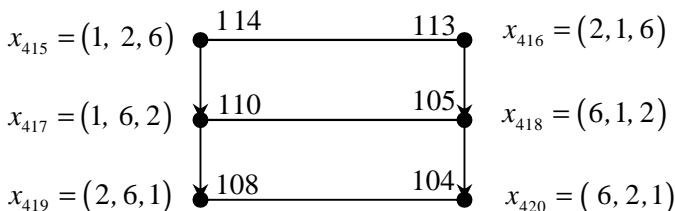


Рис. 4.16. Структурний граф при $n = 3$

Як показали розрахунки, на цьому підграфі немає вершин, що задовольняють значення функції $f(x) = 109$. Тому повертаємося до рис. 4.11 і розглядаємо четвертий знизу підграф, для вершин якого $x_6 = 4$. Визначимо значення цільової функції в крайніх вершинах.

$$f(x_{241}) = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 6 \cdot 5 + 7 \cdot 6 + 8 \cdot 4 = 124$$

$$f(x_{264}) = 2 \cdot 5 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 6 \cdot 1 + 7 \cdot 6 + 8 \cdot 4 = 107$$

$$f(x_{265}) = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 6 \cdot 6 + 7 \cdot 5 + 8 \cdot 4 = 123$$

$$f(x_{288}) = 2 \cdot 6 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 6 \cdot 1 + 7 \cdot 5 + 8 \cdot 4 = 102$$

$$f(x_{289}) = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 5 + 6 \cdot 6 + 7 \cdot 3 + 8 \cdot 4 = 117$$

$$f(x_{312}) = 2 \cdot 6 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 2 + 6 \cdot 1 + 7 \cdot 3 + 8 \cdot 4 = 94$$

$$f(x_{313}) = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 5 + 6 \cdot 6 + 7 \cdot 2 + 8 \cdot 4 = 113$$

$$f(x_{336}) = 2 \cdot 6 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 3 + 6 \cdot 1 + 7 \cdot 2 + 8 \cdot 4 = 91$$

$$f(x_{337}) = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 5 + 6 \cdot 6 + 7 \cdot 1 + 8 \cdot 4 = 108$$

$$f(x_{360}) = 2 \cdot 6 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 3 + 6 \cdot 2 + 7 \cdot 1 + 8 \cdot 4 = 90$$

Позначимо крайні вершини на рис. 4.17:

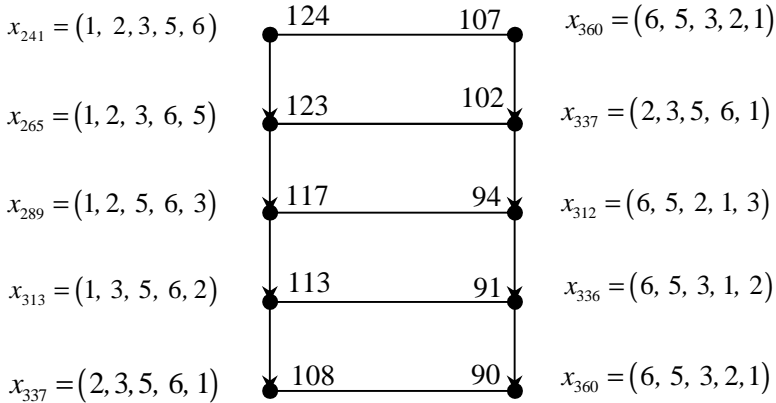


Рис. 4.17 Структурний граф при $x_6 = 4$

На підставі вище зроблених розрахунків для знаходження точки – перестановки доцільно розглянути другий нижній підграф і знову маємо розкладання: при $n = 4$. Визначимо значення цільової функції в крайніх вершинах підграфів і позначимо на рис. 4.18:

$$f(x_{313}) = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 5 + 6 \cdot 6 + 7 \cdot 2 + 8 \cdot 4 = 113$$

$$f(x_{319}) = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 6 + 6 \cdot 5 + 7 \cdot 2 + 8 \cdot 4 = 111$$

$$f(x_{325}) = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 6 + 6 \cdot 3 + 7 \cdot 2 + 8 \cdot 4 = 105$$

$$f(x_{331}) = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 6 + 6 \cdot 1 + 7 \cdot 2 + 8 \cdot 4 = 97$$

$$f(x_{318}) = 2 \cdot 5 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 1 + 6 \cdot 6 + 7 \cdot 2 + 8 \cdot 4 = 105$$

$$f(x_{324}) = 2 \cdot 6 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 1 + 6 \cdot 5 + 7 \cdot 2 + 8 \cdot 4 = 101$$

$$f(x_{330}) = 2 \cdot 6 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 1 + 6 \cdot 3 + 7 \cdot 2 + 8 \cdot 4 = 95$$

$$f(x_{336}) = 2 \cdot 6 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 3 + 6 \cdot 1 + 7 \cdot 2 + 8 \cdot 4 = 91.$$

На рис. 4.18 представлено схематично структурний граф, де зліва позначені вершини підграфів, в яких досягається максимальне значення функції на кожному з них, справа – вершини, в яких досягається мінімальне значення функції на кожному з підграфів.

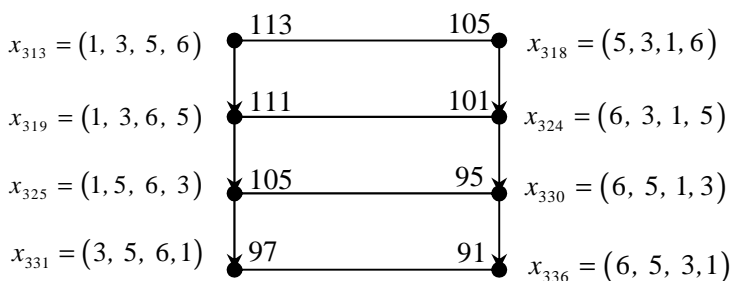


Рис. 4.18. Структурний граф при $x_5 = 2$, $x_6 = 4$

Згідно розрахункам, є доцільно розглянути два верхні підграфи. Далі розглядається один з них при фіксованих координатах $x_4 = 5$, $x_3 = 2$, $x_6 = 4$ і виконуються вже описані процедури.

На цьому кроці, нарешті, одержуємо розв'язок задачі (4.2), який задовольняє умову $f(x) = 109$. Всього отримано вісім вершин, які перелічені нижче. Отже, необхідності розв'язувати задачу (4.1'') не виникло.

$$x_1^0 = (2, 3, 4, 5, 6, 1), \quad x_2^0 = (1, 3, 6, 5, 4, 2),$$

$$x_3^0 = (1, 5, 3, 6, 4, 2), \quad x_4^0 = (3, 1, 5, 6, 4, 2),$$

$$x_5^0 = (3, 1, 6, 5, 2, 4), \quad x_6^0 = (3, 4, 2, 6, 1, 5),$$

$$x_7^0 = (4, 2, 3, 6, 1, 5), \quad x_8^0 = (2, 4, 5, 3, 1, 6).$$

Цей розв'язок отримано для нових змінних, у яких цільова функція упорядкована. Для того, щоб повернутися до початкових

змінних, треба домножити цей розв'язок на перестановку

$$\pi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 1 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}. \text{ Після цього отримаємо розв'язок}$$

$$x_1 = (4, 1, 2, 6, 3, 5); \quad x_2 = (6, 2, 1, 4, 3, 5); \quad x_3 = (3, 2, 1, 4, 5, 6);$$

$$x_4 = (5, 2, 3, 4, 1, 6); \quad x_5 = (6, 4, 3, 2, 1, 5); \quad x_6 = (2, 5, 3, 1, 4, 6);$$

$$x_7 = (3, 5, 4, 1, 2, 6); \quad x_8 = (5, 6, 2, 1, 4, 3).$$

Для знаходження розв'язку цієї задачі знадобилося зробити обчислення значень функції в 74 вершинах графа перестановок. Нагадаємо, що всього цих вершин 720. Розглянемо ще один метод розв'язання даної задачі.

4.5. Координатний метод локалізації значення лінійної функції, заданої на перестановках

Слід зазначити, що значення функції на графі перестановок в напрямку знизу вгору зростає, а зверху вниз – спадає з однаковим інтервалом при рівномірному розподілі значень коефіцієнтів. Це обумовлено ієрархічною будовою цього графа та лінійністю цільової функції. При цьому поняття «верх», або «низ» мають стабільний структурний зміст у відношенні підграфів у рамках об'єднуючого графа. Так, наприклад, підграф $G(P_3)$, зображений на рис. 4.1, є складовою частиною всіх графів з більшою кількістю координат. Чотири підграфа $G(P_3)$ складають граф $G(P_4)$, п'ять підграфів $G(P_4)$, або 20 підграфів $G(P_3)$, складають $G(P_5)$ і так далі. Це означає, що для довільного n значення цільової функції в шести вершинах підграфа $G(P_3)$, у яких до координат справа дописані числа $4, 5, 6, \dots, n-1, n$, складають шість найбільших серед $n!$ значень функції. Починаючи з одної з цих вершин, можна визначити множину шляхів, на яких значення функції спадає. Це і є підґрунтям для координатного методу локалізації функції. Розглянемо його суть на прикладі, описаному в п. 4.4. Отже

маємо функцію $f(x) = 4x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 7x_4 + 3x_5 + 6x_6$. Треба знайти перестановки x^* , в яких $f(x^*) = y^* = 109$. Після нормалізації ця функція прийме вигляд:

$$f(x) = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 6x_4 + 7x_5 + 8x_6.$$

Будемо поступово розглядати підграфи G_i , тобто підграфи, у яких фіксована остання координата – у нашому прикладі $n = 6$, а $x_6 = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, або $x_6 \in N_6$. Кожній вершині графа на рис. 4.1, в залежності від її типу, можна поставити у відповідність свій підграф G_i , зображений на рис. 4.19. Під типом вершини розуміється наступне: якщо шоста координата для всього графа постійна (на рис. 4.19 це 2), то п'ята і четверта змінюються від більшої можливої до меншої. Якщо три старші координати вже вибрані, то порядок перших трьох, який відповідає одній з шести вершин на рис. 4.1, і визначає тип вершини. Пояснимо побудову і структуру рис. 4.19.

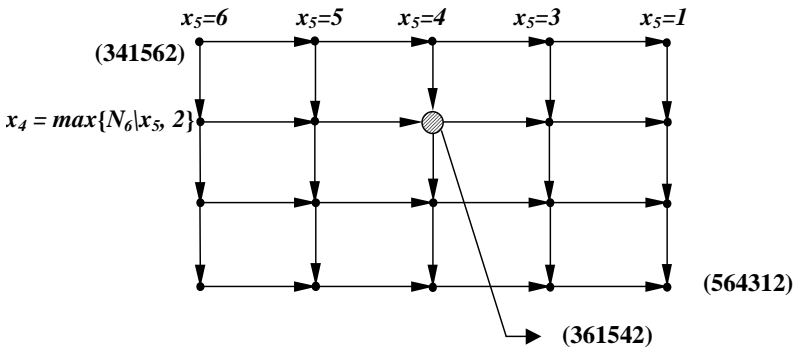


Рис. 4.19. Схема підграфа G_2 для типу вершин (231)

Граф представляє мережу, де виток є найвища і найлівіша вершина, а сток – найнижча і найправіша вершина.

Нехай на рис. 4.1 як тип ми вибрали вершину (231) . Тоді координати витка такі: $x_6 = 2, x_5 = 6, x_4 = 5$. Упорядкуємо інші координати, що залишилися $i_1 = 1, i_2 = 3, i_3 = 4$. Тип вершини

зобов'язує, щоб нижні індекси перших трьох координат були відповідно (231), тобто код витоку має вигляд (341562). Аналогічно знаходимо координати стоку. Ясно, що тут четверта і п'ята координати вибираються як найменші можливі, тобто $x_6 = 2$, $x_3 = 1$, $x_4 = 3$. Для перших трьох координат маємо $i_1 = 4$, $i_2 = 5$, $i_3 = 6$, і код стоку має вигляд (564312). Для довільної вершини цього підграфа (на рисунку вона заштрихована) застосовується той же принцип. Для неї $x_6 = 2$, $x_5 = 4$, а $x_4 = 5$ як друге за величиною значення серед залишених 1, 3, 5, 6. Звідси код виділеної вершини (361542).

Тепер будемо розв'язувати поставлену задачу, при цьому дотримуючись таких правил: а) якщо в даній вершині значення функції менше заданого, то далі треба шукати це значення в сусідній вершині, збільшуючи четверту, або п'яту координату; б) якщо в даній вершині значення функції більше заданого, то далі треба шукати це значення в сусідній вершині, зменшуючи четверту, або п'яту координату.

Покажемо, що для розв'язання задачі не обов'язково розглядати всі коди підграфів типу на рис. 4.19 і обчислювати в них значення функції, а достатньо обчислити її значення в витоках мереж, які відповідають підграфам з фіксованим значенням шостої координати. Для прикладу виберемо тип вершини (213). Розглянемо підграфи G_i і для кожного обчислимо значення функції у витоках цих підграфів. Маємо таку таблицю:

Таблиця 4.2

Підграфи G_i та значення функції у витоках

Підграф	Код витоку	Значення $f(x)$
G_6	213456	126
G_5	213465	125
G_4	213564	123
G_3	214563	119
G_2	314562	113
G_1	324561	108

З таблиці видно, що підграф G_1 можна не розглядати, так як максимальне значення функції менше того значення, яке ми шукаємо. Отже, розглянемо інші підграфи, наприклад G_6 і дослідимо в ньому п'яту координату. Вона послідовно приймає значення $5 \Rightarrow 4 \Rightarrow 3 \Rightarrow 2 \Rightarrow 1$. Відповідно до вектора коефіцієнтів функції $c = (2, 3, 4, 6, 7, 8)$ це приведе до зменшення значення функції послідовно на $(c_5 - c_4) = 1$, $(c_5 - c_4) = 3$, $(c_5 - c_1) = 5$, $(c_5 - c_2) = 4$, а в сумі на 13. Тобто найменше значення при $x_4 = 4$ функція приймає у вершині (324516) а саме $126 - 13 = 113$. Треба зменшувати значення x_4 . Це досягається транспозицією елементів 5 і 4 та зменшенням значення функції на $(c_4 - c_3) = 2$, і воно стане рівним 111. Але це все одно більше 109, тому знову замінюємо значення x_4 на 3, що зменшить значення функції на $(c_5 - c_2) = 4$, тобто до 107, у вершині (425316). Тепер це менше 109, тому треба збільшувати x_5 до 2, що досягається транспозицією чисел 2 та 1 та зростанням функції у вершині (415326) на $(c_4 - c_1) = 4$, тобто до 111. Знову зменшуємо значення x_4 до 1 шляхом транспозиції чисел 3 та 1. У вершині (435126) отримуємо зменшення функції на $(3-1)(c_4 - c_2) = 6$, тобто до 105. Необхідно збільшити x_5 до 3, переставляючи числа 2 і 3. Отримаємо значення функції $105 + (c_5 - c_2) = 109$, що і було потрібно. Оскільки x_4 в цій вершині найменше, то більше в підграфі G_6 таких вершин не існує. Переходимо до $i < 6$.

Зробимо деякі узагальнення. Розв'язання задачі провадиться для всіх типів вершин. Для фіксованого типу вершин послідовно для кожного підграфу знаходяться необхідні вершини x^* , в яких $f(x^*) = y^*$. Будемо далі називати вершину-виток початковою вершиною графа G_i . Алгоритм пошуку необхідної вершини для підграфу $G_i (i = 1, 2, \dots, n)$ можна поділити на три етапи.

Перший етап: побудова коду початкової вершини для G_i .

Другий етап: розгортання графа вздовж координати x_4 .

Третій етап: розгортання графа вздовж координати x_5 .

Опишемо кожний етап.

I. Нехай вибрано тип вершини (i_1, i_2, i_3) , де $i_1 \cup i_2 \cup i_3 = \{1, 2, 3\}$, та номер підграфу i . Тоді покладемо: $x_6 = i$; $x_5 = \max\{N_6 \setminus x_6\}$, $x_4 = \max\{N_6 \setminus (x_5, x_6)\}$. Упорядкуємо числа $\{N_6 \setminus (x_4, x_5, x_6)\}$ по зростанню $j_1 < j_2 < j_3$. Тоді $x_1 = j_1$, $x_2 = j_2$, $x_3 = j_3$. Це і буде код головної вершини мережі G_i , який позначимо p_1 (або q_1). Обчислимо значення цільової функції в цій вершині $f(p_1)$.

II. Розглянемо в цьому кодi значення x_k ($k=1, 2, 3, 4$) та упорядкуємо їх за спаданням $x_4 = j_4 > j_3 > j_2 > j_1$. Розгортанням графа вздовж координати x_4 (або вниз) назвемо послiдовнiсть транспозицiй $j_4 \Leftrightarrow j_3 \Leftrightarrow j_2 \Leftrightarrow j_1$, якi крiм коду головної вершини приводять до створення ще трьох кодiв, якi ми позначимо p_2 , p_3 та p_4 i запишемо один пiд одним. Щоб знайти значення функцiї на цих перестановках, не обов'язково використовувати всi її координати. Достатньо знайти рiзницю значень функцiї у сусiднiх вершинах. Позначимо $\mu(\lambda)$ номер мiсця числа j_λ в кодi перестановки p_1 ($\lambda=1, 2, 3$). Тодi значення $f(p_2)$ буде менше $f(p_1)$ на величину $\Delta_1 = (j_4 - j_3)(c_4 - c_{\mu(3)})$. У другому множнику постiйно буде величина c_4 , тому що в транспозицiї завжди бере участь координата x_4 . Аналогiчно знаходимо другу та третю рiзницi. Очевидно, що в процесi подальшого пошуку необхiдно використовувати тiльки тi перестановки, для яких $f(p_1) \geq y^*$.

III. Розглянемо в кодi вершини p_k (яку позначимо q_1 , ($k=1, 2, 3, 4$) значення x_5, x_4, x_3, x_2, x_1 та упорядкуємо їх за спаданням $x_5 = j_5 > j_4 > j_3 > j_2 > j_1$. Розгортанням графа вздовж координати x_5 (або праворуч) назвемо послiдовнiсть транспозицiй $j_5 \Leftrightarrow j_4 \Leftrightarrow j_3 \Leftrightarrow j_2 \Leftrightarrow j_1$, якi крiм коду головної вершини повиннi привести до створення ще чотирьох кодiв, якi ми позначимо q_2, q_3, q_4 та q_5 . Але цi коди створювати не обов'яз-

ково. Так само, як і при розгортанні графа вниз, значення функції $f(q_2)$ у вершині q_2 буде меншим від значення $f(q_1)$ на величину $\delta_1 = (j_5 - j_4)(c_5 - c_{\mu(4)})$. За цією формулою знаходимо всі інші різниці. Послідовно віднімаючи δ_λ ($4 \geq \lambda \geq 1$) від $f(q_1)$, можемо отримати дві такі ситуації:

1. Всі значення функцій більші y^* . В цьому випадку переходимо до розгортання наступного коду p_k .

2. На деякому кроці λ^* отримаємо значення функції у вершині рівне y^* (або менше y^*). В першому випадку запам'ятовуємо код відповідної вершини. Переходимо до розгортання наступного коду p_k , при цьому кількість кроків обмежується до $\lambda^* - 1$.

Після розгортання всіх p_k ($k=1, 2, 3, 4$) пошук необхідних вершин підграфа G_i з фіксованим i закінчується. Проведемо необхідні обчислення для всіх підграфів, наведених в таблиці 4.2, використовуючи описані три етапи.

Для G_6 отримали вершину (425136), в якій $f(425136) = 109$.

Для G_5 $p_1 = q_1 = (213465)$, $f(q_1) = 125$, $(6 \Leftrightarrow 4 \Leftrightarrow 3 \Leftrightarrow 2 \Leftrightarrow 1)$.

Різниця значень пробігає числа $(6-4)(7-6) = 2$, $7-4 = 3$, $7-2 = 5$, $7-3 = 4$, в сумі = 14, тобто найменше значення функції при постійному значенні x_4 дорівнює $125 - 14 = 111 > 109$. Розгортаємо код p_2 , для якого $f(214365) = 123$, $(6 \Leftrightarrow 4 \Leftrightarrow 3 \Leftrightarrow 2 \Leftrightarrow 1)$ і різниця значень пробігає числа $(6-4)(7-4) = 6, 1, 5, 4$, в сумі = 16. Значення функції спадають $123 - 117 - 116 - 111 - 107$. Як бачимо, тут немає шуканої вершини, тому переходимо до коду p_3 , при цьому будемо розгортати код на крок менше. Це дає значення функції $f(p_3) = f(314265) = 119$, $(6 \Leftrightarrow 4 \Leftrightarrow 3 \Leftrightarrow 2)$. Різниця значень функції пробігає числа $(6-4)(7-4) = 6, 5, 1$, а значення функції спадають $119 - 113 -$

–108–107. Тут також немає шуканої вершини, тому переходимо до коду p_4 , в якому перевіряємо тільки один крок $f(p_4) = f(324165) = 116$. Сусідня вершина відрізняється транспозицією чисел 6 і 4, а функція на 6 менша, або дорівнює $110 < 109$. Отже в підграфі G_5 немає шуканих вершин.

Для G_4 $p_1 = (213564)$, $f(p_1) = 123$, $(6 \Leftrightarrow 5 \Leftrightarrow 3 \Leftrightarrow 2 \Leftrightarrow 1)$. Різниця значень пробігає числа $(7-6)=1$, $2(7-4)=6$, $7-2=5$, $7-3=4$, що дає послідовність спадання функції $123-122-116-111-107$. Переходимо до $p_2 = (215364)$, $f(p_2) = 119$, а кроків робимо на один менше $(6 \Leftrightarrow 5 \Leftrightarrow 3 \Leftrightarrow 2)$. Різниця значень пробігає числа $(7-4)=3$, $2(7-6)=2$, $7-2=5$, а функція спадає $119-116-114-109$.

Це значення шуканої вершини, а її код легко обчислити – (316524) за трьома транспозиціями над кодом p_2 . Переходимо до коду $p_3 = (315264)$ і робимо два кроки – $f(p_3) = 115$, $(6 \Leftrightarrow 5 \Leftrightarrow 3)$. Це дає різниці $7-4=3$, $2(7-2)=10$, тобто спадання функції $112-102$. Це означає, що при цьому заченні x_4 шуканої вершини немає. Переходимо до коду $p_4 = (325164)$ і робимо один крок $(6 \Leftrightarrow 5)$. Це дає різницю $7-4=3$, або значення функції $112-3=109$. Так що в підграфі G_4 отримаємо дві шуканих вершини.

Переходимо до G_3 , де код $p_1 = (214563)$, $f(p_1) = 119$, $(6 \Leftrightarrow 5 \Leftrightarrow 4 \Leftrightarrow 2 \Leftrightarrow 1)$. Різниці складають числа 1, 3, 10, 4. Спадання функції наступне – $119-118-115-105-101$. Тут немає шуканої вершини, а в наступному коді робимо два кроки. $f(p_2) = 117$, а $p_2 = (215463)$, $(6 \Leftrightarrow 5 \Leftrightarrow 4)$, що відповідає різницям 3, 1. При цьому функція спадає – $117-114-113$. Для p_4 відразу отримуємо $f(p_3) = 109$, тому на цьому пошук в G_3 закінчується.

Залишилося зробити пошук в підграфі G_2 . Код його головної вершини $p_1 = (314562)$, $f(p_1) = 113$, $(6 \Leftrightarrow 5 \Leftrightarrow 4 \Leftrightarrow 3 \Leftrightarrow 1)$. Різниці складають числа 1, 3, 5, 8. Спадання функції наступне –

(113 – 112 – 109 – 104 – 96). Тут маємо одну шукану вершину $f(x^*) = y^*$, де $x^* = (315642)$. Переходимо до коду вершини $p_2 = (315462)$, $f(p_2) = 111$, робимо один крок ($6 \leftrightarrow 5$). Це приводить до транспозиції зі зменшенням функції до 108. На цьому і закінчиться пошук на підграфі G_2 , а тим самим на підграфі, що відповідає типу вершини (213). В результаті для даного типу вершини було знайдено п'ять вершин, значення функції в яких дорівнює 109.

Схема пошуку необхідних вершин серед підграфів з фіксованим типом вершин не відрізняється від наведеної.

Слід зазначити такі відмінності алгоритму пошуку необхідних вершин координатним методом від горизонтального:

Перш за все, останній метод потребує менше обчислень. Необхідно обчислювати лише різниці значень функції, тоді як в попередньому методі кожний раз необхідно обчислювати значення функції в новій вершині, при цьому кожен раз відтворювати код вершини. Крім того, останній метод дозволяє декілька модифікацій, пов'язаних з обчисленнями не тільки в кодах головних вершинах (витоках), а і симетричним підходом відносно вершин-стоків та іншими.

Цим і закінчується дослідження складних комбінаторних задач на множині перестановок. Розглянуто локалізацію лінійної функції комбінаторної задачі з використанням теорії графів і комбінаторних конфігурацій, запропоновано і реалізовано два принципових алгоритма методу локалізації значення лінійної функції на множині перестановок.

4.6. Встановлення гамільтоновості графів переставних многогранників для оптимізації лінійної функції

Розглянемо описаний граф переставного многогранника, враховуючи, що для значень цільової функції виконується співвідношення:

$$F(x)_{[A]} \geq F(x)_{[B]} \geq F(x)_{[C]} \geq F(x)_{[D]}.$$

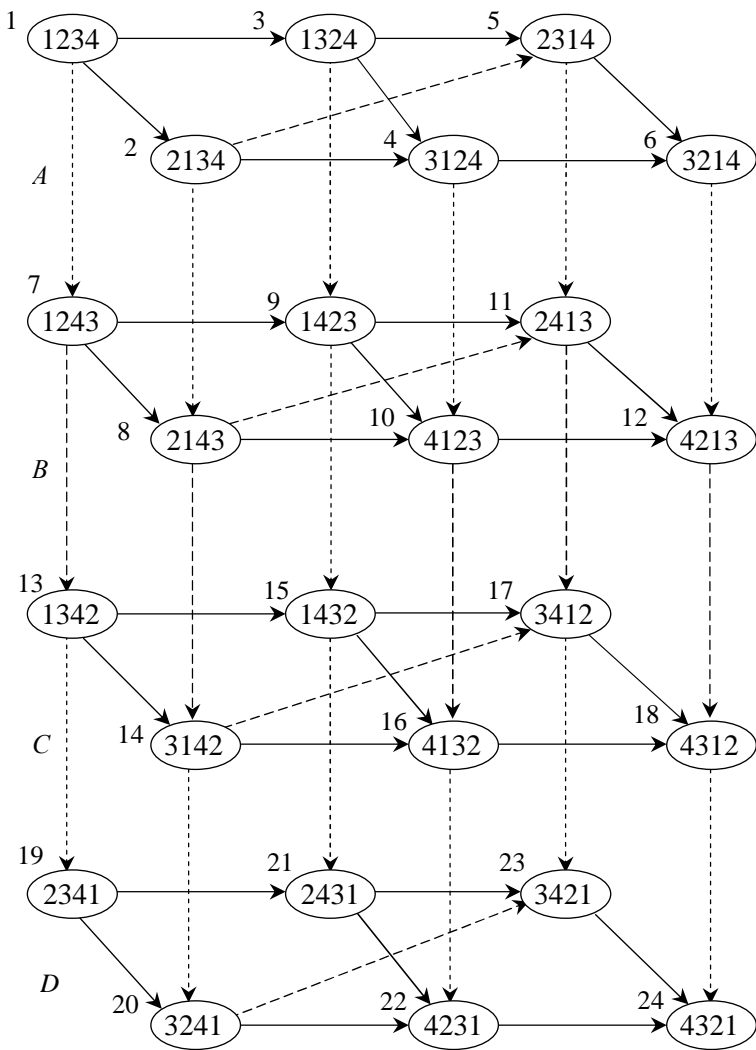


Рис. 4.20. Представлення графа перестановок $G(P_n)$ для $n = 4$

Вкажемо на основну властивість цього графа, що формулюються у вигляді наступних лем.

Лема 4.2. Елементи множини перестановок P_n можна розкласти на еквівалентні підграфи A, B, C, D у порядку спадання значень лінійної цільової функції $F(x)$ у вершинах графа $G(P_n) = A \cup B \cup C \cup D$, в яких задається функція.

Лема 4.3. Розкладання точок комбінаторної конфігурації перестановок P_n при $n \geq 4$ забезпечує ієрархічне розташування цих точок по підграфах A, B, C, D (рис. 4.20) згідно значень заданої лінійної цільової функції $y^* = F(x^*)$.

Граф відображає часткову впорядкованість множини перестановок для $n=4$ щодо значень довільної лінійної функції $f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4$, де $c_1 \leq c_2 \leq c_3 \leq c_4$, а набір $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ – пробігає множину всіх перестановок P_n . У графі дві вершини, що відповідають двом перестановкам, суміжні, якщо вони отримуються одна з іншої за допомогою транспозиції двох елементів і з'єднані одним ребром. Розглянемо дві суміжні вершини $p_1 = (x_1, \dots, x_k, x_l, \dots, x_n)$, $p_2 = (x_1, \dots, x_l, x_k, \dots, x_n)$.

Лема 4.4. З двох суміжних перестановок функція $f(x)$ приймає не менше (більше) значення для тієї, в якій максимальний з двох елементів, що розрізняються, знаходиться справа.

Ця лема справедлива для довільного n . Дійсно, нехай дано дві довільні перестановки $p_1 = (x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_l, \dots, x_n)$ і $p_2 = (x_1, x_2, \dots, x_l, \dots, x_k, \dots, x_n)$, які відрізняються положенням двох елементів x_k і x_l , при цьому нехай $x_l > x_k$. Розглянемо різницю значень $f(p_1) - f(p_2)$. Підставивши значення координат перестановок в функцію $f(x)$, після спрощень одержимо, що вона дорівнює

$$c_k(x_k - x_l) + c_l(x_l - x_k) = (c_l - c_k)(x_l - x_k).$$

Оскільки для $l < k$ завжди $c_l \geq c_k$, при умові упорядкування коефіцієнтів цільової функції за зростанням, то цей вираз не менше нуля, що і підтверджує справедливість леми.

У графі на рис. 4.20 всі суміжні перестановки з'єднуються дугами відповідно лемі 4.4. Аналогічно будується граф переставного многогранника $G(P_n)$ для довільного n .

Наслідок 4.1. Максимальне значення лінійна функція $f(x)$ на графі перестановок $G(P_n)$ приймає в перестановці $(1, 2, \dots, n)$, а мінімальне – в перестановці $(n, n-1, \dots, 2, 1)$.

Розглянемо задачі, які є актуальними для графів: знайти множину перестановок, в яких значення цільової функції дорівнює заданому значенню, тобто $x^* = \underset{x \in P_n}{\operatorname{arg} f(x)}$, або визначити множину пар перестановок (\underline{x}, \bar{x}) , для яких при заданому y

$$\bar{x} = \underset{f(x) > y}{\operatorname{arg} \min} f(x), \quad \underline{x} = \underset{f(x) < y}{\operatorname{arg} \max} f(x). \quad (4.11)$$

Підхід до розв'язання. Як і в попередньому випадку, використовуємо для розв'язування задачі граф, добудувавши на графі $G(P_n)$ множину дуг між несуміжними перестановками.

Множина дуг представляє шлях від початкової вершини, де функція $f(x)$ приймає максимальне значення, до кінцевої, де $f(x)$ приймає мінімальне значення.

Таким чином знову розглядається гамільтонів шлях, при цьому здійснюючи обхід по всім вершинам графа. Таким чином, визначається послідовність перестановок, через які він проходить, а методом дихотомії гамільтонового шляху, обчислюють значення функції у відповідній перестановці. Тоді завжди можна локалізувати довільне значення цільової функції $f(x)$.

Лема 4.5. Складність розв'язання задач (4.11), оцінюється зверху поліномом не вище за другий ступінь.

Оскільки число вершин графа $G(P_n)$ (перестановок) рівно $n!$, то складність обчислень при дихотомії оцінюється величиною $R = \log_2 n! = \sum_{i=2}^n \log_2 i$. Для її визначення розглянемо графік функції $y = \log_2 x$ на рис. 4.21.

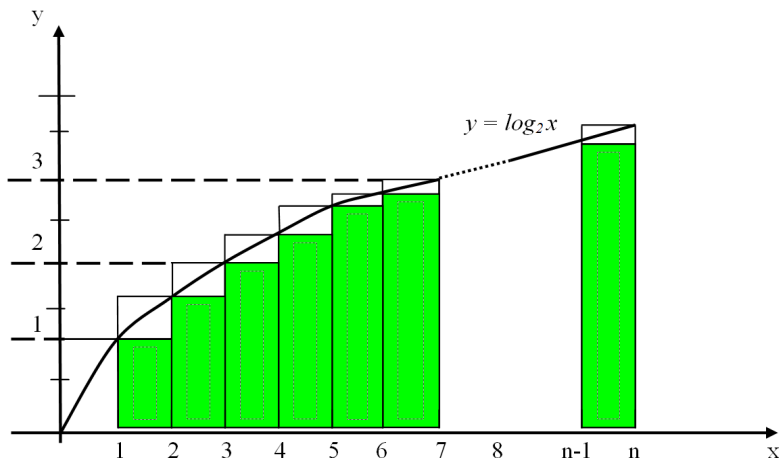


Рис. 4.21. Графік функції $y = \log_2 x$

Площа всіх прямокутників, побудованих над кривою y , дорівнює $\bar{S} = \sum_{i=2}^n \log_2 i = R$. Аналогічно, площа всіх прямокутників, побудованих під кривою y (заштрихованих), дорівнює $\underline{S} = \sum_{i=2}^{n-1} \log_2 i = R - \log_2 n$. З рисунка можна побачити, що площа, обмежена кривою $y = \log_2 x$ і віссю абсцис, задовільняє обмеженням

$$R - \log_2 n < \int_1^n \log_2 x dx < R. \quad (4.12)$$

Значення невизначеного інтегралу дорівнює $[x \ln x - x] / \ln 2$. Оскільки $n \geq \log_2 n$, то одержимо оцінку $R \leq n^2$, що і потрібно довести.

Перейдемо тепер безпосередньо до побудови гамільтонового шляху в графі $G(P_4)$. Для зручності операції над перестановками пронумеруємо їх від 1 до 24, як показано на рис. 4.20, і

будемо їх називати точками (вершинами) p_i ($i=1, 2, \dots, 24$), наприклад $p_{16} = (4, 1, 3, 2)$. Вектор коефіцієнтів функції $f(x)$ позначимо $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$, на рис. 4.1 це $c = (c_1, c_2, c_3, c_4)$. Тоді значення функції $f(x)$ у довільній точці p_i ($1 \leq i \leq 24$) визначається як скалярний добуток $f(p_i) = (p_i, c)$. Покажемо, що граф $G(P_4)$ можна побудувати індуктивним способом, починаючи з двох перших перестановок. Уявимо, що вершини p_1 і p_2 складають підграф графа $G(P_4)$, у якого фіксовані два останні елементи 3 і 4. Вершина p_2 утворена з p_1 шляхом транспозиції елементів 1 і 2, тому згідно лемі 4.1 $f(p_1) \geq f(p_2)$. Якщо тепер у вершинах p_1 і p_2 поміняти місцями елементи 2 і 3, то одержимо вершини p_3 і p_4 , у яких залишається співвідношення $f(p_3) \geq f(p_4)$, крім того, за лемою 4.1 одержуємо $f(p_1) \geq f(p_3)$ і $f(p_2) \geq f(p_4)$. Аналогічно, шляхом транспозиції елементів 1 і 2 одержимо з p_3 і p_4 вершини p_5 і p_6 . В результаті цих дій одержимо підграф A , який містить всі перестановки P_4 з фіксованим четвертим елементом $x_4 = 4$. Очевидно, що в підграфі A $f(x)$ приймає максимальне значення у вершині p_1 і мінімальне – у вершині p_6 . Проте для побудови гамільтонового шляху в цьому підграфі дуг не вистачає. Можна було б побудувати ще одну дугу з вершини p_2 до вершини p_5 , оскільки ці перестановки відрізняються між собою транспозицією чисел 1 і 3, але цього також не вистачає (ця дуга відмічена пунктиром).

Візьмемо тепер всі перестановки підграфа A і одночасно зробимо в них транспозицію чисел 3 і 4. В результаті одержимо підграф B , який містить всі ті перестановки P_4 , у яких фіксований четвертий елемент $x_4 = 3$. За лемою 4.1 відповідні вершини підграфів A і B суміжні і з'єднуючі їх дуги йдуть зверху (від

підграфа A) вниз (до підграфа B). Очевидно, що внутрішня орієнтація підграфа B зберігає внутрішню орієнтацію підграфа A . Якщо тепер у підграфі B у всіх перестановках зробити транспозицію чисел 2 і 3, то в результаті одержимо підграф C , що містить всі ті перестановки P_4 , у яких зафіксований четвертий елемент $x_4 = 2$. Очевидно, що цей підграф також зберігає внутрішню орієнтацію підграфа B (а також підграфа A), і в кожну його вершину входить дуга від відповідної вершини підграфа B . І, нарешті, якщо в підграфі C у кожній перестановці зробимо транспозицію чисел 1 і 2, то одержимо підграф D , який містить всі перестановки P_4 з фіксованим четвертим елементом $x_4 = 1$.

Всі чотири підграфи A, B, C, D утворюють граф $G(P_4)$. Можна говорити, що він побудований індуктивним шляхом, починаючи з двох вершин p_1 і p_2 . Спочатку ці вершини як би проектувалися послідовно двічі, утворюючи підграф A . Потім, підграф A проектувався тричі, утворюючи весь граф $G(P_4)$.

Повернемося тепер до питання про побудову гамільтонового шляху в підграфі A . Було б принципово важливим встановити співвідношення значень функцій в точках p_2 і p_3 , а також в точках p_4 і p_5 . Розглянемо відповідні різниці, які позначимо δf :

$$\delta f(2,3) = f(p_2) - f(p_3) = (p_2, c) - (p_3, c) = c_1 - 2c_2 + c_3;$$

$$\delta f(4,5) = f(p_4) - f(p_5) = (p_4, c) - (p_5, c) = c_1 - 2c_2 + c_3. \quad (4.13)$$

Ці різниці співпадають, тому якщо ми знаємо значення $\delta f(2,3)$, то цього достатньо для визначення гамільтонова шляху в підграфі A . Якщо $\delta f(2,3) \geq 0$, то одержуємо дуги $p_2 p_3$ і $p_4 p_5$, що визначає гамільтонов шлях $\sigma_1(A) = (1, 2, 3, 4, 5, 6)$. Якщо $\delta f(2,3) < 0$, то одержуємо дуги $p_3 p_2$ і $p_5 p_4$, що дає гамільтонов шлях $\sigma_2(A) = (1, 3, 2, 5, 4, 6)$.

З огляду на те, що при проектуванні підграфа A на підграфи B , C і D перші три елементи в перестановках міняються, то співвідношення (4.13), справедливі для підграфа A , на подальші підграфи не переносяться. Введемо позначення: $\Delta_i = c_{i+1} - c_i$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$). Нехай $\alpha(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-2})$ – вектор, що відображає особливості заданої лінійної функції:

$$\Delta_i = \alpha_{i-1} \Delta_{i-1} \quad (i = 2, 3, \dots, n-1).$$

У кожному підграфі A, B, C, D четвертий елемент всіх перестановок фіксований, тому структура цих підграфів залежить тільки від перших трьох елементів, які для загального випадку позначимо (i_1, i_2, i_3) , де $(i_1 < i_2 < i_3)$. У кожному підграфі ці елементи визначають першу вершину p_j , де $j \equiv 1 \pmod{6}$, тобто вершини p_1, p_7, p_{13}, p_{19} . Якщо для довільного n з $G(P_n)$ вибрати підграф, у якого в перестановках зафіксовані $n-4$ останні елементи $(i_5, i_6, \dots, i_{n-1}, i_n) \in N_n$, то одержимо підграф типу $G(P_4)$, у якого замість елементів 1, 2, 3, 4 будуть елементи $i_1 < i_2 < i_3 < i_4$. У графі A буде зафіксований четвертий елемент i_4 , в графі B – елемент i_3 , в графі C – елемент i_2 , і в графі D – елемент i_1 .

Визначення 4.2. Назвемо структурними коефіцієнтами графа $G(P_4)$ величини:

$$\lambda_A = \frac{i_2 - i_1}{i_3 - i_2}; \quad \lambda_B = \frac{i_2 - i_1}{i_4 - i_2}; \quad \lambda_C = \frac{i_3 - i_1}{i_4 - i_3}; \quad \lambda_D = \frac{i_3 - i_2}{i_4 - i_3}.$$

Для побудови гамільтонового шляху в кожному підграфі необхідно обчислити різницю значень функції у вершинах p_i і p_j , де $i \equiv 2 \pmod{6}$, $j \equiv 3 \pmod{6}$, а також у вершинах p_k і p_l , де $k \equiv 4 \pmod{6}$, $l \equiv 5 \pmod{6}$. У підграфі A $p_i = (i_2, i_1, i_3, i_4)$, $p_j = (i_1, i_3, i_2, i_4)$. Тому

$$\delta f(2,3) = (p_{i,c}) - (p_{j,c}) = c_1(i_2 - i_1) - c_2(i_3 - i_1) + c_3(i_3 - i_2),$$

$$\delta f(2,3) = -(i_2 - i_1)\Delta_1 + (i_3 - i_2)\Delta_2. \quad (4.14)$$

Дуга, що сполучає вершини p_2 і p_3 , матиме напрям p_2p_3 , якщо $\delta f(2,3) \geq 0$. А це буде тільки при умові:

$$\frac{\Delta_2}{\Delta_1} \geq \frac{i_2 - i_1}{i_3 - i_2}, \text{ або } \alpha_1 \geq \lambda_A. \quad (4.15)$$

Продовжуючи такі ж обчислення щодо вершин p_4 і p_5 , одержимо $f(4,5) = -(i_3 - i_2)\Delta_1 + (i_2 - i_1)\Delta_2$. Дуга матиме напрям p_4p_5 , якщо виконуються умови

$$\frac{\Delta_2}{\Delta_1} \geq \frac{i_3 - i_2}{i_2 - i_1}, \text{ або } \alpha_1 \geq \frac{1}{\lambda_A}. \quad (4.16)$$

Аналогічні результати можна одержати і для інших підграфів. Наприклад, для підграфа C обчислимо $\delta f(14,15)$. Дуга матиме напрям $p_{14}p_{15}$, якщо

$$\frac{\Delta_2}{\Delta_1} \geq \frac{i_3 - i_1}{i_4 - i_3}, \text{ або } \alpha_1 \geq \lambda_C,$$

а дуга $p_{16}p_{17}$ матиме місце, якщо $\alpha_1 \geq \frac{1}{\lambda_C}$.

Розглянемо номери вершин графа $G(P_4)$ у класі лишків за $\text{mod } 6$, де за повну систему лишків прийнята множина $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$. Останні обчислення дають право стверджувати, що справедлива наступна теорема:

Теорема 4.2. У довільному підграфі X графа $G(P_4)$, де $X \in \{A, B, C, D\}$, гамільтонів шлях проходить в послідовності:

$$(1, 3, 2, 5, 4, 6)(\text{mod } 6), \text{ якщо } \alpha_1 \leq \min\left(\lambda_x, \frac{1}{\lambda_x}\right);$$

$$(1, 2, 3, 4, 5, 6)(\text{mod } 6), \text{ якщо } \alpha_1 \geq \max\left(\lambda_x, \frac{1}{\lambda_x}\right);$$

$(1, 3, 2, 4, 5, 6)(\text{mod } 6)$, якщо $1/\lambda_x \leq \alpha_1 \leq \lambda_x$, і $\lambda_x \geq 1$; (4.19)

$(1, 2, 3, 5, 4, 6)(\text{mod } 6)$, якщо $\lambda_x \leq \alpha_1 \leq 1/\lambda_x$, і $\lambda_x \leq 1$.

Всі вказані чотири гамільтонові шляхи можуть мати місце при одній умові, якщо для a_1 ні в одному з обмежень (4.9) не виконується рівність. Якщо виконується рівність типу (4.7), то $f(p_i) = f(p_j)$, ребро $p_i p_j$ неорієнтоване і його можна проходити в довільному напрямі, звідки витікає, що шляхи перший і четвертий (або другий і третій) рівноправні. Якщо ж виконується рівність типу (8), то те ж справедливе щодо ребра $p_i p_j$, де $i \equiv 4(\text{mod } 6)$, а $j \equiv 5(\text{mod } 6)$, і тоді шляхи перший і третій (або другий і четвертий) рівноправні. Особливий випадок виникає при $\lambda_x = 1$. Якщо $\alpha_1 \neq 1$, то можливі тільки два перші гамільтонові шляхи. Якщо $\alpha_1 = 1$, то тоді всі чотири шляхи рівноправні, оскільки вказані дві пари вершин можна об'єднати і одержати дві вершини, а гамільтонові шляхи запишуться в загальному вигляді $[1, (2, 3), (4, 5), 6] (\text{mod } 6)$. Щоб надалі уникати невизначеностей такого роду, значення α_1 , що дорівнюють якому-небудь параметру λ_x (чи $1/\lambda_x$), приписуватимемо до лівого інтервалу. Тим самим ми доб'ємося, що в довільному випадку для кожного підграфа A, B, C, D буде вибраний один з чотирьох можливих гамільтонових шляхів. Чи означає це, що для побудови гамільтонового шляху в графі $G(P_4)$ доведеться розглядати 44 варіанти різних поєднань цих шляхів. Розглянемо це питання з урахуванням наступного твердження.

Лема 4.6. Для структурних коефіцієнтів підграфів A, B, C, D справедливі співвідношення:

$$(a) \lambda_A > \lambda_B; \lambda_C > \lambda_B; \lambda_C > \lambda_D;$$

$$(б) 1/\lambda_A < 1/\lambda_B; 1/\lambda_C < 1/\lambda_B; 1/\lambda_C < 1/\lambda_D.$$

Очевидно, що (б) виходить з (а), тому достатньо довести справедливість (а). Перша нерівність виходить з того, що у двох величин чисельники однакові, а знаменник більше у λ_B , оскільки $i_4 > i_3$. Друга нерівність виходить з того, що у λ_C чисельник більше, а знаменник менше, ніж у λ_B . Третя нерівність витікає з того, що у двох величин знаменники однакові, а чисельник у λ_B більше, оскільки $i_3 - i_1$ більше $i_2 - i_1$.

Теорема 4.4. Існує не більш дев'яти сумісних варіантів побудови гамільтонових шляхів в підграфах A, B, C, D графа перестановок $G(P_4)$.

Лема 4.6 дозволяє встановити часткову впорядкованість для значень λ_X і $1/\lambda_X$, де $X \in \{A, B, C, D\}$. Ця залежність відображена на рис. 4.22

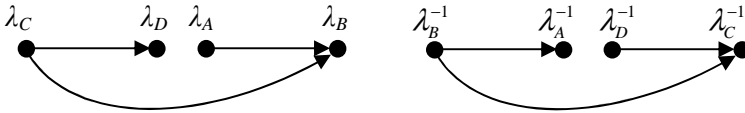


Рис. 4.22. Частково упорядковані структурні коефіцієнти

Якщо ніякі два з цих восьми параметрів не дорівнюють один одному, то при різних їх значеннях на числовій осі вони утворюють 9 інтервалів, в один з яких потрапляє конкретне значення α_1 . Якщо деякі з цих параметрів співпадають, то число інтервалів зменшується, що і доводить теорему. Розглянемо приклад.

Приклад 4.4. Нехай $i_1 = 1, i_2 = 2, i_3 = 4, i_4 = 9$. Знаходимо значення

$$\lambda_A = 1/2, \lambda_B = 1/7, \lambda_C = 3/5, \lambda_D = 2/5,$$

$$1/\lambda_A = 2, 1/\lambda_B = 7, 1/\lambda_C = 5/3, 1/\lambda_D = 5/2.$$

Після впорядкування одержимо зростаючу послідовність точок на числовій осі $(1/7, 2/5, 1/2, 3/5, 5/3, 5/2, 2, 7)$.

Результати розрахунків наведені в таблиці 4.1.

Таблиці 4.1

Гамільтонові шляхи

№	Значення α_1	Гамільтонові шляхи в підграфах по вершинах			
		A	B	C	D
1	$\alpha_1 < 1/7$	1, 3, 2, 5, 4, 6	7, 9, 8, 11, 10, 12	13, 15, 14, 17, 16, 18	19, 21, 20, 23, 22, 24
2	$1/7 < \alpha_1 < 2/5$	1, 3, 2, 5, 4, 6	7, 8, 9, 11, 10, 12	13, 15, 14, 17, 16, 18	19, 21, 20, 23, 22, 24
3	$2/5 < \alpha_1 < 1/2$	1, 3, 2, 5, 4, 6	7, 8, 9, 11, 10, 12	13, 15, 14, 17, 16, 18	19, 20, 21, 23, 22, 24
4	$1/2 < \alpha_1 < 3/5$	1, 2, 3, 5, 4, 6	7, 8, 9, 11, 10, 12	13, 15, 14, 17, 16, 18	19, 20, 21, 23, 22, 24
5	$3/5 < \alpha_1 < 5/3$	1, 2, 3, 5, 4, 6	7, 8, 9, 11, 10, 12	13, 15, 14, 17, 16, 18	19, 20, 21, 23, 22, 24
6	$5/3 < \alpha_1 < 5/2$	1, 2, 3, 5, 4, 6	7, 8, 9, 11, 10, 12	13, 14, 15, 17, 16, 18	19, 20, 21, 23, 22, 24
7	$5/2 < \alpha_1 < 2$	1, 2, 3, 5, 4, 6	7, 8, 9, 11, 10, 12	13, 14, 15, 16, 17, 18	19, 20, 21, 22, 23, 24
8	$2 < \alpha_1 < 7$	1, 2, 3, 4, 5, 6	7, 8, 9, 11, 10, 12	13, 14, 15, 16, 17, 18	19, 20, 21, 22, 23, 24
9	$7 < \alpha_1$	1, 2, 3, 4, 5, 6	7, 8, 9, 10, 11, 12	13, 14, 15, 16, 17, 18	19, 20, 21, 22, 23, 24

Неважко бачити, що всі гамільтонові шляхи в підграфах однозначно визначаються, якщо відомий тільки один параметр – α_1 . Для побудови гамільтонового шляху на всьому графі $G(P_4)$ необхідно використовувати другий параметр – α_2 . В залежності від поєднань цього параметра із значеннями структурних коефіцієнтів підграфів вийдуть різні варіанти гамільтонового шляху в графі $G(P_4)$. Якщо ці варіанти будуть відомі, то тоді задачі на перестановках для $n > 4$ можна зводити до підзадач на підграфах з $n = 4$.

Для $n = 5$, теорема так само виконується, оскільки в множині перестановок $P(A)$ розглядається $5! = 120$ точок, які розташовані на 5 гіперплощинах вигляду A (рис. 4.7) і містять по 24 точки кожна. Для розмірності n матимемо ту ж ситуацію, що і у попередньому випадку, тобто переставний многогранник завжди міститиме грані вигляду A , тому є необхідність розглядати α -питання.

Висновки до розділу

У даному розділі описується застосування нового методу направленої структуризації для розв'язування екстремальних задач з лінійною цільовою функцією на комбінаторних конфігураціях перестановок.

Зокрема, в розділі розглянуто оптимізацію лінійної функції без додаткових обмежень, тобто комбінаторну безумовну задачу.

На підставі встановленого взаємозв'язку між задачами на комбінаторних множинах і графами комбінаторних конфігурацій вивчаються деякі структурні властивості допустимої області, а також сформульовано ряд тверджень, що дають можливість застосувати теорію графів для побудови методу розв'язання екстремальних задач.

Також в розділі вирішуються додаткові підзадачі, що використовуються в подальшому для реалізації методу направленої структуризації. Розглянуто метод упорядкування значень лінійної функції на комбінаторній конфігурації перестановок, досліджено та побудовано орієнтований граф комбінаторної конфігурації перестановок та гамільтонів шлях в ньому за значеннями лінійної цільової функції.

На основі описаних в попередньому розділі нових методів генерування комбінаторних об'єктів побудовано алгоритм пошуку значень лінійної функції на лексикографічно упорядкованих перестановках.

Розглянуто алгоритм відображення номера перестановки N за елементом перестановки $P(A)$. Даний алгоритм дає можливість розв'язати обернену задачу: за заданою перестановкою знайти її номер в лексикографічно впорядкованій послідовності перестановок. Розглянуто реалізацію даного алгоритму на прикладах.

Розглянуто задачі на комбінаторній конфігурації перестановок та підхід до їх розв'язання, що ґрунтується на відповідності множини перестановок $P(A)$ повному орієнтованому графу, в якому перестановки представлені як вершини, а дві вершини $p_1, p_2 \in P_n(A)$, сполучені дугою, що йде від p_1 до p_2 , якщо $F(p_1) \geq F(p_2)$. Доведено, що максимальне значення функція приймає у вершині, в яку не входить жодна дуга, а мінімальне – у вершині, з якої не виходить жодна дуга.

Побудовано гамільтонів шлях в такому графі, що відповідає послідовності перестановок, для яких значення функції утворює незростаючу послідовність. Передбачено, що тоді екстремальну задачу на комбінаторній конфігурації перестановок можна розв'язати шляхом дихотомії послідовності перестановок до тих пір, поки шуканий аргумент для заданого значення функції не потрапить в інтервал мінімальної довжини.

Встановлено умови гамільтоновості графів переставних многогранників для значення $n \leq 5$.

Досліджені та сформульовані властивості дають можливість побудови нових підходів до розв'язування інших типів екстремальних задач як умовних так і безумовних з іншими цільовими функціями та додатковими обмеженнями.

РОЗДІЛ 5. ОПТИМІЗАЦІЯ ДРОБОВО-ЛІНІЙНОЇ ФУНКЦІЇ НА КОМБІНАТОРНИХ КОНФІГУРАЦІЯХ

Значне розширення областей застосування обчислювальної техніки і детальніше використання економіко-математичних моделей приводить до необхідності розв'язання складних задач великої вимірності. Великий інтерес представляють задачі, в яких цільова функція є дробово-лінійною [59, 97, 98, 278–280]. Дробово-лінійна функція, це функція, що характеризується відношенням двох лінійних форм. Як відомо, такі функції застосовуються в ряді прикладних задач оптимізації деяких відносних показників якості, таких як собівартість, рентабельність, продуктивність, трудомісткість і т.д. Моделі, що використовують вказані критерії, відображають тенденції постійного зниження рівня собівартості з розрахунку на одиницю продукції і підвищення якісних показників виробництва при збільшенні масштабів виробництва.

Дробово-лінійні критерії часто зустрічаються, наприклад, у області фінансової діяльності, при плануванні діяльності корпорацій, де необхідно мінімізувати відношення боргу до вартості власних засобів, максимізувати відношення випуску продукції на одного працюючого; у управління банківського балансу, де необхідно мінімізувати відношення ризикованих вкладень до капіталу, максимізувати відношення реального капіталу до необхідного капіталу, відношення застав на житлі до загальної суми застав і ін. Слід зазначити, що множини – область допустимих розв'язків задачі з дробово-лінійною функцією в багатьох задачах мають властивості комбінаторних конфігурацій: перестановок, розміщень, сполучень та ін.

5.1. Постановка задачі з дробово-лінійними функціями критеріїв на графах

Як було встановлено в попередніх розділах, екстремальні задачі на комбінаторних конфігураціях представляють собою оптимізацію деякої функції $F(x)$ на комбінаторних конфігураціях, що визначаються множиною $A = \{\pi_i\} = \{(a_1, a_2, \dots, a_r)\}$, де $\pi_i = a_1, a_2, \dots, a_r$, за допомогою якої формуються перестановки, сполучення, розміщення, різні послідовності і т. п.

Екстремальні комбінаторні задачі з лінійною цільовою функцією тісно пов'язані з методами лінійного програмування. Якщо ж функція дробово-лінійна, то як правило застосовуються методи лінеаризації функції – тобто зведення її до лінійної форми. Далі розглядається задача знаходження екстремуму цієї функції на опуклій оболонці заданих точок – на опуклому многограннику. Знову екстремум лінійної форми на многограннику досягається в одній з вершин, які входять в множину даних елементів. Особливістю комбінаторних задач при такому зведенні залишається те, що при знаходженні розв'язків необхідно визначити точки з цілочисловими координатами. Для розв'язання екстремальних задач з дробово-лінійною функцією це не завжди є доцільним і виправданим. Як було показано в попередніх розділах, навіть для лінійної цільової функції використання методів лінійного програмування не завжди адекватно дає можливість інтерпретувати розв'язки задачі. Але враховуючи особливості екстремальних задач на комбінаторних конфігураціях, для даної задачі з дробово-лінійною функцією цілі є також доцільним розглянути підзадачу визначення гамільтонового шляху, який відображає зміну значення дробово-лінійного функціонала на комбінаторних конфігураціях.

Розглядається задача на множині перестановок. Як відомо, переставний многогранник можна представити у вигляді графа, який описаний в роботі [87]. У цьому графі вершинами служить множина всіх перестановок P_n , а дві вершини $p_1, p_2 \in P_n$ утворюють дугу $\overset{\rightarrow}{p_1 p_2}$, якщо $f(p_1) \geq f(p_2)$, і якщо перестановка p_2 одержана з p_1 за допомогою транспозиції двох елементів.

Тоді розглянемо наступну **задачу**: знайти множину перестановок, в яких значення цільової функції рівно заданому значенню, тобто

$$x^* = \underset{x \in P_n}{\operatorname{arg}} f(x),$$

де $f(x^*) = y$. Такі задачі розглянуті в [60, 61] для випадку, коли цільова функція – лінійна. У даному випадку функція представляється в дробово-лінійному вигляді, як відношення двох лінійних форм, що значно ускладнює задачу. Тоді вище сформу-

льована задача зводиться до знаходження множини точок – перестановок, в яких досягається задане значення дробово-лінійного функціоналу:

$$x^* = \underset{x \in P_n}{\operatorname{arg}} F(x) = \underset{x \in P_n}{\operatorname{arg}} \frac{f(x)}{g(x)}, \quad (5.1)$$

де $y = F(x)$.

Також має сенс розглядати аналогічну задачу, де не завжди існують перестановки, в яких цільова функція приймає задане значення. Тоді вище сформульована проблема формулюється наступним чином: визначити множину пар перестановок (\underline{x}, \bar{x}) , для яких при заданому y

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \underset{F(x) > y}{\operatorname{arg}} \min F(x) = \underset{F(x) > y}{\operatorname{arg}} \min \frac{f(x)}{g(x)}, \\ \underline{x} &= \underset{F(x) < y}{\operatorname{arg}} \max F(x) = \underset{F(x) < y}{\operatorname{arg}} \max \frac{f(x)}{g(x)}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

5.2. Властивості області допустимих значень дробово-лінійних функцій на графах

Зазначимо деякі властивості дробово-лінійної функції, які будуть корисні для подальшого розв'язання задачі.

Дробово-лінійна функція $F(x) = (\langle c, x \rangle + c_0) / (\langle d, x \rangle + d_0)$ не є ні увігнутою, ні опуклою. Поверхні рівня будь-якої функції $F(x)$, тобто множини $L_\alpha = \{x \in R^n \mid F(x) = \alpha\}$ є гіперплощинами.

Відомо, що будь-який локальний мінімум задачі дробово-лінійного програмування є в той же час глобальним, і якщо оптимальний розв'язок скінченний, то існує крайня точка многогранника M – області допустимих розв'язків, яка є оптимальною. Це твердження виконується, якщо чисельник і знаменник дробово-лінійної функції не перетворюються одночасно в нуль $\forall x \in X$.

Припустимо, що $\langle d, x \rangle + d_0 > 0 \forall x \in M$. Відомо, що на будь-якому прямолінійному відрізку, який належить многограннику M , дробово-лінійна функція $F(x)$ змінюється монотонно.

Теорема 5.1. Дробово-лінійна функція $F(x)$, досягає мінімуму (максимуму) тільки у вершинах многогранника M . Якщо мінімум (максимум) досягається в декількох крайніх точках, то він досягається і на їх опуклій оболонці.

Визначення 5.1. Неперервна функція $F(x)$ є квазіопуклою функцією на опуклій множині M , якщо виконується будь-яка з наступних еквівалентних умов:

(a) множина $\{x \in R^n / F(x) \leq q, x \in M\}$ – опукла для всіх q , $M \subset R^n$;

(b) $x_1, x_2 \in M, F(x_2) < F(x_1) \Rightarrow F(\lambda x_2 + (1-\lambda)x_1) \leq F(x_1)$, $0 \leq \lambda \leq 1$.

Визначення 5.2. Функція $F(x)$ є строго квазіопуклою на множині M , якщо в умові (b) фігурують строгі нерівності.

Теорема 5.2. Будь-який локальний мінімум в строго квазіопуклій функції є глобальним.

Оскільки множина

$$\left\{x \in R^n \mid \left(\langle c, x \rangle + c_0 \right) / \left(\langle d, x \rangle + d_0 \right) \leq q, x \in M \right\},$$

опукла для всіх значень q , то функція $F(x) = (\langle c, x \rangle + c_0) / (\langle d, x \rangle + d_0)$ є квазівипукла на множині M . Неважко показати, що функція $\langle c, x \rangle / \langle d, x \rangle$ є строго квазіопуклою на M .

Очевидно, що функція $F(x)$ є квазіувігнутою на опуклій множині S , якщо функція $(-F(x))$ квазіопукла.

Якщо зробити заміну: $F_i(x)$ на $-F_i(x)$, ту умову (b) для квазіувігнутих функцій можна записати в наступному вигляді:

$$F_i(x_2) > F_i(x_1) \Rightarrow F_i(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq F_i(x_1),$$

$$F_i(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq F_i(x_1), \text{ або}$$

$$F_i(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min[F_i(x_1), F_i(x_2)],$$

для будь-яких $x_1, x_2 \in S$ і $0 \leq \lambda \leq 1$. Для увігнутих і квазіувігнутих функцій з точністю до зміни знаків зберігаються властивості опуклих і квазіопуклих функцій.

Як відомо, для розв'язання задач з дробово-лінійною функцією цілі існує велика кількість методів, які умовно поділяються на методи лінеаризації, параметричні методи, модифікації симплексу-методів, серед яких відомими є метод Чарнса і Купера, алгоритм Гілморі і Гоморі і інші. Як наголошується в [278, 279], всі ці методи мають близьку обчислювальну складність, а пріоритет віддається методу, що дозволяє ефективніше вирішувати дробово-лінійну задачу в конкретних практичних умовах (зважаючи на розмірність задачі, структура системи обмежень, наявність програмного забезпечення і т. п.). Найкращим є методи зведення до розв'язання серії задач лінійного програмування, для яких розроблено ефективне програмне забезпечення для різних типів комп'ютерів. Але, сьогодні представляють інтерес методи, в основі яких лежать структурні особливості області допустимих рішень, їх властивості. У основі розглядається підхід якраз і лежать деякі структурні властивості переставного многогранника і його графа, який є областю допустимих рішень задачі.

5.3. Підхід до розв'язання екстремальної задачі з дробово-лінійним функціоналом на перестановках

Розглянемо дробово-лінійну функцію $F(x)$, де чисельник $f(x)$ і знаменник $g(x)$ – дві лінійні функції, в яких коефіцієнти визначаються за правилом арифметичної прогресії:

$$c_i = c_1 + \Delta(i-1), \quad d_i = d_1 + \delta(i-1). \quad (5.3)$$

Згідно цим позначенням чисельник і знаменник дробово-лінійної функції для даної перестановки p можна представити відповідно: $f(x) = (\bar{c}, x(p))$, де $x(p)$ – вектор змінних

$(x_{p(1)}, x_{p(2)}, \dots, x_{p(n)})$, а $g(x) = (\bar{d}, x(p))$, де $p \in P_n$ – множина перестановок, а множина (x_1, x_2, \dots, x_n) , де $x_i \in N$, тобто перестановці множини $(1, 2, \dots, n)$ ставиться в відповідність вектор $p = (x_{p(1)}, x_{p(2)}, \dots, x_{p(n)})$.

Розглянемо значення дробово-лінійної функції в двох різних π, σ , перестановках, які відповідають номерам p_1, p_2 і порівняємо їх:

$$\frac{(\bar{c}, x(\pi))}{(\bar{d}, x(\pi))} - \frac{(\bar{c}, x(\sigma))}{(\bar{d}, x(\sigma))}.$$

Визначимо наступне співвідношення, в вигляді коефіцієнта $\rho(\pi, \sigma)$, що характеризуватиме деяку відмінність між значеннями функцій в сусідніх перестановках π, σ , що відрізняються одна від одної однією транспозицією:

$$\rho(p_1, p_2) = (p_1, \bar{c})(p_2, \bar{d}) - (p_2, \bar{c})(p_1, \bar{d}).$$

Тоді, очевидно що, якщо $\rho(p_1, p_2) \geq 0$, то $F(p_1) \geq F(p_2)$.

Розглянемо далі наступні міркування, підставивши значення змінних в чисельник і знаменник функції:

$$\bar{c} \cdot x(\pi) = c_1 x_{\pi(1)} + c_2 x_{\pi(2)} + \dots + c_n x_{\pi(n)} = c_1 \sum_{i=1}^n x_i + \Delta(p_0 x(\pi)),$$

$$p_0 = (0, 1, \dots, n-1), \quad \sum_{i=1}^n x_i = S, \quad \text{для знаменника аналогічно.}$$

Визначимо співвідношення різниці:

$$\frac{c_1 S + \Delta(p_0 \cdot x(\pi))}{d_1 S + \delta(p_0 \cdot x(\pi))} - \frac{c_1 S + \Delta(p_0 \cdot x(\sigma))}{d_1 S + \delta(p_0 \cdot x(\sigma))},$$

зробимо математичні перетворення

$$c_1 d_1 S^2 + c_1 \delta S(p_0 x(\sigma)) + d_1 \Delta S(p_0 x(\pi)) +$$

$$\begin{aligned}
& -\Delta\delta\left[\left(p_0(x(\pi))\right)\cdot\left(p_0(x(\sigma))\right)\right]- \\
& -c_1d_1S^2 - c_1\delta S\left(p_0x(\pi)\right) - d_1\Delta S\left(p_0x(\sigma)\right) - \\
& -\Delta\delta\left[\left(p_0(x(\pi))\right)\cdot\left(p_0(x(\sigma))\right)\right].
\end{aligned}$$

Зведемо подібні доданки, одержимо

$$\begin{aligned}
& S\left[c_1\delta - d_1\Delta\right]\left(p_0x(\sigma)\right) + S\left[c_1\delta - d_1\Delta\right]\left(p_0x(\pi)\right); \\
& S\left[c_1\delta - d_1\Delta\right]\left(p_0x(\sigma) - \left(p_0x(\pi)\right)\right) = S\left[c_1\delta - d_1\Delta\right]p_0\left(x(\sigma) - x(\pi)\right).
\end{aligned}$$

Розглянемо дві перестановки:

$$\begin{aligned}
\pi & = \left(x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, \dots, x_{\pi(j)}, \dots, x_{\pi(k)}, \dots\right), \\
\sigma & = \left(x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, \dots, x_{\pi(k)}, \dots, x_{\pi(j)}, \dots\right), \\
(j-1)\left[-x_{\pi(j)} + x_{\pi(k)}\right] + (k-1)\left[x_{\pi(k)} - x_{\pi(j)}\right] & = \\
(k-j)\left[x_{\pi(k)} - x_{\pi(j)}\right].
\end{aligned}$$

Далі приведемо міркування для $n=3$, що визначає кількість елементів перестановки в множині P_n , складених із множини $A(a_1, a_2, a_3)$, оскільки їх же можна адаптувати на більш загальний випадок.

Для прикладу розглянемо дві перестановки $p_1 = (1, 2, 3)$, $p_2 = (1, 3, 2)$, підставивши їх в цільову функцію $F(x)$ і розглянемо знак різниці між ними:

$$\frac{c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3}{d_1x_1 + d_2x_2 + d_3x_3} \sim \frac{c_1x_1 + c_2x_3 + c_3x_2}{d_1x_1 + d_2x_3 + d_3x_2}. \quad (5.4)$$

Помітимо, що знак різниці визначається знаком чисельника, а знаменник не впливає на знак, тому розглянемо співвідношення чисельника (5.4).

Після елементарних математичних перетворень над пропорціями, одержимо наступний вираз:

$$\begin{aligned} & x_2^2(c_2d_3 - c_3d_2) + x_3^2(c_3d_2 - c_2d_3) + \\ & + x_1x_2(c_1d_3 - c_3d_1 + c_2d_1 - c_1d_2) + \\ & + x_1x_3(c_1d_2 - c_2d_1 + c_3d_1 - c_1d_3). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Введемо наступні позначення:

$$\left| \begin{array}{c} c_1, c_2 \\ d_1, d_2 \end{array} \right| = m_{12}; \quad \left| \begin{array}{c} c_1, c_3 \\ d_1, d_3 \end{array} \right| = m_{13}; \quad \left| \begin{array}{c} c_2, c_3 \\ d_2, d_3 \end{array} \right| = m_{23}. \quad (5.6)$$

Підставляючи позначення (5.6) в (5.5), одержимо наступний вирази:

$$\begin{aligned} & x_2^2m_{23} - x_3^2m_{23} = m_{23}(x_2^2 - x_3^2); \\ & x_1x_2(c_1d_3 - c_3d_1 + c_2d_1 - c_1d_2) = x_1x_2(m_{13} - m_{12}); \\ & x_1x_3(c_1d_2 - c_2d_1 + c_3d_1 - c_1d_3) = x_1x_3(m_{12} - m_{13}), \end{aligned}$$

і після зведення подібних доданків, маємо:

$$m_{12}(x_1x_3 - x_1x_2) + m_{13}(x_1x_2 - x_1x_3) + m_{23}(x_2^2 - x_3^2).$$

Введемо коефіцієнт $\rho(p_i, p_j)$, який визначає знак різниці між заданими перестановками p_i, p_j .

Визначення 5.3. Мінор матриці утвореної двома рядками коефіцієнтів, заданими згідно формули (5.3), цільової дробово-лінійної функції $F(x)$:

$$m_{ij} = \left| \begin{array}{cc} c_i & c_j \\ d_i & d_j \end{array} \right|$$

називається мінором цільової функції, що визначає знак між двома перестановками p_i, p_j у яких досягається значення цієї цільової функції.

Тоді, враховуючи (5.5) і правило знаходження визначника, між перестановками p_1, p_2 знак різниці визначається таким чином:

$$\rho(p_1, p_2) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = m_{12} - m_{13} - 5m_{23},$$

і залежить від мінору другого порядку m_{ij} .

Визначення 5.4. Назвемо коефіцієнти при мінорах m_{12}, m_{13}, m_{23} відповідно $\lambda_{12}, \lambda_{13}, \lambda_{23}$, тоді $\vec{\lambda}(i, j) = (\lambda_{12}, \lambda_{13}, \lambda_{23})$.

Враховуючи, що для $n = 3$ для лінійної функції $f(x)$ структурний граф переставного многогранника M матиме наступний вигляд:

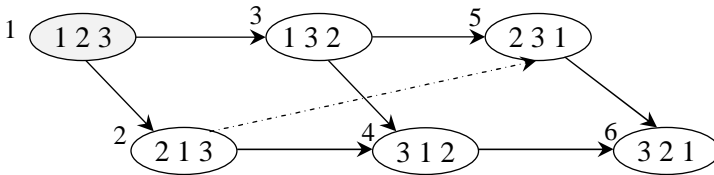


Рис. 5.1. Структурований граф переставного многогранника $n = 3$

Визначимо відстані між точками: $\rho(1, 3) = (1, -1, -5)$, $\rho(1, 2) = (-3, -3, 3)$, $\rho(2, 4) = (-1, -5, -1)$, $\rho(3, 4) = (-8, -4, 4)$, $\rho(3, 5) = (-3, -3, -3)$, $\rho(4, 6) = (3, -3, -3)$, $\rho(5, 6) = (-5, -1, 1)$, $\rho(1, 4) = (-5, -7, 1)$, $\rho(1, 6) = (-4, -8, -4)$, $\rho(2, 3) = (5, 1, -7)$.

Враховуючи, що коефіцієнти цільової функції визначені згідно наступних формул:

$$c_i = c_1 + \Delta(i-1), \quad d_i = d_1 + \delta(i-1),$$

зробимо заміну у виразах (5.5), тоді маємо наступні вирази:

$$\begin{aligned}
m_{12} &= \left| \begin{array}{c} c_1, c_1 + \Delta \\ d_1, d_1 + \delta \end{array} \right| = \delta c_1 - \Delta d_1; \\
m_{13} &= \left| \begin{array}{c} c_1, c_1 + 2\Delta \\ d_1, d_1 + 2\delta \end{array} \right| = 2(\delta c_1 - \Delta d_1) = 2m_{12}; \\
m_{23} &= \left| \begin{array}{c} c_1 + \Delta, c_1 + 2\Delta \\ d_1 + \delta, d_1 + 2\delta \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} c_1 + \Delta, \Delta \\ d_1 + \delta, \delta \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} c_1, \Delta \\ d_1, \delta \end{array} \right| = m_{12}. \quad (5.7)
\end{aligned}$$

Підставляючи (5.7) в значення відстаней між точками – перестановками, одержимо:

$$\begin{aligned}
\rho(1, 3) &= -6m_{11}, \quad \rho(1, 2) = -6m_{11}, \quad \rho(2, 4) = -12m_{11}, \\
\rho(3, 4) &= -12m_{11}, \quad \rho(3, 5) = -6m_{11}, \quad \rho(4, 6) = -6m_{11}, \\
\rho(5, 6) &= -6m_{11}.
\end{aligned}$$

На підставі зроблених розрахунків коефіцієнтів можна побудувати гамільтонів шлях усередині кожної шестірки, елементів перестановки і прослідити зміни значень цільової функції у вершинах графа та на кожному з підграфів, так як і для лінійної функції.

На підставі вище висловлених міркувань для переставного многогранника $n = 3$, сформулюємо деякі значущі факти для довільного значення n .

Лема 5.1. Для $n \geq 3$ і $(i \neq j)$ справедлива наступна рівність

$$m_{ij} = \left| \begin{array}{c} c_1 + (j-i)\Delta \\ d_1 + (j-i)\delta \end{array} \right| = |i-j| \left| \begin{array}{c} c_1 \Delta \\ d_1 \delta \end{array} \right|, \quad m_{ij} = |i-j|m_{12}.$$

Доведення леми виходить з вище висловлених міркувань.

Тоді граф перестановок при $n = 4$ для значень дробово-лінійної функції має наступний вигляд, зображений на рис. 5.2.

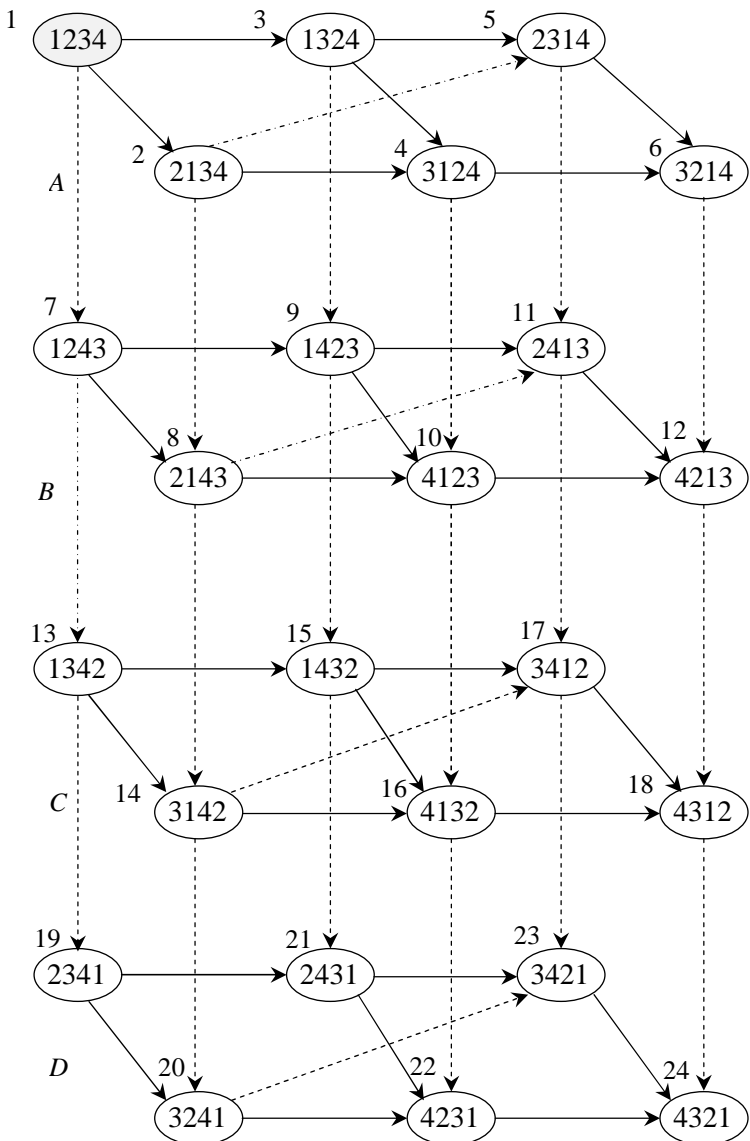


Рис. 5.2. Представления графа перестановок $G(P_n)$ для $n = 4$

Теорема 5.3. Різниця між двома перестановками $\rho(p_i, p_j)$, ($i \neq j$) для довільних n визначається по формулі

$$\rho(p_i, p_j) = \sum_{j=i+1}^n \sum_{l=1}^{n-1} \lambda_{ij} m_{ij}, \quad (5.8)$$

де λ_{ij} дорівнює мінору матриці $2 \times n$, утвореної двома перестановками p_i, p_j .

Доведення: проводимо методом по індукції:

1) для $k=1$ цей вираз має місце;
 2) для k цей вираз виконується на підставі вище висловлених міркувань;

3) для $k+1$ доведемо цей факт. Для цього розглянемо p_t, p_s , які утворені однією транспозицією, тобто відрізняються порядком слідування тільки однієї координати: $p_t = (i_1, i_2, \dots, i_t, i_s, \dots, i_k, i_{k+1})$, $p_s = (i_1, i_2, \dots, i_s, i_t, \dots, i_k, i_{k+1})$.

Складемо матрицю їх коефіцієнтів, яка має наступний вигляд:

$$\left[\begin{array}{c} i_1, i_2, \dots, i_t, i_s, \dots, i_k, i_{k+1} \\ \underbrace{i_1, i_2, \dots, i_t, i_s, \dots, i_k, i_{k+1}}_{t-1} \quad \underbrace{i_1, i_2, \dots, i_s, i_t, \dots, i_k, i_{k+1}}_{k+1-s} \end{array} \right]. \quad (5.9)$$

Відповідно, щоб знайти різницю між двома перестановками $\rho(p_t, p_s)$, необхідно використати формулу (5.4). Далі знак різниці визначити перетвореннями формул (5.7). Формула (5.8) впливає із означення мінорів і коефіцієнтів при мінорах.

Теорема 5.4. Граф перестановок $\tilde{G}(P_n)$ для дробово-лінійної функції $F(x)$, коефіцієнти якої визначені згідно (5.2), співпадає з графом перестановок для лінійної функції $G(P_n)$, з точністю до орієнтації.

Доведення: впливає з леми 5.1.

Наслідок 5.1. Екстремальні значення функції $F(x)$, в якій коефіцієнти цільової функції визначаються по формулах (5.2), досягається в крайніх точках.

5.4. Чисельні приклади та аналіз експериментів

Розглянемо числові приклади, враховуючи, що для коефіцієнтів цільових функцій виконуються співвідношення (5.3).

Приклад 5.1. Знайти відношення двох лінійних функцій – значення дробово-лінійної функції, коли коефіцієнти функції побудовані по правилу арифметичної прогресії – в чисельнику збільшуються на 2, у знаменнику на 1. У таблиці 5.1 задані значення коефіцієнтів цільової функції, точки – вершини графа й значення цільової функції.

Таблиця 5.1

Зміна значень цільової функції

c_i	4	6	8
d_i	1	2	3

	x_1	x_2	x_3	$F(x) = \frac{(c_i, x_i)}{(d_i, x_i)}$
1	1	2	3	2,857143
2	2	1	3	2,923077
3	1	3	2	2,923077
4	3	1	2	3,090909
5	2	3	1	3,090909
6	3	2	1	3,2

На рисунку представлена динаміка зміни значення цільової функції.

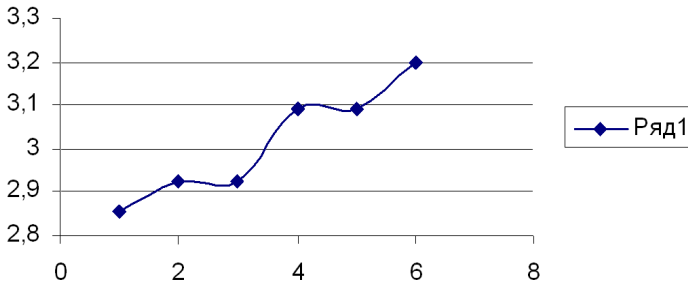


Рис. 5.3. Зміни значень дробно-лінійної функції

Приклад 5.2. Визначити відношення двох лінійних функцій – значення дробово-лінійної функції, коли коефіцієнти збільшуються в чисельнику на 2, у знаменнику на 1. У таблиці 5.2. задані значення коефіцієнтів цільової функції, точки – вершини графа й значення цільової функції.

Таблиця 5.2

Зміна значень цільової функції

c_i	5	7	9
d_i	3	4	5

	x_1	x_2	x_3	$F(x) = \frac{(c_i, x_i)}{(d_i, x_i)}$
1	1	2	3	1,769231
2	2	1	3	1,76
3	1	3	2	1,76
4	3	1	2	1,73913
5	2	3	1	1,73913
6	3	2	1	1,727273



Рис. 5.4. Зміна значень дробово-лінійної функції

Приклад 5.3. Знайти відношення двох лінійних функцій – значення дробово-лінійної функції, де коефіцієнти змінюються в чисельнику на +2, у знаменнику – на +1. У таблиці 5.3 задані

значення коефіцієнтів цільової функції, точки – вершини графа й значення цільової функції при $n = 4$.

Таблиця 5.3

Зміна значень цільової функції

c_i	5	7	9	11
d_i	3	4	5	7

№ п/п	x_1	x_2	x_3	x_4	$F(x) = \frac{(c_i, x_i)}{(d_i, x_i)}$
1	1	2	3	4	1,66666667
2	2	1	3	4	1,66037736
3	1	3	2	4	1,66037736
4	3	1	2	4	1,64705882
5	2	3	1	4	1,64705882
6	3	2	1	4	1,64
7	1	2	4	3	1,69230769
8	2	1	4	3	1,68627451
9	1	4	2	3	1,68
10	4	1	2	3	1,65957447
11	2	4	1	3	1,66666667
12	4	2	1	3	1,65217391
13	1	3	4	2	1,71428571
14	3	1	4	2	1,70212766
15	1	4	3	2	1,70833333
16	4	1	3	2	1,68888889
17	3	4	1	2	1,68181818
18	4	3	1	2	1,6744186
19	2	3	4	1	1,73333333
20	3	2	4	1	1,72727273
21	2	4	3	1	1,72727273
22	4	2	3	1	1,71428571
23	3	4	2	1	1,71428571
24	4	3	2	1	1,70731707

На графіку рис. 5.5 представлена тенденція зміни значень цільової функції, що має поліноміальну залежність.

Якщо проаналізувати всі графіки, то слід зазначити, що розташування точок підтверджує сформульовані теореми і їх обґрунтування.

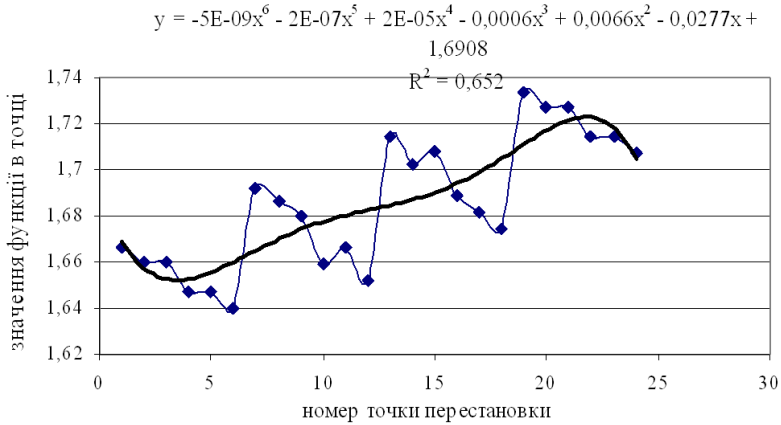


Рис. 5.5. Зміна значень дробово-лінійної функції

Продовжуючи й розвиваючи результати цієї роботи, варто зазначити, що має сенс розглядати задачу, де не завжди існують перестановки, у яких цільова функція приймає задане значення. Тоді вище сформульована проблема стане як **задача**: визначити множину пар перестановок (\underline{x}, \bar{x}) , для яких при заданому y

$$\bar{x} = \arg \min_{F(x) > y} F(x) = \arg \min_{F(x) > y} \frac{f(x)}{g(x)},$$

$$\underline{x} = \arg \max_{F(x) < y} F(x) = \arg \max_{F(x) < y} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Модель задачі з урахуванням комбінаторних властивостей області допустимих розв’язків і дробово-лінійних функцій критеріїв може бути успішно застосована при розв’язанні різних практичних задач. Установлено взаємозв’язок між задачею на комбінаторній множині перестановок і задачею на неперервній

допустимій множині, а також обґрунтоване використання й застосування теорії графів для побудови методу розв'язання сформульованої задачі. На підставі доведених теорем, продовжуючи дослідження й розвиваючи результати попередніх робіт авторів, запропонований підхід до розв'язання багато-критеріальної задачі з дробово-лінійними критеріями на допустимій множині комбінаторної конструкції перестановок, що полягає у зведенні пошуку розв'язку вихідної задачі до задачі побудови гамільтонового шляху на графі перестановок.

5.5. Дослідження екстремальної дробово-лінійної задачі при умові кусково-лінійної тенденції знаменника

У даному пункті розглядається екстремальна задача з дробово-лінійною функцією критеріїв на перестановках, у якій знаменник являє собою кусково-лінійну тенденцію, досліджено властивості області допустимих розв'язків для такої задачі, побудовано метод розв'язання.

Функція представляється в дробово-лінійному вигляді, як відношення двох лінійних форм за умови, що знаменник або чисельник функції можуть бути кусково-лінійними, що значно ускладнює задачу. Тоді задача зводиться до знаходження множини точок – перестановок, у яких досягається задане значення дробово-лінійного функціоналу:

$$x^* = \underset{x \in P_n}{\operatorname{arg}} F(x) = \underset{x \in P_n}{\operatorname{arg}} \frac{f(x)}{g(x)},$$

де $y = F(x)$.

Розглянемо дробово-лінійну функцію $F(x)$, де чисельник $f(x)$ і знаменник $g(x)$ – дві лінійні функції, у яких коефіцієнти визначаються за правилом арифметичної прогресії, як в попередньому випадку:

$$\begin{aligned}
 c_i &= c_1 + \Delta(i-1); \\
 d_i &= d_1 + \sigma(n-1).
 \end{aligned}
 \tag{5.10}$$

Згідно із цими позначеннями чисельник і знаменник дробово-лінійної функції можна представити відповідно:

$$f(x) = (\bar{c}, \pi(x)), \quad g(x) = (\bar{d}, \sigma(x)),$$

де $\pi(x) = (x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, \dots, x_{\pi(n)})$, а $\bar{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$, $c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_n$ – коефіцієнти цільової функції.

Розглянемо значення дробово-лінійної функції у двох різних перестановках і зрівняємо їх: $F(\pi) - F(\sigma)$.

З огляду на властивості дробово-лінійної функції, а вона розглядається як кусково-лінійна в знаменнику, одержимо:

$$(\bar{c} \cdot \pi(x)) = c_1 \sum_{i=1}^n x_i + \Delta \sum_{i=2}^n (i-1) x_{\pi(i)};$$

$$(\bar{c} \cdot \sigma(x)) = c_1 \sum_{i=1}^n x_i + \Delta \sum_{i=2}^n (i-1) x_{\sigma(i)}.$$

Позначимо $S = \sum_{i=1}^n x_i$; $u_0 = (0, 1, \dots, n-1)$. Тоді

$$f(\pi(x)) = S c_1 + \Delta(u_0 \cdot \pi(x)); \quad f(\sigma(x)) = S c_1 + \Delta(u_0 \cdot \sigma(x)).$$

Аналогічно

$$g(\pi(x)) = S d_1 + \delta(u_0 \cdot \pi(x)); \quad g(\sigma(x)) = S d_1 + \delta(u_0 \cdot \sigma(x)).$$

З огляду на вище записані співвідношення, формула (5.8) прийме вигляд:

$$\begin{aligned}
 F(\pi) - F(\sigma) &\approx f(\pi(x)) \cdot g(\sigma(x)) - f(\sigma(x)) \cdot g(\pi(x)) = \\
 &= S^2 c_1 d_1 + S c_1 \cdot \delta(u_0 \cdot \sigma(x)) + S d_1 \Delta(u_0 \cdot \pi(x)) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\Delta\delta(u_0 \cdot \pi(x))(u_0 \cdot \sigma(x)) - S^2 c_1 d_1 - S c_1 \delta(u_0 \cdot \pi(x)) - \\
& - S d_1 \Delta(u_0 \cdot \sigma(x)) - \delta \Delta(u_0 \cdot \sigma(x))(u_0 \cdot \pi(x)) = \\
& = S c_1 \sigma \cdot u_0 [\sigma(x) - \pi(x)] + S d_1 \Delta \cdot u_0 [\pi(x) - \sigma(x)] = \\
& = S u_0 [\pi(x) - \sigma(x)] (d_1 \Delta - c_1 \delta).
\end{aligned}$$

Оскільки $u_0 [\pi(x) - \sigma(x)] = (l - k)(x_e - x_k) \geq 0$, то знак ΔF залежить від різниці $d_1 \Delta - c_1 \delta = \begin{vmatrix} c_1 & d_1 \\ \Delta & \delta \end{vmatrix}$.

Якщо $\Delta F \geq 0$, то граф $G(P_4)$ збігається з аналогічним графом для лінійної функції. Якщо $\Delta F \leq 0$, то граф $G(P_4)$ має протилежну орієнтацію.

Нехай тепер $f(x) = (\bar{c}x \cdot \pi(x))$, де $c_i = c_1 + (c - 1)\Delta$, ($\Delta > 0$), а знаменник являє собою кусочно-лінійну функцію $g(x) = (\bar{d} \cdot \pi(x))$, тоді

$$\left\{ \begin{array}{ll} d_i = d_1 + \delta_1(i - 1) & i \leq k \\ d_i = d_k + \delta_2(i - k) & i \geq k \end{array} \right\} \left(\begin{array}{l} \delta_1 > 0 \\ \delta_2 > \delta_1 \end{array} \right).$$

Тоді $f(\pi(x)) = S_1 c_1 + \Delta(u_0 \cdot \pi(x))$.

З огляду на особливості знаменника, для $g(x)$ необхідно перестановки розбити на дві частини:

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) = X_1 \cup X_2,$$

де $X_1 = (x_1, x_2, \dots, x_k)$, $X_2 = (x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n)$.

Тоді $\sum_{i=1}^k x_i = S_1$, $\sum_{i=k+1}^n x_i = S_2 \cdot p_1, p_2 \in P_n$.

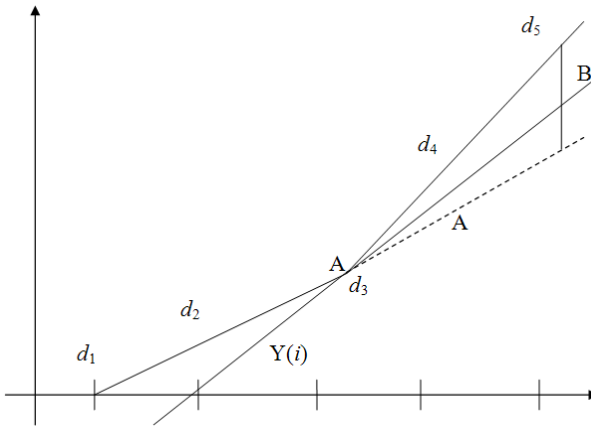


Рис. 5.6. Побудова кусково-лінійної функції знаменника

Згідно рис. 5.6 знаменник складається із двох шматків, тому необхідно побудувати графік функції у вигляді двох частин. Порядок побудови буде наступним:

1) розбити кусково-лінійну функцію знаменника на дві частини, розділивши точкою А; тоді функція знаменника прийме вигляд

$$g(x) = Y(i) + |i - k| \cdot \lambda + d_1; \quad (5.11)$$

2) необхідно зробити продовження першого (нижнього шматка);

3) провести пряму, перпендикулярно до продовження й другого шматка;

4) побудувати точку В – як середину між двома прямими;

5) побудувати пряму для лінеаризації заданої кусково-лінійної функції, що проходить через дві точки А і В, викорис-

товуючи стандартне рівняння прямої: $\frac{y - y_A}{x - x_A} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

Для підстановки в рівняння прямої координати точок рівні $A(k, (k-1)\delta_1)$, $B\left(2k-1, \frac{(3k-3)\delta_1 + (k-1)\delta_2}{2}\right)$.

Тоді маємо $\frac{y - (k-1)\delta_1}{x-k} = \frac{(k-1)(\delta_1 + \delta_2)}{k-1}$, після перетворення одержимо:

$$y - (k-1)\delta_1 = (x-k)(\delta_1 + \delta_2).$$

Частина d_1 в рівнянні (5.11) визначається таким способом:

$$d_1 = \sigma_1 \left(\frac{i+k - |i-k|}{2} - 1 \right) + \sigma_2 \left(\frac{i-k + |i-k|}{2} \right) + d_1.$$

Отже, оптимізація дробово-лінійної функції з кусково-лінійною тенденцією знаменника полягає в розбитті функції знаменника (чисельника при умові кусково-лінійності) на частини і в подальшому дослідженні цих частин та зведенні до загального виду.

Приклад 5.5. Знайти відношення двох лінійних функцій – значення дробово-лінійної функції, коли коефіцієнти змінюються в чисельнику на +3, а у знаменнику спостерігається кусково-лінійна тенденція: перша частина коефіцієнтів збільшується на 2, друга – на 5. У таблиці 5.4 задані значення коефіцієнтів цільової функції, точки – вершини графа й значення цільової функції при $n = 4$.

Необхідно визначити розташування верши – об’єктів конфігурації перестановки на підграфах загального графа при зміні значень кусково-лінійної функції.

Зазначимо, що для розв’язання задачі з кусково-лінійною тенденцією та з дробово-лінійною цільовою функцією є доцільним для представлення графа комбінаторної конфігурації використати новий метод генерування – метод переміщення максимального елемента. Розглянемо наступну таблицю.

Таблиця 5.4

Розкладання значень кусково-лінійної функції

<i>c</i>	2	5	8	11	14	A
<i>d</i>	3	5	7	11	15	

№	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	<i>ch</i>	<i>zn</i>	<i>chastka</i>
1	1	2	3	4	5	150	153	0,98
2	1	2	4	3	5	147	149	0,98

max

№	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	ch	zn	$chastka$
3	1	3	2	4	5	147	151	0,97
4	1	3	4	2	5	141	143	0,98
5	1	4	2	3	5	141	145	0,97
6	1	4	3	2	5	138	141	0,97
7	2	1	3	4	5	147	151	0,97
8	2	1	4	3	5	144	147	0,97
9	2	3	1	4	5	141	147	0,95
10	2	3	4	1	5	132	135	0,97
11	2	4	1	3	5	135	141	0,95
12	2	4	3	1	5	129	133	0,96
13	3	1	2	4	5	141	147	0,95
14	3	1	4	2	5	135	139	0,97
15	3	2	1	4	5	138	145	0,95
16	3	2	4	1	5	129	133	0,96
17	3	4	1	2	5	126	133	0,94
18	3	4	2	1	5	123	129	0,95
19	4	1	2	3	5	132	139	0,94
20	4	1	3	2	5	129	135	0,95
21	4	2	1	3	5	129	137	0,94
22	4	2	3	1	5	123	129	0,95
23	4	3	1	2	5	123	131	0,93
24	4	3	2	1	5	120	127	0,94

min

В таблиці представлено розкладання значень кусково-лінійної функції на підграф вершин, для яких значення останньої координати дорівнює $x_5 = 5$.

На основі вищезазначених розрахунків побудуємо підграф, в якому вершини генеруються методом переміщення максимального елемента.

Даний граф є підграфом загального графа конфігурації перестановок $G(P_5)$, а вказана орієнтація ребер в графі, визначає зміну значень функції $F(x)$.

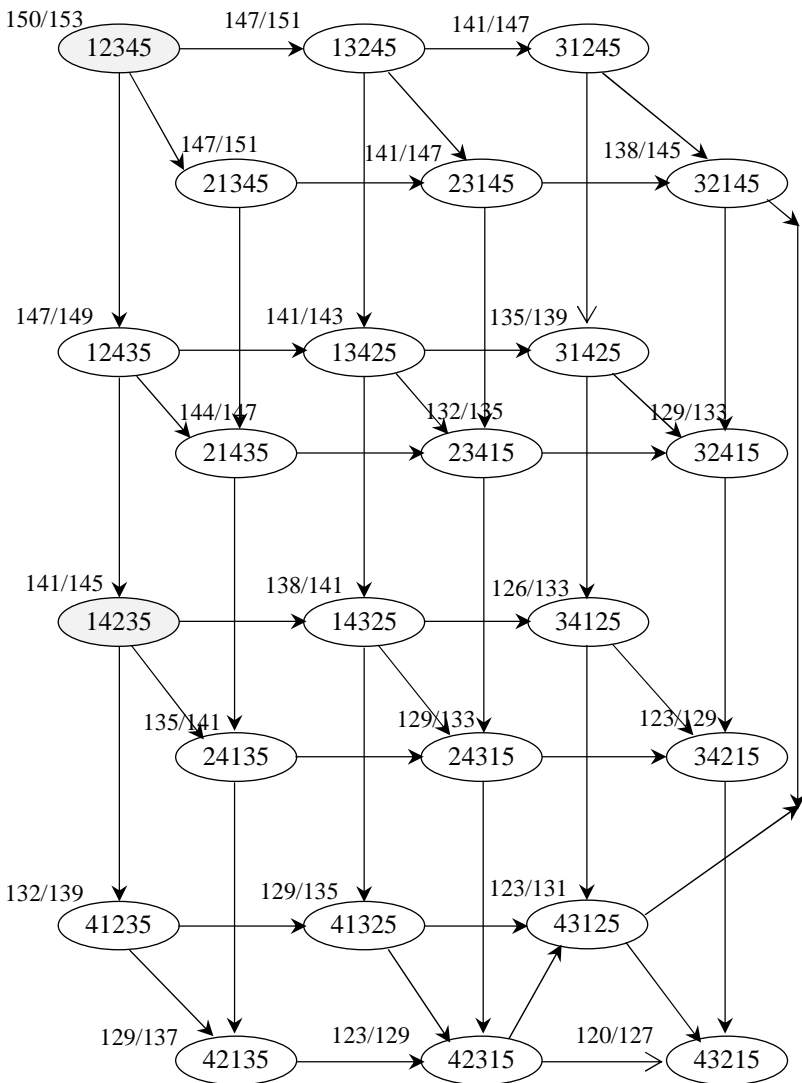


Рис. 5.7. Підграф A при максимальному значенні останнього елементу вершин

На основі вище розглянутого рис. 5.7 максимальне значення функції на даному підграфі досягається в точці (1 2 4 3 5) і рівне $\frac{147}{149}$, а мінімальне значення – в точці (4 3 1 2 5) і рівне $\frac{123}{131}$.

Таблиця 5.5

Розкладання значень цільової функції

<i>c</i>	2	5	8	11	14	<i>A</i>
<i>d</i>	3	5	7	11	15	

№	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	<i>ch</i>	<i>zn</i>	<i>chastka</i>
1	1	2	3	5	4	147	149	0,99
2	1	2	4	5	3	141	141	1,00
3	1	3	2	5	4	144	147	0,98
4	1	3	4	5	2	132	131	1,01
5	1	4	2	5	3	135	137	0,99
6	1	4	3	5	2	129	129	1,00
7	2	1	3	5	4	144	147	0,98
8	2	1	4	5	3	138	139	0,99
9	2	3	1	5	4	138	143	0,97
10	2	3	4	5	1	120	119	1,01
11	2	4	1	5	3	129	133	0,97
12	2	4	3	5	1	117	117	1,00
13	3	1	2	5	4	138	143	0,97
14	3	1	4	5	2	126	127	0,99
15	3	2	1	5	4	135	141	0,96
16	3	2	4	5	1	117	117	1,00
17	3	4	1	5	2	117	121	0,97
18	3	4	2	5	1	111	113	0,98
19	4	1	2	5	3	126	131	0,96
20	4	1	3	5	2	120	123	0,98
21	4	2	1	5	3	123	129	0,95
22	4	2	3	5	1	111	113	0,98
23	4	3	1	5	2	114	119	0,96
24	4	3	2	5	1	108	111	0,97

max

min

Побудуємо наступний підграф загального графу в якому є фіксованим четвертий елемент.

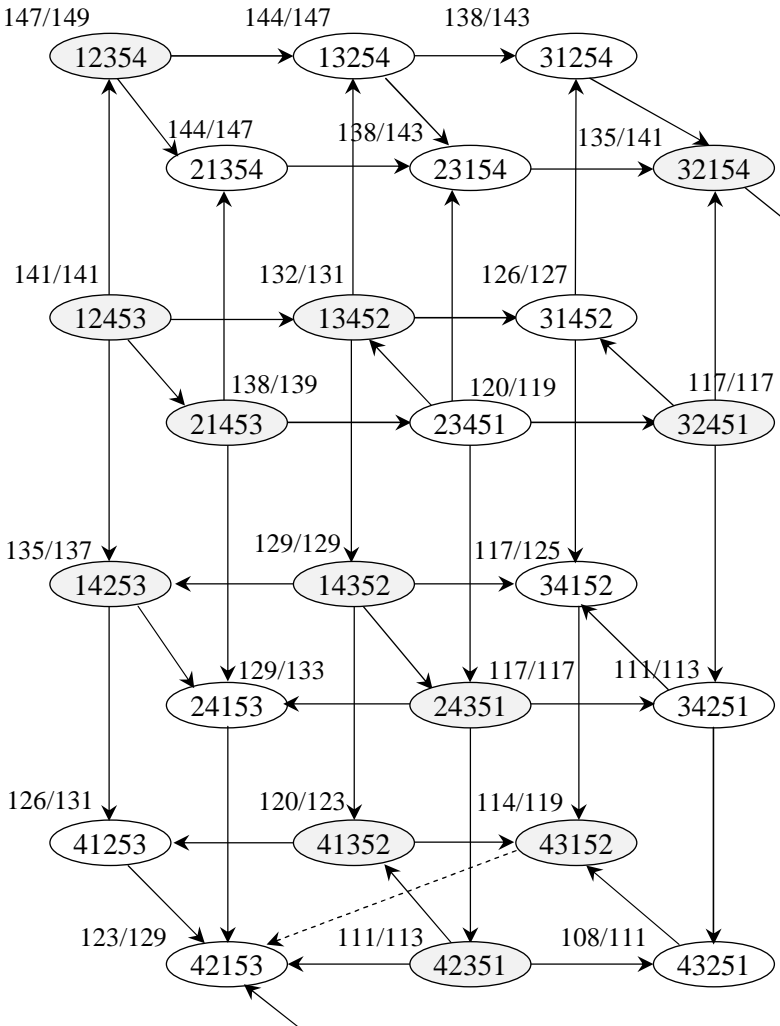


Рис. 5.8. Підграф B при фіксованому максимальному елементу на четвертому місці

Знову ж таки визначимо екстремальні значення функції на даному підграфі: максимальне значення функції рівне $\frac{120}{119}$ в точці (2 3 4 5 1), мінімальне – в точці (4 2 1 5 3), рівне $\frac{123}{129}$.

Таблиця 5.6

Розкладання значень цільової функції по підграфах

<i>c</i>	2	5	8	11	14	A
<i>d</i>	3	5	7	11	15	

№	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	<i>ch</i>	<i>zn</i>	<i>chastka</i>
1	1	2	5	3	4	141	141	1,00
2	1	2	5	4	3	138	137	1,01
3	1	3	5	2	4	135	135	1,00
4	1	3	5	4	2	129	127	1,02
5	1	4	5	2	3	126	125	1,01
6	1	4	5	3	2	123	121	1,02
7	2	1	5	3	4	138	139	0,99
8	2	1	5	4	3	135	135	1,00
9	2	3	5	1	4	126	127	0,99
10	2	3	5	4	1	117	115	1,02
11	2	4	5	1	3	117	117	1,00
12	2	4	5	3	1	111	109	1,02
13	3	1	5	2	4	129	131	0,98
14	3	1	5	4	2	123	123	1,00
15	3	2	5	1	4	123	125	0,98
16	3	2	5	4	1	114	113	1,01
17	3	4	5	1	2	105	105	1,00
18	3	4	5	2	1	102	101	1,01
19	4	1	5	2	3	117	119	0,98
20	4	1	5	3	2	114	115	0,99
21	4	2	5	1	3	111	113	0,98
22	4	2	5	3	1	105	105	1,00
23	4	3	5	1	2	102	103	0,99
24	4	3	5	2	1	99	99	1,00

max

min

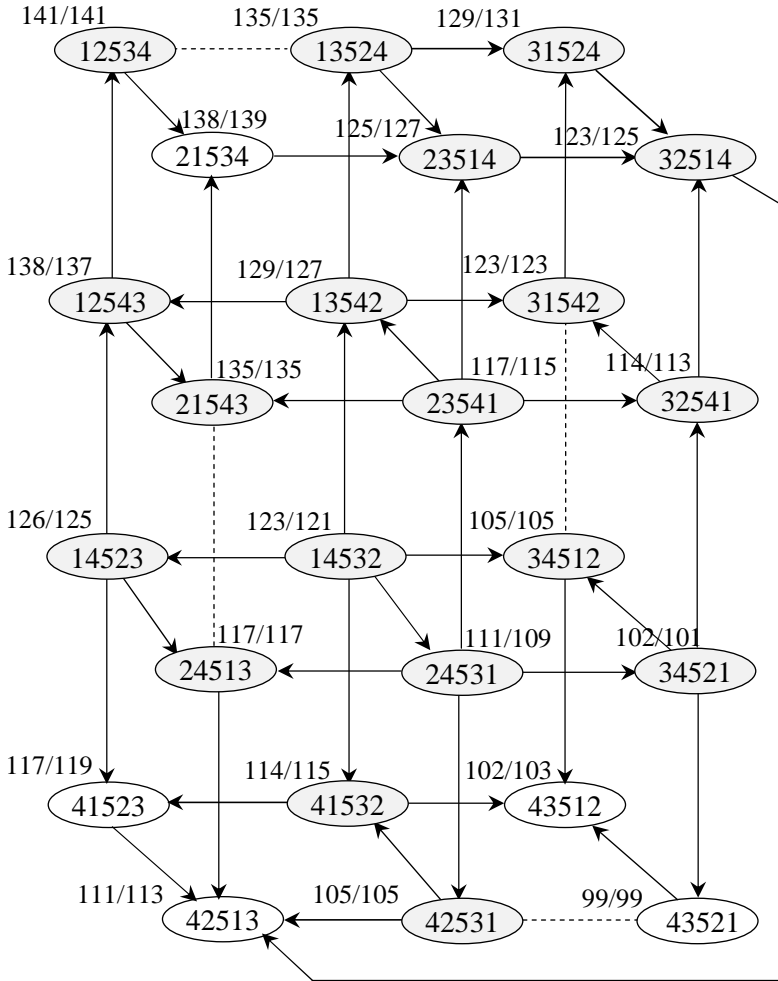


Рис. 5.9. Підграф C при фіксованому значенні
максимального елементу $x_3 = 5$

В таблиці представлено розкладання значень кусково-лінійної функції на підграф вершин, для яких значення координати $x_3 = 5$, тобто відбулося переміщення максимального елементу на третє місце.

На основі вище зазначених розрахунків побудуємо підграф, в якому вершини генеруються методом переміщення максимального елемента.

Аналізуючи зроблені розрахунки, та розміщення вершин на підграфі, визначасмо вершину, в якій значення функції мінімальне – до неї сходяться орієнтовані ребра (4 2 5 1 3), значення рівне $\frac{111}{113}$, максимальне значення $\frac{111}{109}$ досягається в вершині, від якої відходять орієнтовані ребра (2 4 5 3 1).

Розраховуємо наступну таблиці для перевірки, в якій розміщені вершини підграфа, для яких $x_2 = 5$.

Таблиця 5.7

Розкладання значень цільової функції

<i>c</i>	2	5	8	11	14	A
<i>d</i>	3	5	7	11	15	

№	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	<i>ch</i>	<i>zn</i>	<i>chastka</i>	
1	1	5	2	3	4	132	135	0,98	
2	1	5	2	4	3	129	131	0,98	
3	1	5	3	2	4	129	131	0,98	
4	1	5	3	4	2	123	123	1,00	
5	1	5	4	2	3	123	123	1,00	
6	1	5	4	3	2	120	119	1,01	
7	2	5	1	3	4	126	131	0,96	
8	2	5	1	4	3	123	127	0,97	
9	2	5	3	1	4	120	123	0,98	
10	2	5	3	4	1	111	111	1,00	
11	2	5	4	1	3	114	115	0,99	
12	2	5	4	3	1	108	107	1,01	max
13	3	5	1	2	4	117	123	0,95	
14	3	5	1	4	2	111	115	0,97	
15	3	5	2	1	4	114	119	0,96	
16	3	5	2	4	1	105	107	0,98	
17	3	5	4	1	2	102	103	0,99	
18	3	5	4	2	1	99	99	1,00	
19	4	5	1	2	3	105	111	0,95	min
20	4	5	1	3	2	102	107	0,95	
21	4	5	2	1	3	102	107	0,95	
22	4	5	2	3	1	96	99	0,97	
23	4	5	3	1	2	96	99	0,97	
24	4	5	3	2	1	93	95	0,98	
				max	1,01		min	0,95	

Будемо за розрахунками відповідний підграф і визначимо максимальне та мінімальне значення кусково-лінійної функції.

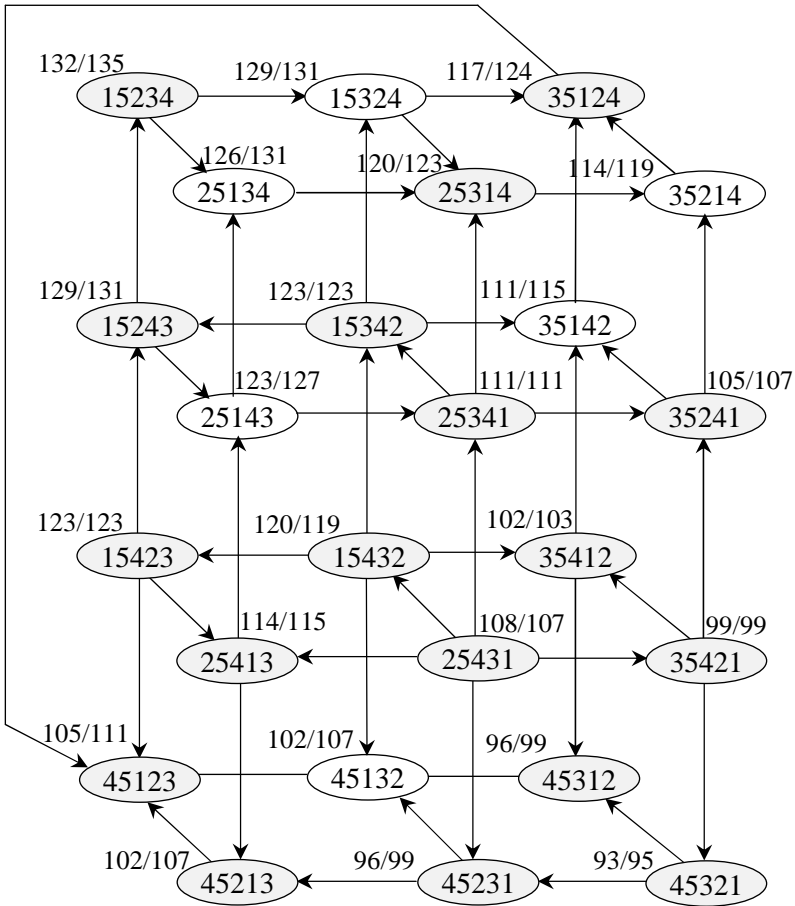


Рис. 5.10. Підграф D при фіксованому значенні максимального елементу на другому місці

Далі максимальний елемент переміщується на перше місце, тобто значення першої координати для вершин наступного підграфа рівне $x_1 = 5$.

Таблиця 5.8

Розкладання значень цільової функції по підграфах

c	2	5	8	11	14	A
d	3	5	7	11	15	

№	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	ch	zn	$chastka$
1	5	1	2	3	4	120	127	0,94
2	5	1	2	4	3	117	123	0,95
3	5	1	3	2	4	117	123	0,95
4	5	1	3	4	2	111	115	0,97
5	5	1	4	2	3	111	115	0,97
6	5	1	4	3	2	108	111	0,97
7	5	2	1	3	4	117	125	0,94
8	5	2	1	4	3	114	121	0,94
9	5	2	3	1	4	111	117	0,95
10	5	2	3	4	1	102	105	0,97
11	5	2	4	1	3	105	109	0,96
12	5	2	4	3	1	99	101	0,98
13	5	3	1	2	4	111	119	0,93
14	5	3	1	4	2	105	111	0,95
15	5	3	2	1	4	108	115	0,94
16	5	3	2	4	1	99	103	0,96
17	5	3	4	1	2	96	99	0,97
18	5	3	4	2	1	93	95	0,98
19	5	4	1	2	3	102	109	0,94
20	5	4	1	3	2	99	105	0,94
21	5	4	2	1	3	99	105	0,94
22	5	4	2	3	1	93	97	0,96
23	5	4	3	1	2	93	97	0,96
24	5	4	3	2	1	90	93	0,97

max
min

Розрахунки в таблиці визначають значення функції в вершинах останнього підграфа, який розміщено в загальному графі нижче всіх.

Чисельний приклад наглядно характеризує важливість існування орієнтованого графа комбінаторної конфігурації перестановок для розв'язування екстремальних задач та його структуру.

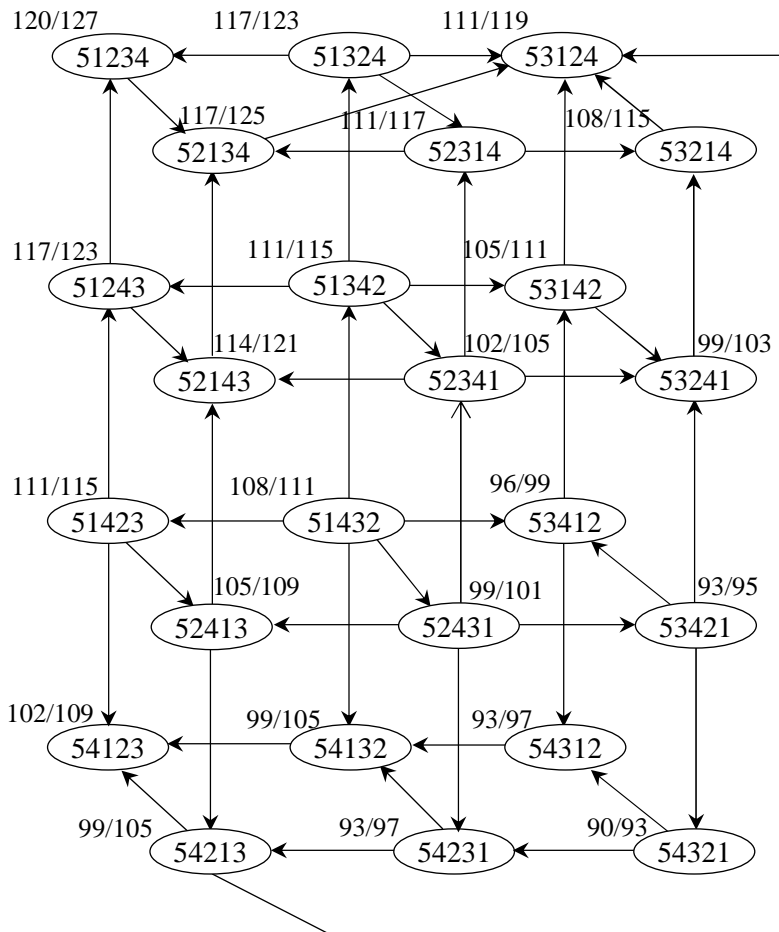


Рис. 5.11. Підграф E при фіксованому значенні максимального елемента на першому місці

Висновки до розділу

В розділі розглянута математична модель задачі з урахуванням комбінаторних властивостей області допустимих розв'язків та дробово-лінійних функцій критеріїв, яка може бути

успішно застосована при розв'язанні різних практичних задач. Установлено взаємозв'язок між задачею на комбінаторній конфігурації перестановок і задачею на неперервній допустимій множині, а також обґрунтоване використання й застосування теорії графів для побудови методу розв'язування сформульованої задачі. На підставі доведених теорем, продовжуючи дослідження й розвиваючи результати попередніх робіт, запропонований підхід до розв'язання задачі з дробово-лінійними критеріями на допустимій множині комбінаторної конфігурації перестановок, що полягає у зведенні пошуку розв'язків вихідної задачі до задачі побудови гамільтонового шляху на графі конфігурації перестановок.

Зокрема, побудовано орієнтований граф конфігурації перестановок для дробово-лінійної функції і встановлено, що граф перестановок $\tilde{G}(P_n)$ для дробово-лінійної функції $F(x)$, коефіцієнти якої впорядковані згідно арифметичної прогресії, співпадає з графом перестановок для лінійної функції $G(P_n)$ з точністю до орієнтації.

Розглянуто більш складні екстремальні задачі з кусково-лінійною тенденцією знаменника та їх властивості. Зроблено числові експерименти в яких використовуються нові методи генерування комбінаторної конфігурації перестановок – рекурсивний метод та метод переміщення максимального елемента, проведено їх аналіз та дослідження.