УДК 519.85

ПРО ВЛАСТИВОСТІ ЛІНІЙНИХ БЕЗУМОВНИХ ЗАДАЧ СТОХАСТИЧНОЇ КОМБІНАТОРНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ НА РОЗМІЩЕННЯХ

О. О. Ємець, *д. ф.-м. н., професор*
Полтавський університет економіки і торгівлі
yemetsli@ukr.net
Т. М. Барболіна, *к. ф.-м. н., доцент*
Полтавський національний педагогічний університет імені В.Г. Короленка
tm-b@ukr.net

У доповіді розглядається розв'язування лінійних задач комбінаторної оптимізації на розміщеннях без додаткових обмежень в умовах стохастичної невизначеності.

Iemets O. O., Barbolina T. M. About properties of linear unconstrained problems of stochastic combinatorial optimization on arrangements. In the article we discuss solving of linear problems of combinatorial optimization on arrangements without additional constraints under stochastic uncertainty.

Ключові слова: ОПТИМІЗАЦІЯ, РОЗМІЩЕННЯ, КОМБІНАТОРНІ ЗАДАЧІ, СТОХАСТИЧНА ОПТИМІЗАЦІЯ.
Keywords: OPTIMIZATION, ARRANGEMENTS, COMBINATORIAL PROBLEMS, STOCHASTIC OPTIMIZATION.

Актуальним напрямом досліджень у галузі оптимізації є вивчення властивостей оптимізаційних задач, у яких поєднуються обмеження комбінаторного характеру та різні види невизначеності (див., наприклад, [1–4]). У [4] розглянуто властивості безумовної задачі стохастичної комбінаторної оптимізації на розміщеннях, зокрема, обґрунтовано схему редукційного методу розв'язування таких задач. Дана робота присвячена уточненню окремих результатів.

Розглядаються оптимізаційні задачі, у яких мінімум (максимум) визначається на основі порівняння числових характеристик випадкових величин [5]. Нехай характеристичний вектор випадкової величини (випадкові величини позначатимемо великими літерами) визначається як $H(A)=(h_1(A),...,h_s(A))$, де $h_i(A)$ $\forall i\in J_s$ – деякі числові характеристики випадкової величини. Вважаємо, що характеристичний вектор задовольняє умову

$$h_i(aA+bB)=a^{\lambda_i}h_i(A)+b^{\lambda_i}h_i(B)\quad \forall i\in J_s \qquad (1)$$

Розглянемо лінійну безумовну задачу стохастичної оптимізації на розміщеннях: знайти пару $\langle L(X^*),X^*\rangle$ таку, що

$$L(X^*)=\min_{X\in E_\eta^k(\Gamma)}\sum_{j=1}^{k}c_jX_j\ ,\ X^*=\arg\min_{X\in E_\eta^k(\Gamma)}\sum_{j=1}^{k}c_jX_j\ ,(2)$$

де $X=(X_1,...,X_k)$, $L(X)=\sum_{j=1}^{k}c_jX_j$, $c_j\in R^1$ $\forall j\in J_k$, $E_\eta^k(\Gamma)$ — загальна множина розміщень [6] з елементів мультимножини $\Gamma=\{G_1,...,G_\eta\}$, які є незалежними випадковими величинами, мінімум розуміється згідно з [5]. Вважатимемо, що елементи мультимножини задовольняють умову

$$H(G_1)\le_l ...\le_l H(G_\eta). \qquad (3)$$

Сформуємо мультимножини $Q_r=\{q_{r1},...,q_{r\eta}\}$, де $q_{rj}=h_r(G_j)$ $\forall j\in J_\eta$, і разом із задачею (2) розглядатимемо детерміновані задачі

$$\bar{L}_r(x')=\min_{x\in E_\eta^k(Q_r)}\sum_{j=1}^{k}c_j^{\lambda_r}x_j\ ,\ x'=\arg\min_{x\in E_\eta^k(Q_r)}\sum_{j=1}^{k}c_j^{\lambda_r}x_j\ . \qquad (4)$$

де $x=(x_1,x_2,...,x_k)$. Нехай також для всіх $r\in J_s$ $H_r(A)=(h_1(A),...,h_r(A))$, $H_0(G_i)=\varnothing$. Нехай $r\in J_s$ — таке, що елементи мультимножини Γ задовольняють умову

$$H_{r-1}(G_i)=H_{r-1}(G_j)\quad \forall i,j\in J_\eta, G_i,G_j\in\Gamma \quad (5)$$

Теорема 1 [4]. Нехай характеристичний вектор випадкової величини задовольняє умову (1), причому виконуються співвідношення (5). Тоді існує мініmaль $X'\in E_\eta^k(\Gamma)$ в задачі (2) така, що виконуються умови

$$h_r(X'_j)=x'_j\quad \forall j\in J_k, \qquad (6)$$

де $\left\langle \bar{L}^r\left(x'\right), x'\right\rangle$ — розв’язок задачі (4).

Нехай для елементів мультимножини Γ виконується умова (5), коефіцієнти цільової функції задачі (4) задовольняють умову

$$c_{i_1}^{\lambda_r} \geq \ldots \geq c_{i_\gamma}^{\lambda_r} > 0 \ldots = c_{i_{\delta-1}}^{\lambda_r} > c_{i_\delta}^{\lambda_r} \ldots \geq c_{i_k}^{\lambda_r}. \qquad (7)$$

З умови (7) і достатньої умови мінімалі [6] випливає, що одна з мінімалей x' у задачі (4) задовольняє умови

$$x'_{i_j} = q_{rj} \quad \forall j \in J_\gamma, \; x'_{i_t} = q_{r,\eta-k+t} \quad \forall t \in J_k^\delta,$$

а тоді відповідно до теореми 1 для однієї з мінімалей X' у задачі (2) виконуються умови

$$h_r\left(X'_{i_j}\right) = q_{rj} \quad \forall j \in J_\gamma, \; h_r\left(X'_{i_t}\right) = q_{r,\eta-k+t} \quad \forall t \in J_k^\delta. \qquad (8)$$

Другу з умов можна записати таким чином $h_r\left(X'_{i_{k-\eta+j}}\right) = q_{rj}$ $\forall j \in J_\eta^{\eta-k+\delta}$. Враховуючи, що внаслідок виконання умов (5) і $X' \in E_\eta^k\left(\Gamma\right)$ виконуються рівності $H_{r-1}\left(X'_1\right) = \ldots = H_{r-1}\left(X'_k\right)$, то також

$$H_r\left(X'_{i_j}\right) = H_r\left(G_j\right) \; \forall j \in J_\gamma, H_r\left(X'_{i_{k-\eta+j}}\right) = H_r\left(G_j\right) \; \forall j \in J_\eta^{\eta-k+\delta}. \qquad (9)$$

Розглянемо мультимножину $\Gamma_r = \left\{H_r(G_1), \ldots, H_r(G_\eta)\right\}$ з основою $S\left(\Gamma_r\right) = (\bar{H}_1, \ldots, \bar{H}_m)$, елементи якої упорядковані за неспаданням, і первинною специфікацією $\left[\Gamma_r\right] = \left(n_1, \ldots, n_m\right)$. Нехай також

$$\eta_1 = 1, \; \eta_{p+1} = \eta_p + n_p = 1 + \sum_{j=1}^{p} n_j \text{ для } p \in J_m. \qquad (10)$$

Оскільки елементи мультимножини Γ задовольняють умову (3), то

$$H_r\left(G_{\eta_p}\right) = \ldots = H_r\left(G_{\eta_p+n_p-1}\right) = \bar{H}_p, \; p \in J_m.$$

Для всіх $p \in J_m$ сформуємо мультимножини

$$\Gamma_r^p = \left\{G_{\eta_p}, \ldots, G_{\eta_p+n_p-1}\right\}. \qquad (11)$$

Очевидно, що $\left|\Gamma_r^p\right| = n_p$. Нехай також σ — найменший індекс, для якого виконується умова $\eta_{\sigma+1} > \gamma$, τ — найбільший індекс, для якого виконується умова $\eta_\tau \leq \eta - k + \delta$. Позначимо

$k_p = n_p$ для $p \in J_{\sigma-1}$, $k_\sigma = \gamma - \eta_\sigma + 1$; $k_p = n_p$ для $p \in J_m^{\tau+1}$, $k_\tau = \eta_{\tau+1} - \eta + k - \delta$. Отже, для всіх $p \in J_\sigma$ виконуються рівності $H_r\left(X'_{i_j}\right) = \bar{H}_p \quad \forall j \in J^{\eta_p}{}_{\eta_p + k_p - 1}$, для всіх $p \in J_m^\tau$ — $H_r\left(X'_{i_{k-\eta+j}}\right) = \bar{H}_p \quad \forall j \in J_\eta^{\eta-k+\delta}$.

Нехай $\tilde{X}_j = X'_{i_j} \quad \forall j \in J_k$, тоді

$$\left(\tilde{X}_{\eta_p}, ..., \tilde{X}_{\eta_p + k_p - 1}\right) \in E_{n_p}^{k_p}\left(\Gamma_r^p\right) \quad \forall p \in J_\sigma, \qquad (12)$$

$$\left(\tilde{X}_{k-\eta+\eta_{p+1}-n_p}, ..., \tilde{X}_{k-\eta+\eta_{p+1}-1}\right) \in E_{n_p}^{k_p}\left(\Gamma_r^p\right) \quad \forall p \in J_m^\tau. \qquad (13)$$

Якщо $\sigma \neq \tau$, то точка, яка задовольняє (12), (13), належить $E_\eta^k(\Gamma)$. Якщо $\sigma = \tau$, то $\left(\tilde{X}_{\eta_\sigma}, ..., \tilde{X}_{k-\eta+\eta_{\sigma+1}-1}\right)$ є елементом множини розміщень з елементів мультимножини Γ_r^σ.

Позначимо для всіх $p \in J_\sigma \cup J_{m+1}^\tau$

$$u_p = \begin{cases} \eta_p, \text{якщо } p \le \sigma, \\ k - \eta + \eta_p, \text{якщо } p > \tau, \\ \delta, \text{якщо } p = \tau > \sigma, \end{cases} \qquad (14)$$

$$v_p = \begin{cases} u_{p+1} - 1, \text{якщо } p < \sigma \ \text{ або } \ p \ge \tau, \\ \gamma, \text{якщо } p = \sigma < \tau \\ u_{\tau+1} - 1, \text{якщо } p = \sigma = \tau, \\ \eta, \text{якщо } p = m. \end{cases} \qquad (15)$$

Тоді $\forall p \in J_\sigma \cup J_m^\tau \quad \left(\tilde{X}_{u_p}, ..., \tilde{X}_{v_p}\right) \in E_{n_p}^{l_p}\left(\Gamma_r^\sigma\right)$, де $l_p = v_p - u_p + 1$, причому $\left(\tilde{X}_{u_1}, ..., \tilde{X}_{v_m}\right) = \left(\tilde{X}_1, ..., \tilde{X}_k\right) \in E_\eta^k(\Gamma)$.

Теорема 2. Нехай характеристичний вектор випадкової величини задовольняє умову (1), причому виконуються співвідношення (5) і (7). Нехай також мультимножини Γ_r^p визначаються згідно з (10), (11), σ — найменший індекс, для якого виконується умова $\eta_{\sigma+1} > \gamma$, τ — найбільший індекс, для якого виконується умова $\eta_\tau \le \eta - k + \delta$, індекси u_p і v_p визначаються згідно з (14), (15), $l_p = v_p - u_p + 1$. Тоді існує мінімаль X^* у задачі (2), яка задовольняє умови $X^*_{i_j} = \tilde{X}^*_j$ $\forall j \in J^{v_p}_{u_p}$, де для всіх $p \in J_\sigma \cup J^\tau_m$ справедливе співвідношення

$$\left(\tilde{X}^*_{u_p},...,\tilde{X}^*_{v_p}\right) = \underset{\left(\tilde{X}_{u_p},...,\tilde{X}_{v_p}\right)\in E^{l_p}_{n_p}\left(\Gamma^p_r\right)}{\arg\min} \sum_{j=u_p}^{v_p} c_{i_j}\tilde{X}_j . \qquad (16)$$

Доведення. Нехай точка X' — мінімаль у задачі (2), яка задовольняє (8). Тоді $\forall p \in J_\sigma \cup J^\tau_m$ $\left(\tilde{X}_{u_p},...,\tilde{X}_{v_p}\right) \in E^{l_p}_{n_p}\left(\Gamma^\sigma_r\right)$, де $\tilde{X}_j = X'_{i_j}$ $\forall j \in J^{u_p}_{v_p}$. Нехай також $\left(\tilde{X}^*_{u_p},...,X^*_{v_p}\right)$ є мінімаллю функції $\sum_{j=u_p}^{v_p} c_{i_j}\tilde{X}_j$ на множині $E^{l_p}_{n_p}\left(\Gamma^r_p\right)$ ($p \in J_\sigma \cup J^\tau_m$), звідси $H\left(\sum_{j=u_p}^{v_p} c_{i_j}\tilde{X}^*_j\right) \le_l H\left(\sum_{j=u_p}^{v_p} c_{i_j}\tilde{X}'_j\right)$.

Оскільки $L(X) = \sum_{p=1}^{\sigma}\sum_{j=u_p}^{v_p} c_{i_j}X_{i_j} + \sum_{p=\tau}^{k}\sum_{j=u_p}^{v_p} c_{i_j}X_{i_j}$ (якщо $\sigma \ne \tau$, то відповідні коефіцієнти цільової функції дорівнюють нулю), то для $X^* = \left(X^*_1,...,X^*_k\right)$, де $X^*_{i_j} = \tilde{X}^*_j$ $\forall j \in J^{u_p}_{v_p}$ $\forall p \in J_\sigma \cup J^\tau_k$, маємо

$$H\left(L\left(X^*\right)\right) = \sum_{p=1}^{\sigma} H\left(\sum_{j=u_p}^{v_p} c_{i_j}X^*_{i_j}\right) + \sum_{p=\tau}^{k} H\left(\sum_{j=u_p}^{v_p} c_{i_j}X^*_{i_j}\right) =$$

$$= \sum_{p=1}^{\sigma} H\left(\sum_{j=u_p}^{v_p} c_{i_j}\tilde{X}^*_{i_j}\right) + \sum_{p=\tau}^{k} H\left(\sum_{j=u_p}^{v_p} c_{i_j}\tilde{X}^*_{i_j}\right) \le_l$$

$$\le_l \sum_{p=1}^{\sigma} H\left(\sum_{j=u_p}^{v_p} c_{i_j}\tilde{X}'_j\right) + \sum_{p=\tau}^{k} H\left(\sum_{j=u_p}^{v_p} c_{i_j}\tilde{X}'_j\right) = H\left(L\left(X'\right)\right)$$

З іншого боку, $H(L\left(X'\right)) \le_l H(L\left(X^*\right))$, оскільки $X^* \in E^k_\eta(\Gamma)$ і X' — мінімаль у задачі (2). Отже, $H\left(L\left(X^*\right)\right) = H\left(L\left(X'\right)\right)$, тобто X^* також є мінімаллю в задачі (2). Теорему доведено.

У доповіді обґрунтовано властивості розв’язку лінійної безумовної задачі стохастичної комбінаторної оптимізації на розміщеннях у випадку, коли екстремум визначається на основі порівняння числових характеристик випадкових величин.

Література

1. Сергиенко И. В. Задачи оптимизации с интервальной неопределенностью: метод ветвей и границ / И. В. Сергиенко, О. А. Емец, А. О. Емец // Кибернетика и системный анализ. – 2013. – №5. – С. 38-50.
2. Емец О. А. О комбинаторной оптимизации в условиях неопределенности / О. А. Емец, А. А. Роскладка // Кибернетика и системный анализ. – 2008. – № 5. – С.35-44.
3. Ємець О. О. Розв'язування задач комбінаторної оптимізації на нечітких множинах / О. О. Ємець, Ол-ра О. Ємець. – Полтава: ПУЕТ, 2011. – 239 с. – Режим доступу: http://dspace.puet.edu.ua/handle/123456789/352/.
4. Емец О. А. Решение линейных безусловных задач комбинаторной оптимизации на размещениях со стохастической неопределенностью / О. А. Емец, Т. Н. Барболина // Кибернетика и системный анализ. – 2016. – № 3. – С. 141-153
5. Барболина Т. Н. О подходе к оптимизации с вероятностной неопределенностью с использованием упорядочивания случайных величин / Т. Н. Барболина // Вісник Запорізького національного університету: Збірник наукових статей. Фізико-математичні науки. – 2016. – № 1. – С. 11-20.
6. Стоян Ю. Г. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації / Ю. Г. Стоян, О. О. Ємець – К.: Ін-т системн. досліджень освіти, 1993. – 188 с. – Режим доступу: http://dspace.puet.edu.ua/handle/123456789/487.