**УДК 519.6**

# МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ РОЗРИВНИХ ПРОЦЕСІВ ЩО ЗАЛЕЖАТЬ ВІД ДВОХ ЗМІННИХ (ТРИКУТНІ ЕЛЕМЕНТИ)

***Беляєв В.О.***, магістр
*Бердянський державний педагогічний університет*
*edi77er@gmail.com*

***Науковий керівник:*** Литвин О.М.
*Українська інженерно-педагогічна академія*
*academ_mail@ukr.net*

*В роботі представляється алгоритм пошуку розривів функції двох змінних за допомогою наближення її розривним апроксимаційним сплайном, а також його чисельна реалізація.*

*Belyaev V.O. The work presented algorithm breaks the search functions of two variables by using the approach of approximating spline discontinuous and its numerical implementation.*

*Ключові слова*: РОЗРИВНА ФУНКЦІЇЯ, РОЗРИВНА ІНТЕРПОЛЯЦІЯ, РОЗРИВНА АПРОКСИМАЦІЯ.
*Keywords:* FUNCTION DISCONTINUOUS, DISCONTINUOUS INTERPOLATION, DISCONTINUOUS APPROXIMATION.

Нехай в області $D = [0;1]^2$ задана розривна функція двох змінних $f(x, y)$. Нехай $D$ розбита на $n$ довільних трикутників, та інформація про функцію задана у вигляді значень функції $f(x, y)$ у вузлах трикутників області $D$. Функція $f(x, y)$ має розриви першого роду на границях між цими трикутниками (не обов'язково між всіма). Побудуємо та дослідимо оператор розривної сплайн-інтерполяції для наближення розривної функції.

Розглянемо довільний трикутник $\mathrm{T}_i,\, i=\overline{1,n}$ з вузлами $A_i^{(k)}(x_i^{(k)}, y_i^{(k)}),\, i=\overline{1,n},\; k=\overline{1,3}$.

Вважаємо, що на кожній із сторін заданого трикутника функція $f(x,y)$ може мати (а може і не мати) розриви першого роду, причому в вершинах трикутника функція набуває значень

$$C_i^{(k)} = \lim_{\substack{(x,y)\to A_i^{(k)} \\ (x,y)\in \mathrm{T}_i}} f(x,y),\; i=\overline{1,n},\, k=1,2,3.$$

**Визначення 1.** Будемо називати розривним інтерполяційним лінійним поліноміальним сплайном в області $\mathrm{T}_i \subset D,\, i=\overline{1,n}$ наступну функцію

$$s_i\,(x,y) = C_i^{(1)} \frac{\omega_i^{(3)}(x,y)}{\omega_i^{(3)}\left(A_i^{(1)}\right)} + C_i^{(2)} \frac{\omega_i^{(2)}(x,y)}{\omega_i^{(2)}\left(A_i^{(2)}\right)} + C_i^{(3)} \frac{\omega_i^{(1)}(x,y)}{\omega_i^{(1)}\left(A_i^{(3)}\right)}, \quad (1)$$

$$\omega_i^{(k)}(x,y) = y - y_i^{(k)} - \frac{(x-x_i^{(k)})(y_i^{(k+1)} - y_i^{(k)})}{x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}}$$ – рівняння сторін.

**Зауваження.** Якщо значення функції у вузлах трикутної сітки невідомі, то для знаходження невідомих коефіцієнтів $C_i^{(k)},\; k=1,2,3,\quad i=\overline{1,n}$ пропонується використовувати метод найменших квадратів, згідно з яким всі невідомі знаходяться з умови

$$J_i(C) = \sum_{\mathrm{T}_i \subset D} \iint_{\mathrm{T}_i} \left[\, f(x,y) - s_i\,(x,y,C)\right]^2 dxdy \to \min_C . \quad (2)$$

И тоді отримаємо апроксимаційний розривний лінійний сплайн. Ця теорія розглянута на прикладі.

**Приклад.** Нехай задані вузли триангуляції одиничного квадрата $D=[0;1]^2$: $X1=\{0,0,0.3,0.3,0,0\}$,$Y1=\{0,1,0.7,0.4,0,0\}$, $X2=\{0,0.3,0.6,1,0.6,0.3\}$, $Y1=\{1,0.7,0.4,1,0.4,0.7\}$, $X3=\{0.3,1,1,1,1,0.6\}$, $Y3=\{0.7,1,1,0,0,0.4\}$.

Тобто одиничний квадрат розбито на 6 довільних трикутників: $\mathrm{T}_1 = \left\{(x,y)\in D: 0<x<0,3;\; 7x/3 < y < 1-x\right\}$;

$$\mathrm{T}_2 = \left\{(x,y)\in D: 1-y < x < 0,3 + 7/3(y-0,7);\; 0.7<y<1\right\};$$

$$\mathrm{T}_3 = \left\{(x,y)\in D: 0,3<x<0,6; 1-x<y<0,7+3/7(x-0,3)\right\} \cup$$

$$\cup\left\{(x,y)\in D: 0,6\le x<1;\ 0,4+0.5(x-0,6)<y<0,7+3/7(x-0,3)\right\};$$

$$\mathrm{T}_4=\left\{(x,y)\in D: 0,6<x<1; 1-x<y<0,4+0.5(x-0,6)\right\};$$

$$\mathrm{T}_5=\left\{(x,y)\in D: 0.5y<x<1-y; 0<y<0,4\right\};$$

$$\mathrm{T}_6=\left\{(x,y)\in D: 0<x<0,3; 2x/3<y<3x/7\right\}\cup$$

$$\left\{(x,y)\in D: 0,3\le x<0,7; 2x/3<y<1-x\right\}.$$

Нехай в області $D$ задана розривна функція $f(x,y)$, яка має розриви на лініях заданої триангуляції, але не на всіх.

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<0,6;\ 2x/3<y<1-x\\ x, & 0,7<y<1;\ 0,3+7/3(y-0,7)\\ 3-x, & 0,3<x<1;\ 1-x<y<0,7+3/7(x-0,3)\\ -2x^2+2, & 0<y<0.4;\ 0.5y<x<1-y\end{cases}.$$

Функція $f(x,y)$ має розриви першого роду у вузлах заданої трикутної сітки та в них має задані значення.

В кожному трикутному елементі побудуємо інтерполяційний сплайн $S(x,y)$ у вигляді формули (1). Після знаходження за формулою (2) невідомих коефіцієнтів, отримаємо сплайн вигляду

$$S(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<0,6;\ 2x/3<y<1-x\\ x, & 0,7<y<1;\ 0,3+7/3(y-0,7)\\ 3-x, & 0,3<x<1;\ 1-x<y<0,7+3/7(x-0,3)\\ -2.1x+0.5y+2.4, & 0<y<0.4;\ 3y/7<x<1-y\end{cases}$$

Побудований розривний сплайн точно наближує ту частину функції, де вона є постійною або лінійною, хоча функція розривна не на всіх лініях трикутної сітки, що підтверджує викладену вище теорію.

## *Література*

1. Литвин О.М., Першина Ю.І. Математичне моделювання процесів, розривних на лініях тріангуляції // Научно-технический журнал “Искусственный интеллект”.– №3 – Донецьк, 2012. – С.267 – 275