УДК 519.6

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ РОЗРИВНИХ ПРОЦЕСІВ, ЩО ЗАЛЕЖАТЬ ВІД ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

***А. Г. Косогова**, магістр*
Бердянський державний педагогічний університет
a.kosogova@mail.ru
Науковий керівник: О. М. Литвин
Українська інженерно-педагогічна академія
academ_mail@ukr.net

В роботі представляється алгоритм пошуку розривів функції однієї змінної за допомогою наближення її розривним апроксимаційним сплайном а також його чисельна реалізація.

Kosogorova I. I. The work presented algorithm breaks the search functions of one variable by using the approach of approximating spline discontinuous and its numerical implementation.

Ключові слова: РОЗРИВНА ФУНКЦІІЯ, РОЗРИВНА ІНТЕРПОЛЯЦІЯ, РОЗРИВНА АПРОКСИМАЦІЯ.
Keywords: FUNCTION DISCONTINUOUS, DISCONTINUOUS INTERPOLATION, DISCONTINUOUS APPROXIMATION.

Нехай розривна лінійна функція задана на інтервалі $E=[0;1]$. Інформацією про функцію $f(x)$, $x\in[0;1]$ є її значення, які можна отримати на довільній скінченній множині точок з інтервалу $[a,b]$. Потрібно знайти точки ε-розриву першого роду.

Розіб’ємо інтервал $[0;1]$ вузлами $0=x_1<x_2<...<x_n=1$ на n інтервалів $[x_k,x_{k+1}],\ k=\overline{1,n-1}$. Причому вузли x_k не співпадають з розривами функції $f(x)$.

Введемо поняття ε-неперервності функції однієї змінної.

Визначення 1. Якщо $\left|\lim\limits_{x\to x_q+0} f(x) - \lim\limits_{x\to x_q-0} f(x)\right| < \varepsilon$, то функцію $f(x)$ будемо називати ε - неперервною в точці x_q.

Викладемо алгоритм наближення розривної лінійної функції покроково.

Крок 1. Будуємо розривний апроксимаційний лінійний сплайн $S(x)$ на заданих вузлах $x_k,\ k=\overline{1,n}$ (наприклад, рівномірно розташованих) з невідомими коефіцієнтами $C_k^+, C_{k+1}^-,\ k=\overline{0,n-1}$. Причому на першій ітерації вважаємо, що односторонні значення функції в заданих вузлах збігаються. Знаходимо вектор $C=(C_1^+, C_2^-, C_2^+, C_3^-, ..., C_{n-1}^+, C_n^-)$, обчислюючи функціонал

$$J(C)=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}(f(t)-Sp_k(t))^2\,dt \to \min_C \qquad (1)$$

Крок 2. Знаходимо інтервали, на яких $\int_{x_k}^{x_{k+1}}(f(t)-Sp_k(t))^2\,dt \neq 0,\ k=\overline{0,n-1}$. Обчислюємо їх довжину $d_k = x_{k+1}-x_k$. Якщо $d_k < 2\varepsilon$, то інтервали (x_k, x_{k+1}) є ε-околом точок розриву (ε-розривами) і ітераційний процес закінчено. Якщо ця умова не виконується, то знайдені інтервали ділимо навпіл. Інші інтеграли дорівнюють нулю, оскільки $f(x)$ є кусково-лінійною функцією. Отримаємо новий набір вузлів. І повторюємо крок 1.

Крок 3. В якості вузлів розривного сплайну обираємо кінці інтервалу (0;1) та точки ε-розриву $x_m^*,\ m=\overline{1,M}$, враховуючи $C_0^+ = f(0)$, $C_m^\pm = f(x_m \pm \varepsilon),\ \ m=\overline{1,M}$, $C_{M+1}^- = f(1)$.

Цей алгоритм можна модифікувати на випадок нелінійної функції. Оскільки наближувати будемо лінійним розривним сплайном, то крім значення ε, потрібно ще значення точності наближення δ. Викладемо модифікований алгоритм покроково.

Крок 1. Будуємо розривний апроксимаційний сплайн на заданих вузлах $x_k,\ k=\overline{1,n}$ з коефіцієнтами $C_k^+, C_{k+1}^-,\ k=\overline{1,n-1}$.

Крок 2. Знаходимо матрицю C коефіцієнтів сплайна з умови (1). Після підстановки знайдених коефіцієнтів у сплайн отримаємо сплайн $S_k(x) = Sp_k(x, C)$

Крок 3. На кожному з інтервалів $[x_k, x_{k+1}],\ k = \overline{1, n-1}$ бчислюємо значення $J_k^* = \max\limits_{x_k \le x \le x_{k+1}} J_k(x),\ J_k(x) = \left| f(x) - S_k(x) \right|$.

Крок 4. Якщо виконуються умови:

1) $J_q < \delta,\ J_{q+1} < \delta$, де δ – задана точність наближення;

2) $S(x)$ є ε - неперервною в точці x_{q+1},

то вузол x_{q+1} видаляємо з розгляду.

Крок 5. З усіх J_k^* обираємо максимальне значення $M = \max\limits_{1 \le k \le n-1}(J_k^*)$ та ділимо інтервал, якому це максимальне значення належить.

Крок 6. На новій множині вузлів знову будуємо апроксимаційний сплайн та знаходимо матрицю коефіцієнтів C .

Перевіряємо виконання умови $\max\limits_{x \in [0;1]} \left| f(x) - Sp(x) \right| < \delta$ де δ – задана точність наближення.

Якщо умова виконана, то отримали набір оптимальних вузлів наближуючого сплайну, серед яких знаходяться і розриви заданої функції. Якщо вказана умова не виконана, то повертаємося до кроку 3. Проведений чисельний експеримент.

Література

1. Литвин О. М. Метод побудови розривних лінійних сплайнів для наближення розривних функцій однієї змінної / О. М. Литвин, Ю. І. Першина // Наукові записки НаУКМА. Комп'ютерні науки. – 2012. – Т.138. – С.80–84.