МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«УНІВЕРСИТЕТ БАНКІВСЬКОЇ СПРАВИ»

ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД УКООПСПІЛКИ
«ПОЛТАВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ ЕКОНОМІКИ І ТОРГІВЛІ»

Кваліфікаційна наукова праця
на правах рукопису

Циганчук Роман Олегович

УДК: 330:519.86

ДИСЕРТАЦІЯ

МОДЕЛЮВАННЯ ПЕРІОДИЧНИХ ПРОЦЕСІВ В ЕКОНОМІЦІ

08.00.11 – Математичні методи, моделі
та інформаційні технології в економіці

Подається на здобуття наукового ступеня кандидата економічних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

Р. О. Циганчук

Дисертація є ідентичною іншим примірникам дисертації
Вчений секретар спеціалізованої вченої ради Д 44.877.02
к. е. н. І. О. Пінчук

Науковий керівник:
Білий Леонід Адамович**,**
доктор технічних наук, професор

Львів – 2018

АНОТАЦІЯ

Циганчук Р. О. Моделювання періодичних процесів в економіці. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата економічних наук за спеціальністю 08.00.11 «Математичні методи, моделі та інформаційні технології в економіці» (05 – Соціальні та поведінкові науки). – Львівський навчально-науковий інститут ДВНЗ «Університет банківської справи», Вищий навчальний заклад Укоопспілки «Полтавський університет економіки і торгівлі», Полтава, 2018.

Дисертаційну роботу присвячено розробці моделей періодичних процесів в економіці на основі науково-методичних засад та інструментарію кінцево-різницевих рівнянь для підвищення ефективності управління економічними об’єктами.

Проаналізовано стан і вимоги стосовно аналізу та моделювання періодичних процесів в економіці, розглянуто моделі економічної динаміки, що побудовані на основі положень звичайних диференціальних рівнянь, при цьому визначено важливу роль фактору часу в економіці та в економічних процесах, розглянуто можливі варіанти залежності економічних показників від часу, включаючи залежності, що випливають з теорії економічних циклів. Досліджено, що головною ціллю моделювання економічних циклів є пояснення фундаментальних причин коливання економічної активності в часі, а також визначення основних факторів, які безпосередньо породжують коливання економічної кон’юнктури і механізмів її дії, також обґрунтовано необхідність розвитку математичного моделювання і методів аналізу періодичних процесів в економіці, так як економічний розвиток – неминучий і необхідний елемент розвитку світової економіки.

В умовах зростання рівня невизначеності у сучасній економіці, що природним чином випливає з ускладнення інформаційних відношень між економічними об’єктами, на їх конкурентоспроможність все більш впливає не тільки нерівність в доступі до засобів та технологій обробки інформації, а й нерівність в знаннях про використання таких технологій.

Виходячи з таких особливостей сучасного стану економічних об'єктів, управлінці прагнуть знайти більш дієві шляхи досягнення управлінської досконалості з метою відновлення та посилення економічної активності, зміцнення ринкових позицій та підвищення прибутковості економічного об'єкта. При цьому одним з важливих напрямків є моделювання періодичних процесів в економіці.

Будь-яка економічна система має надзвичайно складну структуру і потребує багатовимірного опису, насамперед, це стосується таких задач: сегментації ринку, прогнозування кон'юнктури ринку, вивчення і прогнозування економічної депресії, аналізу і прогнозування соціально-економічних явищ тощо.

В умовах бурхливого розвитку науково-технічного прогресу та інтенсифікації взаємодії між елементами економічних систем усе більшу роль у формуванні тенденцій і закономірностей відіграє фактор часу. Це привело до необхідності розроблення і використання у прогнозуванні та управлінні економічними процесами моделей особливого типу, які отримали назву «динамічні моделі». Ці моделі відображають характер часових змін в економічних об'єктах, що розглядаються, включаючи структурні зміни, що в них відбуваються, особливості та інтенсивність взаємодії між їхніми елементами. До динамічних моделей відносимо різноманітні види моделей, що використовують апарат теорії звичайних диференціальних рівнянь.

При цьому особливого значення набуває проблема моделювання економічної динаміки, зокрема проблема вдосконалення методів моделювання періодичних процесів в економіці, що дозволить вдосконалити управління економічними об'єктами (підприємствами, організаціями і т. д.) і підвищить ефективність їх функціонування.

Під динамічною системою будемо розуміти будь-який економічний об'єкт, стан якого змінюється в часі. Причому час в економічній динаміці може розглядатись як неперервний так і дискретний. Неперервний час зручний для моделювання процесів в економіці, оскільки дає змогу використовувати апарат диференціального числення і диференціальних рівнянь. Дискретний час зручний для розв’язування прикладних задач, оскільки статистичні дані завжди дискретні і належать до конкретних одиниць часу. Для цього класу задач, як правило, використовується апарат різницевих рівнянь.

Таким чином, математичний опис динамічних моделей періодичних процесів в економіці здійснюється, здебільшого: системами диференціальних рівнянь, у яких неперервною змінною є час; різницевими рівняннями, де час – дискретна величина; системами звичайних алгебраїчних рівнянь.

У зв’язку з цим за допомогою динамічних моделей, зокрема, розв’язуються задачі планування і прогнозування економічних процесів: визначення траєкторії розвитку економічної системи та її стану у задані моменти часу; аналіз економічної системи на стійкість; аналіз структурних зсувів.

Розроблено концепцію моделювання періодичних процесів в економіці, що базується на теоретичних положеннях математичного та системного аналізу, теорії економічних циклів, економічної теорії і враховує взаємозв’язок між періодичними процесами та стратегією економічних об’єктів та пов’язує елементи теоретичного, методичного, інструментального та модельного рівнів. Практичний рівень даної концепції передбачає впровадження у діяльність економічних об’єктів системи моделювання періодичних процесів в економіці для підвищення економічної ефективності їх функціонування.

У зв’язку з тим, що на теперішній час доведено нелінійну природу економічних систем і процесів в економіці, для їх адекватного опису потрібні нові, порівняно з добре розвинутими методами лінійного аналізу методи моделювання. Так, наприклад, нелінійні різницеві рівняння, що часто використовуються при дослідженні і моделюванні різних прикладних завдань у техніці, доречні і при моделюванні процесів в економіці, соціології, демографії та ін. При застосуванні різницевих рівнянь передбачається, що показники економічного процесу, які досліджуються, визначені в дискретні моменти часу. Доцільність такого розгляду визначається вихідними даними про економічні процеси, які вимірюються в дискретні моменти часу (офіційна статистика, періодичні опитування, переписи тощо). Інтервалом часу може бути п’ятирічка, рік, квартал, місяць, тиждень, доба тощо. Якщо інтервал часу стає нескінченно малим, то процес слід розглядати як неперервний і досліджувати його можливо за допомогою звичайних диференціальних рівнянь.

Оскільки періодичні зміни в розвитку економіки викликані багатьма причинами і умовами, чинність яких необхідно враховувати при розробці економічної політики держави і засад економічної поведінки всіх економічних об’єктів країни, то за допомогою моделювання періодичних процесів в економіці, зокрема, розв’язуються задачі планування і прогнозування економічних процесів: визначення траєкторії розвитку економічного об’єкта та його стан у задані моменти часу, аналіз економічного об’єкта на стійкість, аналіз структурних зсувів.

Удосконалено методичний підхід до розв’язання задач моделювання періодичних процесів в економіці, на основі яких періодичний розв’язок можливо отримати представленням диференціальних рівнянь економічного стану у формі крайової задачі або розв’язування задачі методом невизначених коефіцієнтів, або використанням різницевих рівнянь, розв’язаних відносно вузлових функцій моделі, що дозволяє підвищити точність дослідження економічних систем, шляхом розгляду економічних процесів у дискретні моменти часу, а не як неперервні. Тому наведений клас задач, що досліджено для моделювання періодичних процесів в економіці є надзвичайно важливим для розвитку систем управління економічними об’єктами та економікою в цілому. У зв’язку з чим застосування ефективних методів їх розв’язання і реалізації є актуальною науковою і практичною проблемою для удосконалення управління економічними об’єктами.

За ринкових умов господарювання ключовим економічним важелем, що активно впливає на розвиток суспільного виробництва і рівень життя населення, є ціна. Вона завжди коливається навколо ціни виробництва (перетвореної форми вартості одиниці товару, що дорівнює сумі витрат виробництва і нормативного прибутку) і відображає рівень суспільно необхідних витрат праці.

Удосконалено модель вирівнювання цін економічних об'єктів при дискретній зміні рівня активів, пропорційного різниці між пропозицією і попитом, що сприяє підвищенню загальної ефективності діяльності економічних об'єктів і визначенню шляхів підвищення прибутку.

Розроблено раціональні способи апроксимації диференціальних рівнянь економічного стану кінцево-різницевими та отримано різницеві рівняння підвищеної точності, які дають змогу ціною незначних ускладнень розрахункових формул скоротити загальне число прораховуваних вузлів і, отже, в кінцевому підсумку зменшити обсяг обчислень, для підвищення точності і полегшення процедури апроксимації диференціальних рівнянь кінцево-різницевими.

Розроблено дискретні в часі математичні моделі вирівнювання цін економічних об'єктів на основі звичайних різницевих рівнянь і рівнянь підвищеної точності, проведено порівняння чисельного експерименту обох моделей, що сприятиме підвищенню загальної ефективності діяльності економічних об'єктів.

Розвинуто методи розв'язування систем різницевих рівнянь, які поділяються на дві групи: прямі, або безітераційні, методи, за допомогою яких отримують точний розв'язок за кінцеве число арифметичних операцій, та ітераційні, доведено, що використання останніх ускладнюється проблемою збіжності ітераційного процесу.

Розвинуто модель класу економічних задач, які використовують апарат кінцево-різницевих рівнянь, що надає змогу завдяки незначним ускладненням розрахункових формул, підвищити точність, зменшити обсяг обчислень, що в свою чергу скорочує час і об'єм проведення дослідження дискретних процесів в економіці, що таким чином дозволяє скоротити необхідні витрати на обчислення.

Розроблено і представлено підхід до дослідження періодичних процесів в економіці на основі побудови математичних моделей і методів їх аналізу, впровадження якої сприяє зростанню економічної ефективності функціонування об’єктів економіки.

Проведено реалізацію і оцінку ефективності інструментів моделювання періодичних процесів в економіці. Підтверджено актами загальний очікуваний економічний ефект від впровадження результатів дисертаційної роботи на суму 154,5 тис. грн.

Ключові слова: неперервний час, дискретний час, математична модель, вузлова функція, економічна динаміка, періодичні процеси в економіці.

ABSTRACT

Tsyhanchuk R. O. Periodic processes modelling in the economics. – Qualification scientific work on the rights of manuscripts

Dissertation for the academic degree of Candidate of Economic Sciences in specialty 08.00.11 – Mathematical Methods, Models and Information Technologies in the Economics. – Higher Educational Institution of Central Union of Consumer Associations of Ukraine "Poltava University of Economics and Trade", Poltava, 2018.

The dissertation work is devoted to the development of periodic processes models in the economicsbased on the scientific and methodical foundations and tools of finite-difference equations to increase the efficiency of economic objects management.

The state and requirements concerning the analysis and modeling of the periodic processes in the economics were analyzed, the models of the economic dynamics based on the provisions of the ordinary differential equations were considered, while the important role of the time factor in economics and economic processes is determined; the possible variants of economic indicators dependence on

time, including dependencies arising from the theory of economic cycles were considered. It was investigated that the main purpose of the modeling of economic cycles is to explain the fundamental causes of the fluctuations of economic activity in time, as well as to determine the main factors that directly generate the fluctuations in economic conditions and mechanisms of its operation; also the necessity to develop the mathematical modeling and methods of the analysis of periodic processes in the economy is substantiated, since the economic development is an inevitable and necessary element for the world economy development.

In terms of increase in the uncertainty level in the modern economy, which naturally follows from the complication of information relations between the economic objects, their competitiveness is increasingly influenced not only by inequality in the access to means and technologies of information processing, but also by inequality in knowledge about the use of such technologies.

Based on these features of the current state of economic objects, managers seek to find more effective ways to achieve managerial excellence in order to restore and strengthen the economic activity, strengthen the market positions and increase the profitability of an economic object. In this case, one of the important directions is the periodic processes modelling in the economics

Any economic system has an extremely complex structure and needs a multidimensional description, first of all, it concerns such tasks as market segmentation, forecasting of market conditions, studying and forecasting of economic depression, analysis and forecasting of social and economic phenomena, etc.

In terms of rapid development of the scientific and technological progress and intensification of interaction between the elements of economic systems, the factor of time plays an increasingly important role in shaping tendencies and regularities. This led to the need to develop and use the models of a special type in the forecasting and management of economic processes, called "dynamic models". These models reflect the nature of time changes in the economic objects under consideration, including the structural changes taking place in them, the peculiarities and intensity of the interaction between their elements. The dynamic models include various types of models using the apparatus of the theory of ordinary differential equations.

In this case, the problem of economic dynamics modeling becomes particularly important, notably, the problem of improvement of the methods of periodic processes modelling in the economics, which will improve the management of economic objects (enterprises, organizations, etc.) and will increase the efficiency of their functioning.

Under a dynamic system, we will understand any economic object, the state of which changes in time. And the time in the economic dynamics can be regarded as continuous and discrete. The continuous time is convenient for processes modeling in the economics, since it allows you to use the apparatus of differential calculus and differential equations. Discrete time is convenient to resolve the applied problems, since the statistical data are always discrete and belong to the specific units of time. For this class of task, as a rule, the apparatus of difference equations is used.

Thus, the mathematical description of the processes dynamic models in the economics is carried out, for the most part: with the systems of differential equations, where the time is a continuous variable; the difference equations, where the time is a discrete value; the systems of ordinary algebraic equations.

In this regard, with the help of dynamic models, in particular, the tasks of planning and forecasting of the economic processes are solved: the definition of the trajectory of the development of the economic system and its state at the given moments of time; analysis of the economic system for stability; analysis of the structural distortion.

The concept of periodic processes modeling in economics was developed based on the theoretical provisions of mathematical and system analysis, theory of economic cycles, economic theory and taking into account the interrelation between the periodic processes and the strategy of economic objects and it relates the elements of theoretical, methodical, instrumental and model levels. The practical level of this concept involves the introduction of economic objects of system of periodic processes modelling in economics into activities for the increase in economic effectiveness of their functioning.

Due to the fact that the nonlinear nature of the economic systems and processes in the economics has been proved to date, for their adequate description, the new methods compared to well-developed methods of the linear analysis of modeling methods are needed. Thus, for example, nonlinear difference equations that are often used in the study and modeling of various application problems in the technology, are also relevant for the processes modeling in economics, sociology, demography, and others. When applying the difference equations, it is assumed that the economic process indicators being investigated are determined at the discrete moments of time. The expediency of such a review is determined by the initial data on economic processes, which are measured at the discrete moments of time (official statistics, periodic surveys, censuses, etc.). The interval may be five years, a year, a quarter, a month, a week, a day, etc. If the time interval becomes infinitely small, then the process should be regarded as a continuous one and can be investigated by means of the ordinary differential equations.

Since the periodic changes in the development of the economy are caused by many reasons and conditions, the validity of which should be taken into account when developing the economic policy of the state and the principles of economic behavior of all economic objects of the country, then, by periodic processes modelling in the economics, in particular, the following tasks of planning and forecasting of the economic processes are resolved: definition of the trajectory of economic object development and its state at the given moments of time, analysis of the economic object for stability, analysis of structural distortions.

The methodical approach to solving the tasks of periodic processes modeling in the economics was improved, on the basis of which a periodic solution can be obtained by representing the differential equations of the economic state in the form of a boundary value problem or solving a problem by the method of indefinite coefficients, or by using the difference equations solved for the nodal functions of the model, which allows to improve the accuracy of the study of economic systems by considering the economic processes at discrete moments of time, and not as continuous ones. Therefore, the given class of problems investigated for periodic processes modeling in economics is extremely important for the development of systems for economic objects management and the economics as a whole. By virtue whereof, the application of effective methods for their solution and implementation is an actual scientific and practical problem for the improvement of economic objects management.

Under market conditions, the price is a key economic lever that actively influences the development of social production and the standard of living of the population. It always fluctuates around the price of production (transformed form of the value of a unit of goods equal to the sum of production costs and standard income) and reflects the level of socially necessary labor costs.

The model of equalization of prices of economic objects with a discrete change in the level of assets, the proportional difference between the supply and demand, which contributes to the increase in overall efficiency of economic objects and determining ways to increase profits was improved.

The rational ways for approximating the differential equations of the economic state to the finite difference are developed and the difference equations of the high accuracy are obtained, which allow the price of minor complications of the calculation formulas to reduce the total number of calculated nodes and, consequently, ultimately reduce the amount of computations, to increase the accuracy and simplify the procedure of approximating the differential equations are as a finite-difference one.

Discrete time-based mathematical models of equalizing the prices of economic objects on the basis of ordinary difference equations and equations of high precision have been developed; a comparison of numerical experiment of both models has been made, which will increase the overall efficiency of the economic objects activity.

The methods of solving systems of the difference equations are developed, which are divided into two groups: direct or non-inertia, the methods by which they obtain the exact solution for a finite number of arithmetic operations, and iterative one; it is proved that the use of the latter is complicated by the problem of convergence of the iterative process.

The model of the class of economic problems using the apparatus of finite-difference equations is developed, which due to the slight complication of the calculation formulas enables the increase in the accuracy, the reduction of the volume of computations, which in turn reduces the time and scope of the research of discrete processes in the economy, which in this way allows you to reduce the necessary computing costs.

The approach to the study of periodic processes in the economy based on the construction of mathematical models and methods of their analysis was developed and presented, the introduction of which contributes to the growth of the economic efficiency of the functioning of economic objects.

The implementation and evaluation of the tools effectiveness for periodic processes modeling in the economics is carried out. The total expected economic effect from the implementation of the results of the dissertation work for the amount of 154.5 ths. UAH was confirmed by the acts.

Keywords: continuous time, discrete time, mathematical model, nodal function, economic dynamics, periodic processes in economics.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Монографії:

1. Tsyhanchuk R. O. Modelling of periodic economic processes discrete in time / R. O. Tsyhanchuk // Actual problems of modern science : monograph / edited by Musial Janusz, Polishchuk Oleh, Sorokatji Ruslan ; UTP University of Science and Technology, Bydgoszcz. – 2017. – ISBN 978-83-938655-3-6. – 921 p. (57,56 друк. арк., *особисто автором* описано моделювання періодичних економічних процесів, дискретних у часі (С. 68–79) – 0,54 друк. арк.).

Статті у наукових фахових виданнях України:

2. Циганчук Р. О. Моделювання економічних процесів, дискретних у часі, різницевими рівняннями, розв’язаними відносно вузлових функцій / Р. О. Циганчук // Вісник Університету банківської справи Національного банку України (м. Київ) : зб. наук. пр. – 2014. – № 2 (20). – С. 248–252 (0,51 друк. арк.).
3. Циганчук Р. О. Метод розв’язання різницевих рівнянь відносно вузлових функцій для моделювання економічних процесів, дискретних у часі / Р. О. Циганчук // Вісник Одеського національного університету (м. Одеса) : наук. журн. – 2014. – Т. 19. – Вип. 3/4. – (Серія : Економіка) – С. 251–254 (0,51 друк. арк.).
4. Циганчук Р. О. Розв’язання різницевих рівнянь відносно вузлових функцій у моделі економічних процесів дискретних у часі / Р. О. Циганчук // Формування ринкової економіки в Україні (м. Львів) : зб. наук. пр. / Львівський національний університет імені Івана Франка – 2014. – Вип. 32. – С. 159–165 (0,51 друк. арк.).
5. Циганчук Р. О. Різницеві рівняння підвищеної точності для моделювання динаміки економічних процесів / Л. А. Білий, Р. О. Циганчук // Вісник Університету банківської справи (м. Київ) : зб. наук. пр. – 2015. – № 1 (22). –

С. 124–131 (0,74 друк. арк., *особисто автором розроблено* Різницеві рівняння підвищеної точності – 0,54 друк. арк.).

6. Циганчук Р. О. Моделювання періодичних економічних процесів / Р. О. Циганчук // Вісник Університету банківської справи (м. Київ) : зб. наук. пр. – 2017. – № 2 (29). – С. 75–79 (0,48 друк. арк.).

Статті у наукових періодичних виданнях іноземних держав та виданнях України, включених до міжнародних наукометричних баз:

7. Циганчук Р. О. Моделювання періодичних економічних процесів, дискретних у часі / Р. О. Циганчук // Бізнес-навігатор : наук.-вироб. журн. – 2017. – Вип. 4–2 (43). – С. 162–166 (0,55 друк. арк.).

Публікації в інших виданнях:

8. Циганчук Р. О. Моделювання динаміки економічних процесів, що є дискретними у часі / Р. О. Циганчук // Сучасні наукові підходи до стабільного економічного розвитку та економічної безпеки : матеріали Міжнародної науково-практичної конференції, 21–22 лютого 2014 р. / Чернігівський державний технологічний університет. – Чернігів : Видавничий дім «Гельветика», 2014. – С. 242–245 (0,22 друк. арк.).
9. Циганчук Р. О. Метод отримання різницевих рівнянь для моделювання економічних процесів / Р. О. Циганчук // Формування інформаційної економіки: світовий досвід та вітчизняні реалії : матеріали Міжнародної науково-практичної конференції (м. Херсон, 14–15 березня 2014 р.) / ред. кол. : К. С. Шапошников [та ін.]. – Херсон : Видавничий дім «Гельветика», 2014. – С. 167–170 (0,22 друк. арк.).
10. Циганчук Р. О. Моделювання динаміки економічних процесів дискретних у часі / Р. О. Циганчук // Теоретичні та прикладні аспекти аналізу фінансових систем : збірник тез XIV Міжнародної науково-практичної конференції аспірантів та студентів, 26–27 березня 2014 р. / відп. за вип.

В. В. Рисін ; Львівський інститут банківської справи Національного банку України. – Львів, 2014. – С. 534–536 (0,13 друк. арк.).

11. Циганчук Р. О. Метод отримання і розв’язання різницевих рівнянь при моделюванні динаміки економічних процесів дискретних у часі / Р. О. Циганчук // Економічні студії (м. Львів) : наук.-практ. журн. – 2014. – № 3 (03). – С. 94–99 (0,74 друк. арк.).
12. Циганчук Р. О. Розв’язання різницевих рівнянь відносно вузлових функцій у моделі економічних процесів, дискретних у часі / Р. О. Циганчук // Моделювання економіки: проблеми, тенденції, досвід : тези доповідей V Міжнародної науково-методичної конференції Форуму молодих економістів-кібернетиків, 2–3 жовтня 2014 р., м. Львів / відп. ред. В. М. Вовк ; Видавничий центр ЛНУ ім. І. Франка, 2014. – С. 73–75 (0,09 друк. арк.).
13. Циганчук Р. О. Застосування різницевих рівнянь у моделюванні економічних процесів / Р. О. Циганчук // Розвиток національної економіки: теорія і практика : матеріали Міжнародної науково-практичної конференції, 3–4 квітня 2015 року, проведеної на базі «Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника», м. Івано-Франківськ. – Тернопіль : Крок, 2015. – Ч. 3. – С. 402–403 (0,13 друк. арк.).
14. Циганчук Р. О. Використання різницевих рівнянь у моделюванні економічних процесів / Р. О. Циганчук // Проблеми забезпечення ефективного функціонування та стабільного розвитку банківської системи України : тези доповідей учасників V науково-практичної конференції студентів, аспірантів та молодих вчених. – Київ : УБС НБУ, 2015. – С. 202–203 (0,13 друк. арк.).
15. Циганчук Р. О. Моделювання періодичних процесів макроекономіки / Р. О. Циганчук // матеріали XXIII Міжнародної науково-практичної інтернет-конференції «Проблеми та перспективи розвитку науки на початку третього тисячоліття у країнах Європи та Азії» : зб. наук. пр. – Переяслав-Хмельницький, 2016. – С. 43–45 (0,2 друк. арк.).

16. Циганчук Р. О. Моделювання періодичних процесів / Р. О. Циганчук // Проблеми розвитку фінансово-кредитної системи : збірник тез XVI Міжнародної наукової конференції молодих вчених, аспірантів та студентів, приуроченої до 25-річчя Незалежності України, 14–15 квітня 2016 року / ЛННІ ДВНЗ «Університет банківської справи». – Львів, 2016. – С. 665–666 (0,13 друк. арк.).
17. Циганчук Р. О. Застосування різницевих рівнянь в економіці / Р. О. Циганчук // Інформаційні технології в соціокультурній сфері, освіті та економіці : матеріали Міжнародної науково-практичної конференції студентів і молодих учених / М-во освіти і науки України ; М-во культури України ; Київ. нац. ун-т культури і мистецтв. – Київ : Видавничий центр КНУКіМ, 2017. – С. 139–140 (0,13 друк. арк.).
18. Циганчук Р. О. Використання різницевих рівнянь в економіці / Р. О. Циганчук // Проблеми розвитку фінансово-кредитної системи : збірник тез XVI Міжнародної наукової конференції молодих вчених, аспірантів та студентів, 30–31 березня 2017 р. / ЛННІ ДВНЗ «Університет банківської справи». – Львів, 2017. – С. 629–630 (0,13 друк. арк.).

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність теми. Теперішній стан економіки України і її подальший розвиток багато у чому залежать від створення стимулів, мотивацій, попиту та формуванні потреб щодо використання цифрових технологій, продуктів та послуг серед українських секторів промисловості, сфер життєдіяльності, бізнесу та суспільства для підвищення їх ефективності, конкурентоздатності та національного розвитку, зростання обсягів виробництва високотехнологічної продукції. Тому цифровізація та багатоформність на сьогодні є головними трендами на загальному ринку праці. Уміння використовувати цифрові технології в роботі поступово стає необхідним для більшості спеціальностей та професій, тобто наскрізним або багатоплатформним.

Але на сьогоднішній день в Україні має місце таке явище, як цифровий розрив (цифрова нерівність). Це нерівність у доступі до можливостей в економічній, соціальній, культурній, освітній галузях, які існують або поглиблюються в результаті неповного, нерівномірного або недостатнього доступу до комп’ютерних, телекомунікаційних та цифрових технологій.

При цьому особливого значення набуває проблема моделювання економічної динаміки, зокрема проблема вдосконалення методів моделювання періодичних процесів в економіці, що дозволить вдосконалити управління економічними об’єктами (підприємствами, організаціями і т. д.), а така проблема як вирівнювання цін економічних об’єктів, що вимагає розгляду процесу в окремі періоди часу, успішно може бути розв’язана на основі системи кінцево-різницевих рівнянь. Ураховуючи, що статистична інформація економіки є дискретною, використання апарату кінцево-різницевих рівнянь є необхідною і актуальною передумовою успіху аналізу економічних процесів.

Дослідженню проблем моделювання економічної динаміки присвячено праці багатьох вітчизняних і зарубіжних науковців, зокрема В. В. Вітлінського, О. О. Замкова, В. Я. Заруби, В. В. Іванової, Т. С. Клебанової, М. Д. Кондратьєва, І. А. Красса, Ю. Г. Лисенка, В. П. Ло-патіна, В. Л. Петренка, В. М. Порохні, О. В. Раєвнєвої, М. Є. Рогози, М. В. Румянцева, І. Є. Семенчі, А. В. Толстопятенка та ін. Однак питання розроблення математичних моделей періодичних процесів в економіці, які базуються на різницевих рівняннях високої точності, в роботах цих авторів недостатньо висвітлене і виступає одним із самих складних, до якого незмінно повертаються вітчизняні й закордонні фахівці.

Таким чином, розробка моделей періодичних процесів в економіці є актуальною, що обумовило вибір теми дисертаційної роботи, її мету і завдання.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дослідження виконувалось у контексті науково-дослідних робіт кафедри економіки та інформаційних технологій Львівського навчально-наукового інституту ДВНЗ «Університет банківської справи» за темою «Прогнозування та моделювання процесів сталого розвитку економічних агентів» (номер державної реєстрації 0117U003648, довідка № 09-007/716 від 04.06.2018 р.), в межах якої автором удосконалено процедуру апроксимації диференціальних рівнянь економічного процесу різницевими рівняннями, розвинуто метод отримання різницевих рівнянь підвищеної точності при моделюванні економічних процесів, дискретних у часі, на основі чого отримано різницеві рівняння підвищеної точності, які дають змогу ціною незначного ускладнення розрахункових формул суттєво скоротити загальне число прораховуваних вузлів; Харківського навчально-наукового інституту ДВНЗ «Університет банківської справи» за темою «Моделювання фінансової стабільності руху фінансових потоків економічних агентів країни в умовах глобалізації» (номер державної реєстрації 0118U003772, довідка № 09-007/717 від 04.06.2018 р.), в межах якої автором проведено моделювання періодичних економічних процесів дискретних у часі, а саме автором розроблено дискретні в часі математичні моделі вирівнювання цін за рівнем активу узагальнено в разі дискретної зміни рівня активу, пропорційного різниці між пропозицією і попитом, одержали подальший розвиток способи побудови математичних моделей економіки, дискретних у часі, з використанням кінцево-різницевих рівнянь і апроксимації диференціальних рівнянь різницевими шаблонами.

Мета і завдання дослідження. Метою дисертаційної роботи є розробка моделей періодичних процесів в економіці, на основі, науково-методичних засад та інструментарію кінцево-різницевих рівнянь для підвищення ефективності управління економічними об’єктами.

Відповідно до мети було поставлено і вирішено такі *завдання:*

проаналізовано стан і вимоги стосовно аналізу та моделювання періодичних процесів в економіці;

розроблено концепцію моделювання періодичних процесів в економіці;

обґрунтовано можливість ефективного використання апарату різницевих рівнянь для моделювання періодичних процесів в економіці;

узагальнено моделі економічної динаміки щодо вирівнювання цін економічних об’єктів;

розроблено апарат ефективного аналізу періодичних процесів в економіці шляхом отримання для економічних об’єктів різницевих шаблонів підвищеної точності;

розвинуто метод невизначених коефіцієнтів, стосовно економічних процесів, дискретних у часі;

розроблено математичні моделі вирівнювання цін для економічних об’єктів;

розроблено механізм застосування на практиці запропонованих моделей вирівнювання цін.

Об’єктом дослідження є періодичні процеси в економіці.

Предметом дослідження є теоретико-методологічні засади, економіко-математичні методи моделювання періодичних процесів в економіці.

Методи дослідження. Теоретичною і методологічною основою дослідження стали роботи вітчизняних і зарубіжних учених у сфері математичного моделювання, моделювання економіки, дослідження операцій, моделювання економічної динаміки, економічної теорії, теорії економічних циклів, моделювання періодичних процесів, економіко-математичного моделювання та інформаційних технологій. У процесі дослідження для досягнення визначеної мети застосовувався комплекс загальнонаукових методів: *теоретичного узагальнення* – для систематизації основних методологічних підходів до вивчення періодичних і циклічних процесів у економіці як економічної категорії (п. 1.1); *теорії системного аналізу та синтезу* – для розроблення концепції моделювання періодичних і циклічних процесів економіки (п. 1.1, 3.1, 3.2, 3.3) та розроблення концептуальних засад моделювання (п. 1.2, 2.1, 2.2, 2.3*); теорії економічних циклів, економічної теорії* – при дослідженні понять «періодичність в економіці», «циклічність», «ціна»; *методи теорії крайових задач* – при апробації моделей і розробці методів, для розв’язання моделей вирівнювання цін економічних об’єктів (п. 2.2, 3,3); *метод невизначених коефіцієнтів* – для визначення і розв’язування систем різницевих рівнянь та при апробації моделей (п. 2.3, 3,1); *сучасні інформаційні технології* – для розв’язування моделей економічних процесів, дискретних у часі, відносно вузлових функцій (п. 3.1).

Інформаційну базу дослідження становлять матеріали науково-практичних конференцій, наукові праці вітчизняних та зарубіжних учених, монографії, збірники, періодичні видання вітчизняних та міжнародних організацій, ресурси мережі Інтернет та власні розрахунки автора.

Оперативність і точність розрахунків було забезпечено шляхом використання системи комп’ютерної алгебри MathCad, програмного середовища Microsoft Excel.

Наукова новизна одержаних результатів полягає у вирішенні нового важливого для економіки України наукового завдання моделювання періодичних процесів в економіці, що передбачає підвищення рівня їх загальної ефективності. До основних наукових результатів дослідження, які визначають суттєву новизну, належать такі:

вперше:

розроблено концепцію моделювання періодичних процесів в економіці, яка базується на теоретичних положеннях системного аналізу та синтезу, теорії економічних циклів, економічній теорії, використанні економіко-математичних методів та моделей періодичних процесів, впровадження якої сприяє зростанню економічної ефективності функціонування економічних об'єктів;

удосконалено:

методичний підхід до розв'язання задач моделювання періодичних процесів в економіці, на основі яких періодичний розв'язок можливо отримати представленням диференціальних рівнянь економічного стану у формі крайової задачі або розв'язування задачі методом невизначених коефіцієнтів, або використанням різницевих рівнянь, розв'язаних відносно вузлових функцій моделі, що дозволяє підвищити точність дослідження економічних систем, шляхом розгляду економічних процесів у дискретні моменти часу, а не як неперервні;

модель вирівнювання цін економічних об'єктів при дискретній зміні рівня активів, пропорційного різниці між пропозицією і попитом, що сприяє підвищенню загальної ефективності діяльності економічних об'єктів і визначенню шляхів підвищення прибутку;

одержала подальший розвиток:

модель класу економічних задач, які використовують апарат кінцево-різницевих рівнянь, що надає змогу завдяки незначним ускладненням розрахункових формул, скоротити загальне число прораховуваних вузлів, підвищити точність, зменшити обсяг обчислень, що в свою чергу скорочує час і об'єм проведення дослідження дискретних процесів в економіці, що таким чином дозволяє скоротити необхідні витрати на обчислення.

Практичне значення отриманих результатів

Економіко-математичні моделі, представлені в дисертації, є універсальними і можуть бути використані у практичній роботі суб'єктів господарювання, державних органах, що сприятиме підвищенню ефективності управління їх функціонуванням та забезпеченню комплексної цілеспрямованої діяльності, орієнтованої на ухвалення обґрунтованих і своєчасних рішень.

Наукові результати дослідження знайшли своє практичне застосування у діяльності суб'єктів господарювання різних галузей, а саме: ТзОВ «Дженерал Менеджмент» (довідка № 12/06/2018 від 12.06.2018 р.) та ТзОВ «Українська меблева марка» (довідка № 18 від 07.06.2018 р.). Загальний очікуваний економічний ефект від впровадження результатів дисертаційної роботи склав 154,5 тис. грн.

Окремі положення дисертаційної роботи використовуються у навчальному процесі Львівського навчально-наукового інституту ДВНЗ «Університет банківської справи» при викладанні дисциплін: «Дослідження операцій», «Моделі економічної динаміки» та «Економічна кібернетика» (довідка № 02-20-015/283 від 07.06.2018 р.).

Особистий внесок здобувача. Дисертаційна робота є одноосібно виконаною науковою працею, в якій викладено авторський підхід до моделювання періодичних процесів макроекономіки. З публікацій, що написані у співавторстві, використано тільки ті результати, які отримані автором особисто.

Апробація результатів дисертації. Положення і результати дослідження доповідалися та обговорювалися: на Міжнародній науково-практичній конференції «Сучасні наукові підходи до стабільного економічного розвитку та економічної безпеки» (м. Чернігів, 2014 р.); Міжнародній науково-практичній конференції «Формування інформаційної економіки: світовий досвід та вітчизняні реалії» (м. Херсон, 2014 р.); XIV Міжнародній науковій конференції аспірантів та студентів «Теоретичні та прикладні аспекти аналізу фінансових систем» (м. Львів, 2014 р.); V Міжнародній науково-методичній конференції Форуму молодих економістів-кібернетиків «Моделювання економіки: проблеми, тенденції, досвід» (м. Львів, 2014 р.); Міжнародній науково-практичній конференції «Розвиток національної економіки: теорія і практика» (м. Івано-Франківськ, 2015 р.); V науково-практичній конференції студентів, аспірантів та молодих учених «Проблеми забезпечення ефективного функціонування та стабільного розвитку банківської системи України» (м. Київ, 2015 р.); XXIII Міжнародній науково-практичній інтернет-конференції «Проблеми та перспективи розвитку науки на початку третього тисячоліття у країнах Європи та Азії» (м. Переяслав-Хмельницький, 2016 р.); XVI Міжнародній науковій конференції молодих учених, аспірантів та студентів, приуроченій до 25-річчя Незалежності України «Проблеми розвитку фінансово-кредитної системи» (м. Львів, 2016 р.); Міжнародній науково-практичній конференції студентів і молодих учених «Інформаційні технології в соціокультурній сфері, освіті та економіці» (м. Київ, 2017 р.); XVI Міжнародній науковій конференції молодих учених, аспірантів та студентів «Проблеми розвитку фінансово-кредитної системи» (м. Львів, 2017 р.).

Публікації. Результати дослідження викладено у 18 працях, з яких: 1 – розділ у колективній монографії, 6 – статті в наукових фахових виданнях (із них 1 – у виданні України, включеному до міжнародних наукометричних баз); 11 публікацій в інших виданнях. Загальний обсяг публікацій становить 62,91 друк. арк., з яких особисто авторові належить 5,89 друк. арк.

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається зі вступу, трьох розділів, висновків, списку використаних джерел. Загальний обсяг дисертації становить 188 сторінок, у тому числі: основний текст – 167 сторінок або 7,6 авторських аркуша, список використаних джерел (155 найменувань) – 13 сторінок, 2 додатки на 8 сторінках. Дисертація містить 17 таблиць і 12 рисунків.

РОЗДІЛ 1
ТЕОРЕТИКО-МЕТОДОЛОГІЧНІ ЗАСАДИ МОДЕЛЮВАННЯ ПЕРІОДИЧНИХ ПРОЦЕСІВ В ЕКОНОМІЦІ

1.1. Особливості періодичних процесів в економіці

Моделювання економіки здебільшого розглядається як розділ економічної науки, що присвячений аналізу властивостей і рішень математичних моделей економічних процесів. У випадках моделювання управління економічними об'єктами ці моделі можуть розглядатись як частина математичної теорії на стику з економічною наукою. Моделювання економіки відділяється зазвичай від економетрики, методами якої проводяться статистичні оцінки та аналіз економічних залежностей на основі вивчення емпіричних даних.

У моделюванні економіки досліджуються теоретичні моделі, засновані на певних формальних передумовах (лінійність, опуклість, монотонність і таке ін., конкретні формули взаємозв'язку величин). При моделюванні економіки не вивчається ступінь обґрунтованості того, що дана залежність має ту чи іншу форму (наприклад, що величина споживання є лінійною зростаючою функцією доходу), – це залишається для економетрики. Таким чином завданням моделювання економіки є вивчення питання про існування рішення моделі, умов її невід'ємності, стаціонарності, наявності інших властивостей. Це зазвичай здійснюється, як і в математиці, шляхом дедуктивного отримання наслідків (теорем) з апріорно зроблених передумов (аксіом) [21].

Але, предметна область, методологія та інструментарій економічної науки не вичерпуються підходами моделювання економіки та економетрики – зазвичай в економічних дослідженнях використовуються також методи якісного аналізу, індуктивні, евристичні підходи, що перемежовуються з елементами моделювання економіки та економетрики. Таким чином, моделювання економіки виступає і як самостійний розділ економічної науки, і як один з її інструментів. При цьому розділи моделювання економіки, що досліджувалися раніше в суто теоретичному плані, все більше стають теоретичною базою та елементами прикладних досліджень [25; 26].

Серед моделей економіки можна виділити два великі класи – моделі рівноваги в економічних системах і моделі економічного зростання. Моделі рівноваги (наприклад, модельЕрроу – Дебре, модель «витрати-випуск» В. Леонтьєва) допомагають дослідити стани економічних систем, у яких рівнодіюча всіх зовнішніх сил дорівнює нулю. Це, взагалі кажучи, статичні моделі, в той час як економічна динаміка описується за допомогою моделей зростання (модель Харрода – Домара, модель Солоу, моделі магістрального типу та ін.). Ключовим моментом дослідження моделей зростання є аналіз і відшукування траєкторій стаціонарного росту (зростання з постійними, у тому чи іншому сенсі, структурними характеристиками), до виходу на які зазвичай прагне описувана моделлю економічна система. Дослідження траєкторії стаціонарного зростання є одночасно базою для аналізу більш складних типів росту і сполучною ланкою з моделями економічної рівноваги [76; 85; 94].

Однією з важливих економічних цілей будь-якої держави є економічне зростання або краще сказати, економічний розвиток суспільства, тому що зростаюча економіка має велику здатність задовольняти нові потреби і вирішувати соціально-економічні проблеми як в самій країні, так і на міжнародному рівні. Збільшення реальних доходів розширює коло можливостей для громадян країни. Економічне зростання полегшує вирішення проблеми обмеженості ресурсів.

Характер і динаміка економічного розвитку країни є предметом найпильнішої уваги економістів і політиків. Від того, які процеси відбуваються в динаміці і рівні розвитку, які при цьому відбуваються структурні зміни в національній економіці, залежить дуже багато чого в житті країни та її перспективах.

Параметри економічного зростання, їх динаміка широко використовуються для характеристики розвитку, у державному регулюванні економіки. Населення оцінює діяльність вищих господарських і політичних органів тієї чи іншої країни (наприклад, парламенту, президента) перш за все на основі розгляду показників динаміки економічного зростання, динаміки рівня життя. Економічне зростання, його темпи, якість та інші показники залежать не тільки від потенціалу національного господарства, але значною мірою від зовнішньоекономічних і зовнішньополітичних чинників [5].

Серед економістів вагомий внесок у розроблення цієї тематики зробили А. Сміт, Т. Мальтус, Дж. Ст. Мілль, Д. Рікардо, Н. Сеніор, К. Маркс, Дж. М. Кейнс [19].

У національній економіці України склалися певні труднощі вибору критерію зростання і системи соціально-економічних пріоритетів. У зв'язку з цим теорія, складові та моделі економічного зростання опинилися в центрі наукових дискусій, а їх обґрунтування виявило суперечливі думки і протилежні підходи. Одним із свідчень цього стало різне трактування шляхів виведення України з кризи і базисних засад зростання національної економіки. Наявність дискусійних оцінок, прогнозів і методів економічного зростання в Україні вимагає екскурсу в надбання світової економічної думки, певного узагальнення теоретичних і модельних принципів економічного розвитку.

Моделі економічного зростання посідають важливе місце в економіко-математичних дослідженнях. Добре відомими є моделі Харрода-Домара, Філіпа, Хікса, Самуельсона та ін. Важливий вклад у вивчення моделей економічного розвитку внесли Ф. Рамсей, Е. Янг, Ф. Найт, Й. Шумпетер [8].

В основі кейнсіанських моделей Домара та Харрода лежить гіпотеза про те, що інвестиції не є лише елементом сукупного попиту. Вони є не тільки частиною витрат на товари та послуги, але й сприяють збільшенню здатності економіки виробляти ці товари та послуги. Таким чином, інвестиції призводять до збільшення як сукупного попиту, так і сукупної пропозиції. Для забезпечення рівноваги в економіці, за Домаром, темпи зростання інвестицій та національного доходу мають збігатися [14].

Розвиток теорії економічного зростання до XX століття відбувався неоднорідно. Значний внесок у визначення та аналіз джерел зростання був зроблений представниками класичної школи політичної економії. У працях кожного видатного економіста було своє визначення багатства, і ставилося завдання вивчення можливостей його збільшення і оцінки впливу зростання сукупного доходу на добробут громадян в довгостроковій перспективі. Описана задача є предметом теорії економічного зростання в сучасному розумінні. Як вимірювачі зростання в класичній школі використовувалися відносні показники. Так, А. Сміт та деякі інші економісти пропонували орієнтуватися на валовий дохід у розрахунку на душу населення, а Т. Мальтус використовував відношення багатства і розміру території країни [11]. У ранніх теоріях переважно робилися спроби виділити основні чинники зростання, такі як зростання населення, родючість грунту і таке ін. Велика увага приділялася поясненню процесу накопичення капіталу і вироблення рекомендацій по його ефективному використанню. Крім екзогенних факторів, А. Сміт, наприклад, також приділяв увагу інституційним параметрам, а Дж. Ст. Мілль виділяв такі ендогенні фактори, як майстерність і знання [17]. Можна сказати, що у кожного економіста була власна теорія зростання, що спиралася на якусь оригінальну концепцію. Наприклад, основу теорії багатства Д. Рікардо складає його теорія диференціальної ренти [10], в основі побудов Т. Мальтуса лежить теорія ефективного попиту [31]. Для Н. Сеніора ключовою є концепція стриманості [33]. Загальною рисою всіх класичних теорій зростання є висновок про неминуче наближення економіки до стаціонарного стану, при якому норма прибутку виявиться на дуже низькому рівні. Тому більшість досліджень політекономії було направлено на пояснення неминучості цього стану і пошуку дій, які могли б максимально уповільнити його настання. В основному, рекомендації зводилися до обмеження зростання населення і розвитку техніки [35]. К. Маркс також доводив закон тенденції норми прибутку до зниження, але особливий інтерес, з точки зору теорії зростання, представляє його теорія розширеного відтворення, яка, по суті, являє собою модель зростання народного господарства. Згодом ця теорія удосконалювалася і розвивалася марксистською школою [45].

Слід зауважити, що інтерес до теорії зростання зменшився в силу мікроекономічної спрямованості досліджень, які проводилися. Але був відроджений Й. Шумпетером на початку XX століття, який пояснював економічний розвиток діями підприємців, які приносять інновації в економіку. Але відсутність формалізації і підвищеної уваги до якісних аспектів економічного розвитку не дала змоги Й. Шумпетеру стати основою сучасної теорії зростання. І тільки починаючи з кінця 80-х років XX століття, ідеям Й. Шумпетера стали приділяти велику увагу і можливостям їх формалізації в рамках існуючих моделей у зв'язку з поширенням впровадження математичних методів в економічні дослідження. Таким чином теорії класиків послугували основою для формування всебічного уявлення про феномен економічного розвитку і заклали фундамент для більшості сучасних моделей економічного зростання [58]. Але з усіх теорій економічного зростання, що сформувалися до початку XX століття, найбільш формалізованими були праці К. Маркса, що розвивалися і модифікувалися його послідовниками. Самих вражаючих результатів досяг радянський економіст-математик Г. А. Фельдман, який побудував в 1928 році першу повноцінну двохсекторну модель економічного зростання, яка грунтувалася на взаємодії секторів виробництва засобів виробництва і виробництва предметів споживання [66]. Так на відміну від інших, Г. А. Фельдман ставив за мету визначення не тільки факторів зростання національного доходу в цілому, але й можливих розмірів і темпів зростання споживання населення залежно від структури економіки. Для цього у модель вперше було введено поняття стану гармонійного розвитку, яке стало праобразом динамічної рівноваги в сучасній теорії зростання .

Але незважаючи на велику кількість припущень і перебільшень, які не завжди знаходили своє відображення в реальності, модель Г. А. Фельдмана містила важливий висновок: в закритій економіці без добре розвиненої важкої промисловості неможливо зробити достатню кількість капітальних інвестицій, якою би не була високою потенційна схильність до заощаджень [66].

В сучасній економічній думці економічне зростання є порівняно новим феноменом, під яким розуміється кількісне збільшення та якісне вдосконалення за певний часовий період результатів виробництва у вигляді вироблених товарів, наданих послуг, основних факторів виробництва, що виявляється у всебічному вдосконаленні соціально-економічних відносин у суспільстві.

У зв’язку з чим у теперешньомустані економіки Укріїни категорія економічного росту є найважливішою характеристикою суспільного виробництва, так як економічне зростання – це кількісне і якісне вдосконалення суспільного продукту за певний період часу. Тобто економічне зростання означає, що на кожному відрізку часу вирішується проблема обмеженості ресурсів і стає можливим задоволення більш широкого кола потреб населення.

Своє вираження економічний ріст знаходить у збільшенні потенційного і реального валового національного продукту (ВНП), у зростанні економічної потужності, економіки країни, регіону. Це збільшення вимірюється двома взаємозалежними показниками: ростом за визначений період часу реального ВНП або ростом ВНП на душу населення, тому статистичним показником, що відбиває економічний ріст, є річний темп росту ВНП у відсотках.

Таким чином проблеми економічного росту займають у даний час центральне місце, як в наукових економічних дискусіях, так і в рішеннях різнопланових суб’єктів економіки від уряду до управлінських структур регіонів і окремих підприємств. При цьому зростаючий обсяг реального виробництва дозволяє вирішити проблему, з якою стикається будь-яка господарська система: обмеженість ресурсів при безмежності людських потреб.

У теоретичному і практичному аспектах розрізняють два основних типи економічного зростання – екстенсивний та інтенсивний (табл. 1.1).

Основні типи економічного зростання активно використовуються у практиці господарювання, і не можна стверджувати про абсолютне переважання одного з них. Не існує чисто екстенсивного або чисто інтенсивного типу економічного зростання. У реальній економіці вони проявляються або як переважно екстенсивний, або як переважно інтенсивний тип економічного зростання.

Таблиця 1.1

Типи економічного зростання

Типи економічного зростання	
Екстенсивний	***Інтенсивний***
Зростання забезпечується шляхом розширення виробництва на основі кількісного збільшення обсягів факторів виробництва, що функціонують, при збереженні незмінними їх попередніх технологічних параметрів. Збільшення обсягів виробництва досягається шляхом будівництва нових підприємств, але з використанням не оновлених засобів виробництва, втягнення в нього нових мас працівників, зростання обсягів використовуваної сировини та ін.	Розвиток передбачає вдосконалення засобів виробництва та технологій на основі використання досягнень науково-технічного прогресу, підвищення кваліфікації працівників, покращення використання факторів виробництва. Збільшення обсягів продукції та розширення виробництва досягається на основі якісного поліпшення всіх його факторів, тобто раціональнішого використання, всього виробничого потенціалу суспільства

Джерело: складено автором на основі [1, 7, 33, 36, 55].

При екстенсивному типі розвитку економічне зростання досягається шляхом кількісного збільшення факторів виробництва, а при інтенсивному - шляхом якісного їх вдосконалення і кращого використання. Більше того, в цьому випадку економічний ріст можливий і коли зменшуються темпи капітальних вкладень, і навіть при зменшенні їх фізичного обсягу. В умовах екстенсивного зростання зміна співвідношення між його чинниками відбувається порівняно рівномірно і досягнення максимуму виробництва продукції ставиться в залежність головним чином від стану економічних ресурсів, особливо від поєднання витрат праці і капіталу, і лише певною мірою від науково-технічного прогресу.

У першому випадку збільшення суспільного продукту відбувається за рахунок кількісного збільшення факторів виробництва: залучення у виробництво додаткових ресурсів праці, капіталу (засобів виробництва), землі. При цьому технологічна база виробництва залишається незмінною. При цьому типі економічного росту приріст продукції досягається за рахунок кількісного зростання чисельності і кваліфікаційного складу працівників і за рахунок збільшення потужності підприємства, тобто збільшення встановленого обладнання. В результаті випуск продукції в розрахунку на одного працівника залишається незмінним [91].

При інтенсивному типі росту використовується підвищення виробничої ефективності, ріст віддачі від використання всіх факторів виробництва, за рахунок вдосконалення технології виробництва, підвищення якості основних факторів виробництва, хоча кількість застосовуваної праці, капіталу та ін. може залишатися незмінним.

Таким чином найважливішим фактором інтенсивного економічного зростання є підвищення продуктивності праці. Цей показник можна представити у наступному вигляді:

$$ПП = П / Т,$$

де $ПП$ – продуктивність праці,

$П$ – створений продукт у натуральному або грошовому вираженні,

$Т$ – витрати одиниці праці (наприклад, людино-годин).

Таким чином інтенсивний тип економічного зростання характеризується збільшенням масштабів випуску продукції, який ґрунтується на широкому використанні більш ефективних чинників виробництва. Зростання масштабів виробництва, як правило, забезпечується за рахунок застосування більш досконалої техніки, передових технологій, досягнень науки, більш економічних ресурсів, підвищення кваліфікації працівників. За рахунок цих чинників досягається підвищення якості продукції, зростання продуктивності праці, ресурсозбереження тощо.

З метою управління та прогнозування економічного зростання слід розрізняти потенційні та фактичні темпи економічного зростання [62]:

Потенційні темпи економічного зростання це такі при, яких суспільство може досягти на межі своїх виробничих можливостей, тобто коли воно реалізує принцип: "мінімум витрат - максимум виробництва".

Фактичні темпи економічного зростання можуть бути нижчими за можливі (потенційні), коли відбувається недостатнє використання наявних виробничих факторів, особливо у зв’язку прийняттям помилкових управлінських рішень.

Рушійними силами економічного зростання є суперечність, яка зумовлена тим, що постійно змінюються умови здійснення суспільного відтворення, виникають нові обставини та моменти його протікання: залишаючись цілісним, воно містить у собі суперечливі сторони і тенденції, таким чином за відсутності внутрішніх суперечностей може бути призупиненно рух (розвиток) суспільного відтворення.

Рушійною силою суспільного виробництва та економічного зростання безперечно визначається його взаємодія із потребами. Ця взаємодія полягає в тому, що економічні потреби породжують ідеальний образ продукту і стимулюють його створення. З іншого боку, потреби можуть породжуватися виробництвом і задовольнятися за допомогою результатів його функціонування у вигляді продуктів функціонування і розвитку.

У сфері економічних відносин потреби набувають форми економічних інтересів і стимулів. Економічні інтереси виконують роль спонукальних мотивів для суб’єктів господарювання і обумовлюються їх місцем у системі відносин власності та наявною системою потреб [88].

При розгляді змісту рушійних сил економічного зростання, крім врахування впливу на нього потреб, інтересів та інших базисних економічних категорій, слід брати до уваги і вплив таких факторів, як стан суспільної свідомості та рівень розуміння працівниками об'єктивних проблем і напрямів соціально-економічного розвитку, культура праці, діяльність політичних та правових інститутів, панівні морально-етичні, релігійні установки, а також національні традиції [65].

Активний вплив політичних, правових, моральних, духовно-культурних та інших факторів на економічне зростання проявляється у тому, що вони створюють умови для дії рушійних сил, які закладені в тій чи іншій економічній системі. Загальні риси економічного зростання, які притаманні певним етапам функціонування і розвитку суспільства, завжди набувають конкретних історичних форм, що відповідають якісним характеристикам факторів і результатам суспільного відтворення на кожному конкретному історичному проміжку часу [89].

Але економічне зростання значною мірою обмежують фактори, які задіяні у процесі суспільного відтворення [63]:

- природні ресурси;
- трудові ресурси;
- основний капітал (основні фонди);
- науково-технічний прогрес;
- сукупний попит.

Для вимірювання кожного з цих факторів, які постійно змінюються у часі і виконують різні за своїм змістом функції, існують різні показники (див. табл. 1.2).

Перші чотири фактори економічного зростання (природні ресурси, трудові ресурси, основний капітал (основні фонди), науково-технічний прогрес) належать до факторів пропозиції, п'ятий фактор – це фактор попиту, який в умовах не тільки бездефіцитної, але й в умовах дефіцитної економіки стимулює виробництво товарів.

Фактори попиту: для реалізації зростаючого виробництва потенціалу в економіці треба забезпечити повне використання збільшених обсягів всіх ресурсів. А це потребує рівня сукупних витрат, тобто сукупного попиту.

Таблиця 1.2

Фактори економічного зростання

Фактори зростання	*Кількісні показники фактора*	*Заходи повного використання та підвищення ефективності*	*Показник ефективності використання*
1. Природні ресурси	Показник для кожного конкретного виду	Комплексна і глибока переробка	Ресурсомісткість продукції
2. Трудові ресурси	Чисельність населення в працездатному віці	Підвищення рівня освіти, поліпшення здоров'я вдосконалення організації праці	Продуктивність праці
3. Основний капітал	Вартість	Вдосконалення організації виробництва	Фондовіддача
4. Науково-технічний прогрес	Витрати на нову техніку, технології тощо	Розвиток сфери наукових досліджень та дослідницько-конструкторських розробок, впровадження їхніх результатів	Підвищення ефективності суспільного виробництва

Джерело: складено автором на основі [7, 36, 55, 63].

Фактори розподілу: здатність до нарощування виробництва недостатня для розширення загального випуску продукції. Необхідним є також розподіл зростаючих обсягів ресурсів з метою отримання максимальної кількості корисної продукції.

Слід зауважити, що фактори пропозиції і попиту взаємопов'язані. Наприклад, безробіття уповільнює темпи нагромадження капіталу, зменшує витрати на дослідження. І навпаки, низькі темпи впровадження нововведень та інвестицій можуть стати головною причиною безробіття.

Здатність економіки до зростання залежить від ряду факторів, що визначають темпи і масштаби довгострокового збільшення реального обсягу виробництва, можливості підвищення ефективності та якості зростання. За способом впливу на економічне зростання розрізняють прямі і непрямі чинники.

Схематично вплив факторів пропозиції наведено на рис. 1.1.

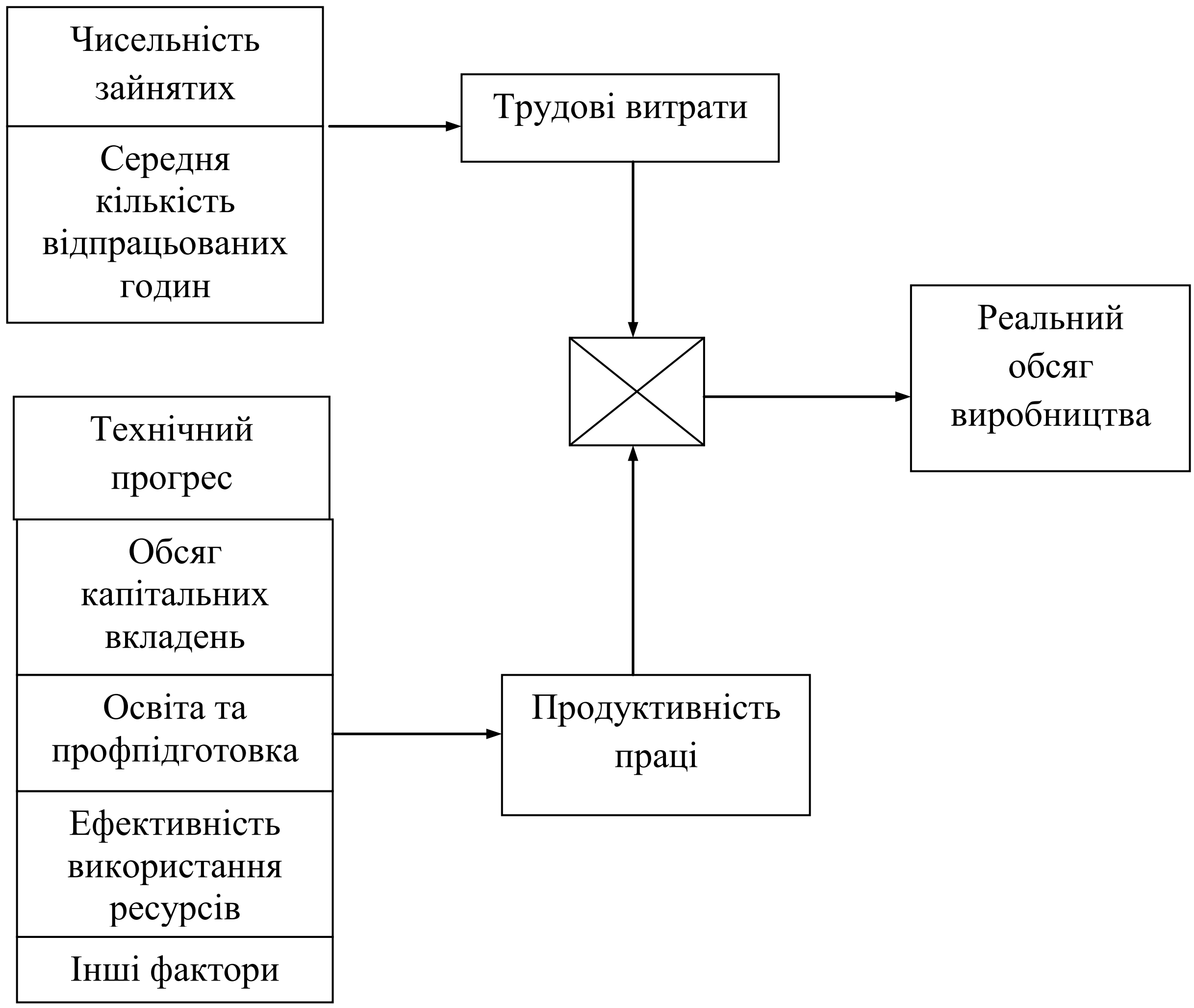

Рис. 1.1. Вплив факторів пропозиції

Джерело: побудовано автором на основі [63, 79].

Здатність економіки до зростання залежить від ряду факторів, що визначають темпи і масштаби довгострокового збільшення реального обсягу виробництва, можливості підвищення ефективності та якості зростання. За способом впливу на економічне зростання розрізняються прямі і непрямі чинники.

Прямими чинниками вважаються фактори, які роблять зростання фізично можливим. Це група факторів пропозиції, до неї входять [92]:

• кількість і якість трудових ресурсів;

• кількість і якість природних ресурсів;

• обсяг основного капіталу;

• технологія і організація виробництва;

• рівень розвитку підприємницьких здібностей в суспільстві.

Непрямі фактори - це умови, що дозволяють реалізувати наявні у суспільства можливості до економічного зростання. Такі умови створюються факторами попиту і розподілу [63]:

• зниженням ступеня монополізації ринку;

• податковим кліматом в економіці;

• ефективністю кредитно-банківської системи;

• зростанням споживчих, інвестиційних та державних витрат;

• розширенням експортних поставок;

• можливостями перерозподілу виробничих ресурсів в економіці;

• діючою системою розподілу доходів.

Якщо зміна непрямих факторів відбувається в зворотному напрямку, за інших рівних умов економічне зростання буде стримуватися. Так, різке подорожчання виробничих ресурсів після лібералізації цін у нашій країні стало однією з причин, що стимулюють промислові підприємства до зниження зайнятості та обсягів виробництва. До непрямих відносяться також фактори попиту і розподілу. Фактори попиту визначають можливість реалізації зростаючого обсягу виробництва. У числі найважливіших можна виділити такі фактори попиту, як зростання споживчих, інвестиційних та державних витрат, розширення експорту внаслідок освоєння нових ринків збуту або підвищення конкурентоспроможності продукції країни на світовому ринку [83].

Так як економічне зростання є матеріальним процесом, то його зміст має певні кількісні параметри, тобто вимірюється за допомогою певних показників. У розвинутих країнах Заходу як інтегральний показник економічного зростання використовується збільшення обсягів валового внутрішнього продукту (ВВП). Цей показник досконаліший порівняно з показником національного доходу, адже останній не бере до уваги результати діяльності працівників у нематеріальній сфері. Таким чином економічне зростання доречно вимірювати темпами зростання, або приросту ВВП, національного доходу, валового національного продукту.

Економічною наукою та господарською практикою визначено, що ці показники найбільш зручні для вимірювання економічного зростання, хоча кожний з них має свої переваги та недоліки [88].

Так економічного зростання, найбільш концентровано й комплексно характеризує показник продуктивності суспільної праці. Він визначається як відношення виробленої в масштабах країни продукції у грошовій формі (національного доходу) до затрат живої праці. Показником, зворотним до продуктивності праці, є її трудомісткість, що характеризує величину витрат праці, необхідних для виробництва одиниці продукції.

Відношення обсягу продукції або іншої результативної величини у вартісному вираженні до обсягу основного капіталу визначає продуктивність капіталу або більш знайомий нам показник фондовіддачі. Зворотний показник – це капіталомісткість продукції. Раціональність використання обмежених природних ресурсів характеризує показник матеріаломісткості. Він визначається як відношення у вартісній формі виготовленої продукції до витрат ресурсів, які були при цьому використані.

З позицій теорії маржиналізму в аналізі граничних показників важливу роль мають показники граничної продуктивності факторів виробництва. Вони характеризують обсяг приросту національного доходу залежно від приросту використання відповідного фактора: праці; капіталу; природних ресурсів. Вважається, що частки цих факторів у величині національного доходу такі: заробітної плати – 75–80 %; прибутку і процента – 15–18 % та природних ресурсів – 5–7 % [90].

Отже, економічне зростання значною мірою залежить від досконалості економічних процесів, які характеризують означені показники.

Розширене відтворення суспільного продукту втілюється в економічному зростанні. Від розв’язання проблеми економічного зростання залежить створення відповідних основ соціально-економічного прогресу суспільства, перспектив зростання національного багатства та добробуту кожної людини. В той же час економічне зростання і розширене відтворення – це ідентичні, проте не тотожні поняття. Економічне зростання переважно акцентує макрорівень і означає регулярне, стійке розширення масштабів діяльності Національної системи, яке проявляється у збільшенні розмірів застосованої суспільної праці і виробленого товару [30].

У економічному зростанні головною стає проблема кількісного та якісного розвитку виробництва і поліпшення його структури, а центральним моментом в проблемі економічного зростання є проблема динамічної рівноваги, взаємодії різних її елементів [56].

При цьому головним інструментом економіки є економічні моделі, які відображають реально існуючий зв’язок між явищами. Дослідження проблеми економічного зростання призвело до вивчення її теоретичних моделей, покликаних обґрунтувати взаємозв’язок і взаємозалежність основних макроекономічних показників без чого неможливе ефективне прогнозування наслідків і варіантів доцільної стратегії [61].

Економічні проблеми, які відображають в часі економічне зростання (розвиток), з одного боку повинні передбачати здатність економічної системи зберігати свою стійкість та протидіяти змінам, так як без цього не можуть бути забезпечені направленість на незворотність, а з другого – розвиток нерозривно пов’язаний зі здатністю економічної системи до переходу в інший стан. Погляди на проблему використання економічних моделей еволюціонували від класичної теорії до кейнсіанської та її послідовників і обумовлювали об’єктивно необхідність державного втручання в економіку [67].

Одним з найважливіших інструментів боротьби неокласичної школи проти кейнсіанства і його послідовників є теорія економічного росту, яка націлена, насамперед, на процеси відтворення суспільного капіталу.

Теоретики неокласичної школи розробляють свої моделі економічного зростання на основі виробничої функції, розробленій американськими вченими – математиком Ч. Кобом та економістом П. Дугласом [10].

Методологічними засадами неокласичних економіко-математичних моделей зростання є класична теорія факторів виробництва, неокласична теорія граничної продуктивності, передумова щодо взаємозамінності факторів виробництва та незмінності їх ефективності та результативності.

Недоліком неокласичних моделей є те, що вони відображають кількісні взаємозв’язки процесу зростання і упускають його якісні характеристики, не містять пояснення внутрішніх законів розвитку суспільного виробництва [7].

Модель Домара-Харрода відображає зв’язок між рівнем заощаджень, інвестиціями та економічним зростанням. Автори моделі виходять з того, що у разі зростання продуктивності праці коефіцієнт капіталомісткості, тобто відношення капіталу до випуску продукції, суттєво не зміниться. У цьому випадку зростає і відношення капіталу до праці, і відношення виробленої продукції до трудових витрат. Таким чином коефіцієнт «капітал-виробництво» залишається незмінним. Дана модель розкриває складні взаємозв’язки, здатні врівноважити змінні зростання не у відносно короткий термін, а в довгостроковому періоді. Модель покликана підказати, які умови необхідні для постійного, рівномірного зростання. Але однофакторна модель Домара-Харрода не є універсальним інструментом аналізу. Вона має обмежене використання, адже коефіцієнт капіталомісткості в різних країнах на різних стадіях господарського розвитку неоднаковий. Недоліком цієї моделі є і те, що вона характеризується перебільшенням нестійкості західної економіки і недооцінюванням сил, що сприяють її зростанню [6].

Моделі економічного зростання – макроекономічні, економіко-математичні моделі (аналоги), за допомогою яких описують найзагальніші закономірності функціонування та розвитку окремих елементів технологічного способу виробництва, а також зміни в часі комплексу економічних показників, що характеризують процес розвитку народного господарства щодо матеріально-речового змісту та у вартісній формі.

У свою чергу, описані макроекономічні показники характеризуються в низці похідних критеріїв та відповідних особливих (часткових) моделей.

Початковим варіантом створення таких моделей була «Економічна таблиця» французького економіста Ф. Кене (середина 50-х XVIII ст.), в якій було зроблено спробу простежити рух створеного в сільському господарстві додаткового продукту в соціальну сферу [35].

Таким чином, неокласична модель економічного зростання – наголошує на можливості нагромадження капіталу, тобто зростання капіталоозброєності праці і технічних змін при поясненні потенційного реального ВВП.

Неокейнсіанська модель мультиплікатора-акселератора є моделлю циклічності економічного розвитку. Відповідно до даної концепції імпульсом для виникнення циклічних коливань в економіці служить автономне збільшення будь-якої складової автономного попиту. Ріст сукупного попиту, як випливає з кейнсіанської теорії, породжує мультиплікативний ефект, у результаті якого кінцевий приріст національного доходу перевищує початковий приріст сукупного попиту на розмір, рівний значенню мультиплікатора автономних витрат [32].

У *статичних* моделях описується стан економічного об'єкта в конкретний момент чи період часу; *динамічні* моделі включають взаємозв'язки змінних у часі. У статичних моделях зазвичай зафіксовані значення ряду величин, що є змінними в динаміці, наприклад, капітальних ресурсів, цін і т.д. Динамічна модель не зводиться до простої суми ряду статичних, а описує сили і взаємодії в економіці, що визначають хід процесів у ній. Динамічні моделі зазвичай використовують апарат диференціальних і різницевих рівнянь, варіаційного числення [39].

Детерміновані моделі передбачають суворі функціональні зв'язки між змінними моделі, в той же час стохастичні моделі допускають наявність випадкових впливів на досліджувані показники і використовують інструментарій теорії ймовірностей і математичної статистики для їх опису.

Більшість економіко-математичних моделей характеризується статичним підходом до вивчення економіки, коли її стан досліджується в заданий момент часу. Під статичною економічною системою розуміється така система, координати якої на досліджуваному відтинку часу можуть вважатися сталими. Відповідно, при формулюванні статичної економіко-математичної моделі припускається, що всі залежності належать до одного моменту часу, а економічна система, що моделюється, є незмінною в часі. При цьому ігноруються можливі, а інколи неминучі зміни, оскільки їх урахування не вимагається поставленою метою моделювання.

Крім того, припускається, що всі процеси, які протікають у економічній системі, не вимагають для свого аналізу розгортання в часі, оскільки можуть бути з достатнім ступенем точності охарактеризовані незалежними від часу величинами. Тому в статичній моделі час явно не вводиться. Статичні моделі характеризують економічну систему на будь-якому фіксованому моменті часу. Оскільки статичні моделі у формалізованому вигляді не містять фактору часу, вони завжди простіші від динамічних моделей тих самих економічних систем, які тією чи іншою мірою враховують цей фактор [69].

Під *динамічною системою* розуміється всяка система, яка змінюється в часі. Час в економічній динаміці може розглядатися як неперервний або дискретний. Неперервний час зручний для моделювання, оскільки дає змогу використати апарат диференціального числення і диференціальних рівнянь.

Час в економічній динаміці може бути розглянутий як неперервний або дискретний. Для процесів, неперервних у часі, використовують апарат диференціального числення. Дискретний час зручний для розв'язування прикладних задач, оскільки статистичні дані завжди дискретні і їх відносять до конкретних одиниць часу. Для дискретного часу використовують апарат різницевих рівнянь [70].

Таким чином математичний опис динамічних моделей здійснюється, здебільшого [37]:

системами диференціальних рівнянь, у яких неперервною змінною є час;

різницевими рівняннями, де час – дискретна величина;

системами звичайних алгебраїчних рівнянь.

За допомогою динамічних моделей, зокрема, розв'язуються задачі планування і прогнозування економічних процесів [47]:

визначення траєкторії розвитку економічної системи та її стан у задані моменти часу;

аналіз економічної системи на стійкість;

аналіз структурних зсувів.

У практичній діяльності використовуються багатогалузеві динамічні моделі розвитку економіки, виробничі функції, теорія економічного зростання.

Диференціальні рівняння знаходять достатньо широке застосування в моделях економічної динаміки, в яких відображається не лише залежність змінних від часу, а й їхній взаємозв'язок у часі.

Аналіз динамічних систем і їхнє математичне моделювання базуються на чисельних методах розв'язування систем диференціальних рівнянь. Особливе місце серед чисельних методів розв'язування динамічних моделей із дискретним часом займає метод скінченних різниць. Універсальність, можливість застосування в лінійних і нелінійних задачах роблять метод скінченних різниць найпоширенішим методом із застосовуваних у даний час наближених методів. Але не тільки надзвичайна загальність різницевого методу приваблює дослідників. Мабуть, це найбільш зручний і прозорий чисельний метод, завдяки якому майже завжди можна отримати уявлення про шуканий розв'язок [36; 60].

Термін «динаміка» означає рух систем під впливом дотичних до них впливів. Історично динаміка розвивалася від механіки до природничо-наукових дисциплін. Час у моделях динаміки є основною незалежною змінною. Інші незалежні змінні пов'язані з конкретними показниками: це координати в механіці, чисельність популяцій у біологічній динаміці, концентрація речовин у хімічній динаміці, економічні показники в економіці. Чи потрібно враховувати фактор часу при побудові математичних моделей процесів та явищ в області економіки? Якщо розвиток галузі економіки, що моделюється, відбувається еволюційно, без різких якісних і кількісних змін протягом багатьох виробничих циклів, коли практично постійні попит, ціна, витрати, економічна ситуація, то для побудови моделі такої галузі можна використовувати численні математичні моделі, із застереженнями та обмеженнями, в яких не бере участь фактор часу.

Моделі економіки, в яких не враховується фактор часу, називаються статичними (термін перейшов з механіки). Такі моделі відображають стан економічних об'єктів у періоди стабільності параметрів. У динамічних моделях ураховується залежність змінних від часу і взаємозалежність змінних у часі. Фактор часу відіграє вагомішу роль в економіці, з історичним розвитком. На теперіній день він набуває значення основного фактору економічного розвитку багатьох галузей національної економіки. Тому економіко-математичне моделювання процесів, що відбуваються в сучасній економіці, зазвичай включає залежність від часу.

Словосполучення «прискорення науково-технічного прогресу» є тим прикладом, коли усталений образ відображає об'єктивну реальність. Насправді ж кам'яний вік тривав близько мільйона років, прийдешній за ним, бронзовий – декілька тисяч років, із кінця IV тисячоліття до н. е. до I тисячоліття до н. е. Залізний вік, що прийшов за бронзовим, закінчився появою нових конструкційних матеріалів у середині XX століття. Основні технологічні рішення стали з'являтися все частіше і частіше. Ядерний вік тривав із 1945 року до моменту, коли ефективність ядерної зброї зробила її застосування беззмістовним (живих переможців не залишиться). Вік комп'ютерів розпочався з 1947 року (це не звичайний збіг у часових рамках – Друга світова війна стимулювала розвиток військових галузей промисловості, у той час з'явилися реактивна авіація, радіолокація, ракети; і перші комп'ютери були покликані обробляти радіолокаційні дані для боротьби з реактивною авіацією противника). Ці відкриття не тільки застосовувались у військових цілях, де економічні показники не є головними, а й стимулювали паралельний розвиток галузей економіки. Атомна енергетика, цивільна реактивна авіація, комерційні додатки космічних польотів, мікрохвильова пічка «правнучка» перших радіолокаторів – це численні невійськові застосування цих відкриттів.

Звичайно, розвиток комп'ютерів, покоління яких змінювалося кожні кілька років. Ну і, зрештою, сучасний стан, коли комп'ютер став економічно і технічно доступним на всіх рівнях економіки, аж до домашнього господарства [61].

Ще одна технологічна революція, безпосередньо пов'язана з комп'ютерами, що відбулася в останні роки і має величезний економічний вплив, – кардинальна перебудова технології отримання, передавання, опрацювання та зберігання інформації. Агентство «Рейтер» розпочало свій інформаційний бізнес із того, що 1849 року Пауль Юліус Рейтер використав поштових голубів для доставляння фінансових новин, а це дозволило на декілька днів випередити конкурентів, котрі використовували звичайні кінні поштові екіпажі. Порівняти цю технологію із сьогоднішніми неможливо: стали економічно доступними і технічно надійними комп'ютери, Інтернет, кишенькові комп'ютери, смартфони, засоби передавання даних; отримання, зберігання, опрацювання, передавання великих обсягів даних стали можливими й економічно доступними на будь-якому рівні: від побутового до транснаціонального; уже наприкінці XX століття вартість інформації в електронному форматі стала нижча, ніж вартість інформації на папері [29].

Глобальна навігація дала можливість точного позиціонування не тільки великих об'єктів, а й об'єктів невеликих масштабів. Та найголовнішим є те, що різко знизилася вартість і з'явилася технічна можливість отримання, зберігання та опрацювання величезних обсягів інформації. Також варто звернути увагу на інші революційні зміни в інформаційній техніці, які відбулися в останні роки. Хімічна фотографія, яка проіснувала більше ніж 100 років, замінилася цифровою фотографією. З'явилася можливість багаторазового цифрового копіювання, що майже повністю виключає погіршення якості інформації. Безумовно, кожен із цих напрямів сам по собі є цікавою і привабливою галуззю економіки, але значно важливішим є той факт, що та інформаційна революція, яка відбувається в наші дні, принципово змінює загальну економічну ситуацію. Прискорення обміну економічною інформацією приводить до нової ситуації, коли учасники ринку одночасно дізнаються про суттєві зміни. Формально це приблизило сьогоднішню ситуацію до давно існуючої моделі ідеального ринку, один із постулатів якої – рівнодоступність і безплатність інформації для всіх учасників ринку. Технічно сьогодні це реалізовано; інші аспекти появи, опрацювання, розповсюдження та приховування бізнес-інформації і дезінформації виходять за рамки методів економіко-математичного моделювання, що досліджується. Технічними засобами отримання бізнес-інформації користуються учасники фондового ринку; домогосподарки дізнаються ціни на побутові товари на відповідних сайтах. Природним економічним наслідком щоденного використання цих інформаційних можливостей є вирівнювання ринкових цін [48].

Покоління високотехнологічних розробок, обчислювальної техніки, засобів опрацювання інформації змінюються з періодичністю приблизно одного року. Відбувається стрімке здешевлення продукції практично всіх галузей високих технологій, у деяких напрямах зміна модельного ряду відбувається протягом кількох місяців [95].

Ще одним принциповим фактором доцільності враховувати фактор часу при аналізі економічних процесів є процес зародження, розвитку і проявлення економічних криз. Жодна економічна криза не було кількісно передбачена (численні суперечливі якісні оцінки і передбачення криз не дозволяють робити конкретні висновки і точно визначати економічну поведінку в конкретній ситуації) [57].

Але істотно проведений вище аналіз не охоплює принципових змін, що відбуваються останнім часом у сфері функціонування економічних систем. Ці зміни підтверджують той факт, що фактор часу в сучасній економці набув визначального значення, тому при побудові математичних моделей економічних явищ і процесів потрібно обов’язково враховувати цей фактор. При цьому виділяються два напрями: перший із них – побудова математичної моделі, коли відома ситуація в певний момент часу, що називається початковим, і вимагається розрахувати розвиток економічної ситуації в майбутньому; другий – коли спостерігається періодичне повторення економічної ситуації, тобто побудова моделі економічного циклу [84].

Розглянемо детальніше в кількісному вираженні, наскільки сильно показники сучасної реальної економіки піддаються залежності від часу. Виділимо два принципово різні стани економіки:

позакризовий розвиток;

економічна криза як перехідний процес, що розвивається в часі.

Головна відмінність двох фаз економічного розвитку виявляється [82]:

у період позакризового розвитку на фоні глобального відносно гладкого тренду (здебільшого, збільшення економічних показників) відбуваються коливання цих показників відносно тренду;

у період, що відповідає економічній кризі, спостерігається різка стрибкоподібна зміна економічних показників і на фоні цієї стрибкоподібної зміни відбуваються коливання (зазвичай, затухаючі) відповідних показників економіки;

у передкризовий період спостерігаються ефекти втрати стійкості економічних підсистем, біфуркація сценаріїв подальшого розвитку економіки, зародження нових станів, частина яких будуть стійкими в нових посткризових умовах.

Варто підкреслити, що під час кризи зазвичай розглядається погіршення економічних показників, але аналогічний перехідний процес може реалізовуватися і за швидкої, революційної зміни економічної ситуації в бік поліпшення економічних показників (наприклад, у країнах, що видобувають нафту, в період нафтового буму).

Звичайно термін «періодичність» у строго математичному розумінні щодо зміни економічних параметрів – неприйнятний, але періодична (з не строго зафіксованим періодом) повторюваність безсумнівна. Такого роду процеси прийнято називати економічними циклами [36].

У природничо-наукових дисциплінах, зазвичай, розглядаються періодичні процеси і період розуміється у строго математичному розумінні цього терміна.

В економіці більш розповсюджений термін «циклічність», оскільки багато економічних явищ, що повторюються в часі, строго кажучи, не є періодичними.

На теперішній час визначено багато видів економічних циклів. Світове визнання отримали дослідження Н. Д. Кондратьєва, що стосуються аналізу реальних економічних даних, у яких виявлено циклічні зміни. Ним отримано вагомі результати в області економічної теорії, економіки аграрного комплексу, економічної статистики, циклічної динаміки, теорії прогнозування, методології перспективного планування, розроблено теорію великих циклів кон'юнктури (довгих хвиль економічної динаміки), а також одержано вагомі результати в області теорії прогнозування і методології перспективного планування в перехідній економіці [22].

З аналізу історичних фактів Н. Д. Кондратьєвим зроблено важливий висновок, що стосується зв'язку соціальних явищ і циклічних процесів в економіці: «Періоди підвищуючих хвиль великих циклів, як правило, значно багатші серйозними соціальними потрясіннями і переворотами у житті суспільства (революції, війни), ніж періоди понижуючих хвиль». Відповідно, економічні цикли можуть бути присутні не тільки в економічній, а й у соціально-політичний динаміці [91].

Теорія великих циклів в економіці отримала широкий розвиток. З'явився міжнародний напрям дослідження довгих хвиль в економічній динаміці. Циклічні зміни в економіці аналізуються в роботах Й. Шумпетера [5], Ю. Кучинського [7], П. Сорокина [14], В. Леонтьєва [8], Ф. Броделя [17], У. Мітчелла [11], К. Фрідмена [39], Дж. Форрестера [45], Г. Менша [11] та ін.

Поряд із великими циклами економічної динаміки, виділяються середні (9,5 року) і короткострокові (3,2 року). Деякі дослідники пов'язують циклічність в економіці з хвилями інновацій. У сучасних умовах прискорення науково-технічного прогресу (НТП), зменшення інноваційного періоду визначають появу економічних циклів меншої тривалості [63].

При дослідженні періодичних процесів в області природничо-наукових напрямів були виявленні численні істотно нелінійні ефекти і можливість реалізації хаосу в детермінованих динамічних системах. Схожі ефекти проявляються і при аналізі циклічної динаміки в економічних системах. Так Б. Дж. Беррі і Х. Кім розроблено методи аналізу нелінійної динаміки економічних рядів великої тривалості, розглянуто динаміку коливань цін і темпу економічного росту в США у 1790–1990 роках (тобто охоплюється період у 200 років). При цьому розглянуто дві гіпотези поведінки системи в часі [54]:

Перша гіпотеза передбачає, що система прагне до рівноважного стану за відсутності зовнішніх впливів; циклічні коливання є реакцією на зовнішні збурення.

Друга гіпотеза передбачає, що поведінка системи визначається в основному внутрішніми факторами. Цій поведінці властива нестабільність, яка проявляється у відхиленні верхніх і нижніх границь інвестицій та споживання.

При цьому коливання довгої тривалості в динаміці індексу гуртових цін і темпів економічного росту, на які накладаються коливання малої тривалості, відображають непередбачувану поведінку системи і присутність детермінованого хаосу. Таким чином, автори показали, що протягом 200 років цикли американської економіки Н. Д. Кондратьєва тривалістю порядку 50 років супроводжувалися локальною хаотичною поведінкою системи. Квазіперіодична поведінка включає хаотичний режим між сусідніми піками. Для періоду часу до 1919 року підтверджується друга із згаданих гіпотез. Висновки про атрактори і біфуркацію на піках довгохвильової складової, внаслідок недостатньої довжини рядів, що аналізуються, мають імовірнісний характер [54].

Де Грін також вивчав цикли Н. Д. Кондратьєва, що включають додаткові компоненти (технології, менталітет і т. д.). Варто звернути увагу, що в наявних моделях циклів Кондратьєва хаотичні режими виникають при різних формах зворотного зв’язку [12].

Таким чином, слід зазначити, що класична теорія економічних циклів розвивається і доповнюється принципово новими напрямами. Виділяються два типи моделей, які відповідають двом різним процесам, що розвиваються в часі [22]:

Перший тип моделей відповідає перехідному процесу від одного стану системи до іншого. Зазвичай такі переходи займають певний проміжок часу і розвиваються в часі; такий перехід називається перехідним процесом. Приклади перехідних процесів в економіці – перебудова, перехід на випуск нової продукції, багато інших нециклічних змін, притаманних динамічній системі. Таким чином в нормально функціонуючій економіці постійно реалізується перехідний процес. Протилежна ситуація отримала назву застою, стагнації, і ця «нерухомість» є неприродним і неконкурентоспроможнім станом економіки. При цьому з розвитком стагнації він або стане нестійким і зародиться новий, стійкий стан, що відповідає розвиткові – перехідному процесу до наступної фази економічної системи, або економічна система припинить своє існування. Таким чином всі зміни, які не обов’язково є проявами циклічності, можна віднести до перехідних процесів.

У техніці перехідний процес реалізується практично в усіх ситуаціях переходу від попереднього стану системи до наступного – ввімкнення електроприладів, старт автомобіля, багато інших проявів переходів динамічних систем з одного стану до іншого. Проте на відміну від економіки, нерухомий стан технічної системи, відсутність перехідного процесу, далеко не завжди є неприродним. Наприклад, для автомобіля нерухомий стан є цілком нормальним, як і його рух. Для електроприладу і ввімкнений, і вимкнений стани також є цілком нормальними, але для літака стан нерухомості в повітрі неможливий [44].

Математичною моделлю перехідного процесу є задача Коші для систем звичайних диференціальних рівнянь. Ця задача формулюється таким чином: задається система *n*, нелінійних диференційних рівнянь наступного виду:

$$\begin{aligned} &\frac{dx_k(t)}{dt} = f_k\left([t], x_1, ..., x_n\right), \\ &x_k(t_0) = \xi_k, \\ &k = 1, ..., n. \end{aligned} \tag{1.1}$$

де *n* початкових умов, заданих у момент часу t_0. Час *t* виділено квадратними дужками, щоб підкреслити, що праві частини можуть явним чином залежати від часу *t* (неавтономні системи), а можуть і не залежати (автономні системи). Звичайно, функції правих частин $f_k([t], x_1, \ldots, x_n)$ можуть залежати не від усіх вказаних аргументів.

Диференціальні рівняння вищих порядків можуть бути зведені до системи (1.1). Для цієї системи за деяких додаткових припущень мають місце теореми існування та єдності рішення, причому число початкових умов за $t=t_0$ збігається з порядком системи рівнянь.

Серед прикладів моделей економічної динаміки, до типу, що розглядається, можна віднести модель Харрода–Домара, модель Еванса, модель Солоу, нелінійна модель динаміки перехідних процесів в економіці [1; 4; 7].

Про розв'язання задачі Коші. Для деяких лінійних систем можна знайти аналітичний розв'язок.У разі, якщо аналітичний розв'язок знайти не вдається, можна скористатися чисельними методами розв'язування задачі Коші (методи Ейлера, Рунге–Кутта різних порядків, Буліша–Штера та ін.). Деякі з цих методів включені в розповсюджені комп'ютерні програми як стандартні програми розв'язування задачі Коші. При цьому може задаватися потрібна точність розрахунків і відбувається автоматичний вибір кроку за часом під час чисельного розв'язку задачі для досягнення заданої точності.

Крім задач із задаванням умов у початковий момент часу, існують задачі, сформульовані у формі систем звичайних диференціальних рівнянь, у яких частина умов задається на початку інтервалу, а решта умов – у кінці інтервалу спостережень. Загальне число умов дорівнює порядку системи. Для побудови чисельного розв'язку таких систем також розроблені алгоритми (наприклад, метод пристрілки), доведені до стандартних програм. Можлива постановка задач із додатковими умовами у проміжній точці інтервалу.

Другий тип моделей динамічних процесів в економіці належить до циклічних процесів. Економічні цикли, які існують в економіці, відповідають періодичним розв'язкам систем звичайних диференційних рівнянь. Варто враховувати, що циклічність у реальній економіці може і не мати строгої періодичності і строгої повторюваності, як у класичній постановці задач теорії коливань, де періодичність розуміється як математичне визначення періодичної функції.

Задамо систему диференційних рівнянь

$$\frac{dx_k(t)}{dt} = f_k\left(\left[t\right], x_1, ..., x_n\right), k = 1, ..., n, \tag{1.2}$$

для якої ставиться задача пошуку періодичного розв'язку. При цьому період може бути заданий або підлягає визначенню. У зв'язку із складністю задачі про пошук періодичних рішень, для неї не існує настільки ж ефективних алгоритмів, як для розв'язку задачі Коші. Так існують нелінійні системи, в яких є декілька стійких періодичних рішень, можливі біфуркації рішень, тобто за малої зміни параметра системи відбувається кардинальна зміна розв'язку. Більше того, можлива хаотична поведінка розв'язків за повністю детермінованих параметрів системи. Усе це пояснює відсутність кінцевого алгоритму розв'язку задачі про пошук періодичних рішень систем звичайних нелінійних диференційний рівнянь. Для лінійних же рівнянь деякі періодичні рішення можна знайти аналітично [79].

Для деяких задач моделювання економічних циклів варто робити поправку, пов'язану з неперервним розвитком реальної економіки, коли циклічний процес накладається на загальний тренд розвитку. При цьому важко говорити про періодичність у строгому математичному розумінні цього терміну. Однак можна виділити тренд, наблизивши цим циклічний процес до класичного періодичного режиму.

Розглянемо простий приклад, який пояснює виділення періодичного режиму. Функція $y(t)=kt+sin(t)$ є неперіодичною, доданок kt відповідає неперіодичному тренду, доданок $sin(t)$ – періодичним (циклічним) коливанням, накладеним на тренд. Уведемо функцію $f(t) = y(t) - kt.$ Тим самим виділино неперіодичний тренд, і функція $f(t) = \sin(t)$ є періодичною в строгому розумінні терміну«періодичність» [53; 78; 87].

Існують різні класифікації динамічних процесів. Одна із можливих представлена на рис. 1.2.

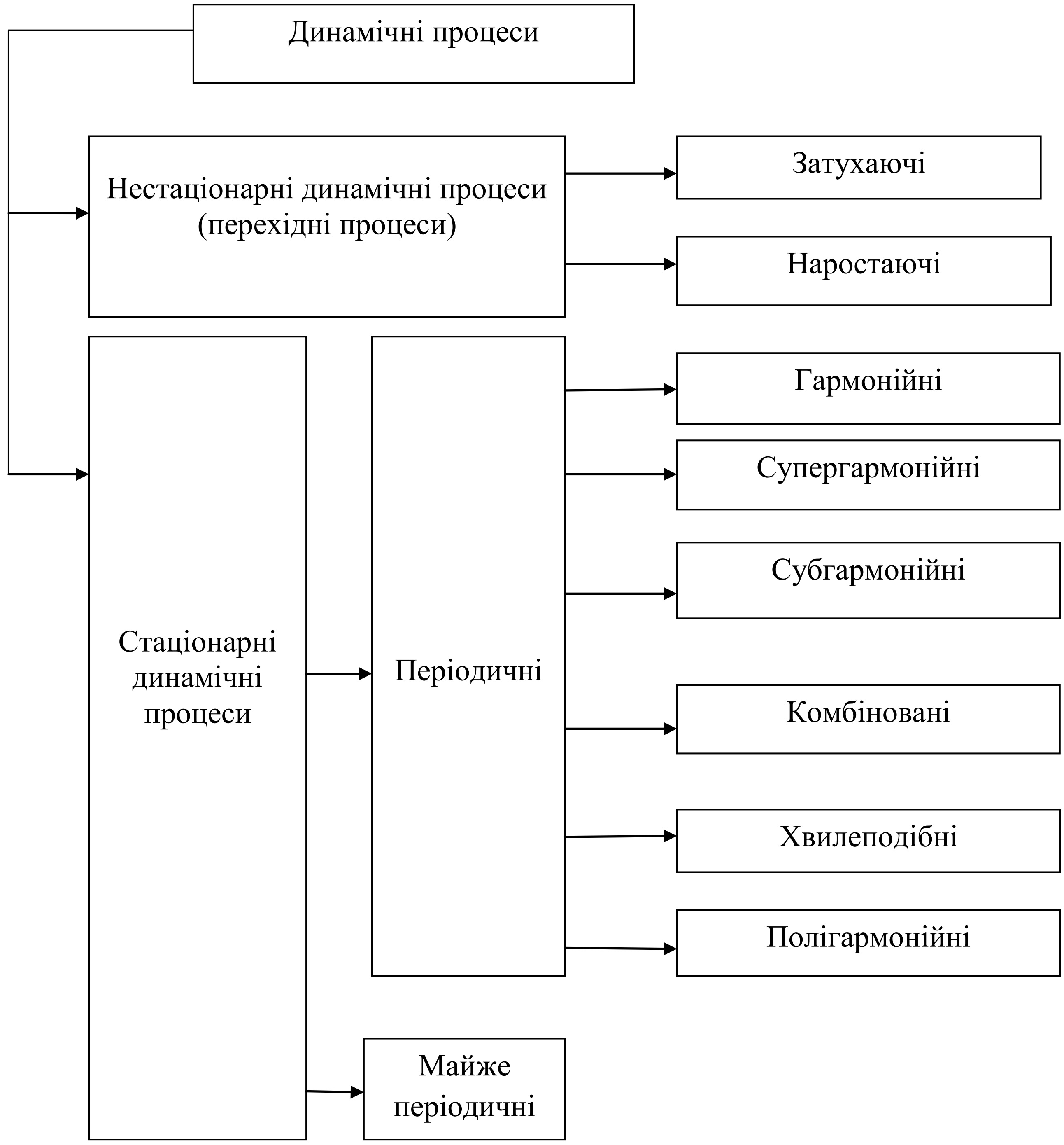

Рис. 1.2. Класифікація динамічних процесів

Джерело: побудовано автором на основі [23, 67].

Поширеним методом опису тих чи інших процесів і явищ служить метод моделювання. Моделювання вважається досить ефективним засобом прогнозування можливого явища, нових або майбутніх технічних засобів, конкретних рішень. Уперше для цілей прогнозування побудову операційних моделей було зроблено в економіці. Модель конструюється суб’єктом дослідження так, щоб операції відображали характеристики об’єкта (взаємозв’язки, структурні та функціональні параметри і таке ін.), істотні для мети дослідження. Тому питання про якість такого відображення – адекватності моделі об’єкта – правомірно вирішувати лише відносно певної мети. Конструювання моделі на основі попереднього вивчення об’єкта і виділення його істотних характеристик, експериментальний і теоретичний аналіз моделі, зіставлення результатів з даними об’єкта, коригування моделі – усе це становить зміст методу моделювання [24].

Суть математичного моделювання являє собою заміну реального об’єкта певною математичною конструкцією (математичною моделлю), яка в тому чи іншому сенсі відображає характерні риси процесу, який моделюється. При цьому між деякими характеристиками моделі і властивостями процесу встановлюється двосторонній зв'язок, завдяки якому, з одної сторони, можна використовувати дані про особливості процесу для побудови та уточнення його моделі, з іншої – інтерпретувати результати його дослідження в термінах, які безпосередньо характеризують властивості процесу.

Самі по собі математичні об’єкти – матриці, функції, рівняння і т. п., будучи результатами абстрагування властивостей багатьох реальних об’єктів чи процесів, втрачають зв'язок з конкретними процесами і служать вихідним «матеріалом» для моделювання. Їх також можна називати математичними моделями, якщо не вимагати роз’яснення, який реальний процес і з якою метою моделюється. Для того щоб зв’язати такий математичний об’єкт з реальним об’єктом і говорити не про модель «загалом», а про модель конкретного об’єкта, необхідно вказати способи використання інформації про об’єкт для побудови і уточнення моделі (ідентифікації моделі чи її компонентів), а також способи та можливості використання моделі для вивчення властивостей об’єкта (способи інтерпретації моделі чи її компонентів). Таким чином, під математичною моделлю даного процесу розуміють математичну конструкцію, яка є результатом ідентифікації та інтерпретації її компонентів [42].

Процес ідентифікації моделі на основі даних про реальний об’єкт з другої точки зору може розглядатися як процес вимірювання різноманітних характеристик об’єкта; інструментом вимірювання при цьому служить сама модель, яка ідентифікується.

Для зв’язку між реальним виробничим процесом і його математичною моделлю використовується велика кількість *показників*. Кожен з них представляє собою спосіб визначення кількісної характеристики процесу. У певних випадках значення показників даються не в числових, а в порядкових чи номінальних шкалах. Тоді показники називаються *ознаками.*

Вихідними даними для знаходження фактичних значень кількісних показників служать результати безпосередніх вимірів (спостережень) чи розраховані заздалегідь значення інших показників. Для фактичних значень *економічних показників* характерно, що первинними вихідними даними є дані бухгалтерського обліку і статистичної звітності.

Економіко-математичні моделі виділяються серед математичних моделей тим, що об’єктом моделювання є економічні процеси, самі моделі відображають економічні зв’язки чи відношення, які існують в реальних процесах чи явищах. При ідентифікації та інтерпретації економіко-математичних моделей використовуються економічні показники.

Кожна економіко-математична модель реального явища характеризується [37]:

об’єктом моделювання;

системним описом об’єкта;

цілями побудови моделі;

принципами моделювання;

апаратом моделювання;

способами ідентифікації та інтерпретації.

Об’єктом моделювання може бути або реальна господарська система, або один чи декілька процесів, які відбуваються в такій системі. Для побудови моделі необхідно не просто вказати назву об’єкта, а дати його опис у вигляді системи, визначити його границі взаємодії з навколишнім середовищем, його структуру.

Апарат моделювання визначається типом математичних конструкцій, які використовуються для побудови економічної моделі.

Розроблення методу моделювання стосовно прогнозування економічних процесів наштовхується на серйозні труднощі, що вимагає особливої уваги. Труднощі застосування методу моделювання у прогнозуванні економічних процесів викликані складністю структури економічних об’єктів, та їх розвитку, тому змушують користуватися не єдиною моделлю, а системою методів і моделей, що характеризується певною ієрархією і послідовністю.

Під системою моделей прогнозування економічних процесів розуміється сукупність моделей, що дозволяє дати погоджений і несуперечливий прогноз економічних процесів, та що ґрунтується на вивченні техніко-економічних тенденцій і закономірностей, що складаються в поточному і майбутніх періодах, на заданих цільових установках, на наявних ресурсах, виявлених потребах національної економіки і її суб’єктів та їхній динаміці.

Така система передбачає певну черговість використання моделей для цілей складання комплексного прогнозу.

Для вивчення закономірностей розвитку економіки, соціальних процесів широко використовуються економіко-математичні моделі. Вони являють собою системи формалізованих співвідношень, які описують основні взаємозв’язки елементів, що утворюють економічну систему.

Використання математичного апарату для опису моделей пов’язане з перевагами математичного підходу до багатостадійних процесів опрацювання інформації, використанням ідентичних засобів формування завдань, пошуку методів їх вирішення, фіксації цих методів і їх перетворення у програми, розраховані на застосування засобів обчислювальної техніки [68].

Використання математичних методів в економіці дозволяє [77; 84]:

по-перше, виділити і формально описати найбільш важливі, істотні зв'язки економічних змінних і об'єктів, при цьому вивчення складного об'єкта припускає високий ступінь абстракції;

по-друге, з чітко сформульованих вихідних даних і співвідношень методами дедукції можна отримувати висновки, адекватні досліджуваному об'єктові в тією самою мірою, що і зроблені передумови;

по-третє, методи математики і статистики дозволяють індуктивним шляхом отримувати нові знання про економічний об'єкт: оцінювати форму і параметри залежностей його змінних, що найбільшою мірою відповідають наявним спостереженням;

по-четверте, використання математичних методів та моделей дозволяє точно і компактно викладати положення економічної теорії, формулювати її поняття і висновки.

Доказом попередніх висновків є те, що математичні моделі використовувалися з ілюстративними і дослідницькими цілями ще Ф. Кене («Економічна таблиця», 1758), А. Смітом (класична макроекономічна модель), Д. Рікардо (модель міжнародної торгівлі). У XIX столітті великий внесок у моделювання ринкової економіки внесла математична школа (Л. Вальрас, О. Курно, В. Парето, Ф. Еджворт та ін.). У XX столітті математичні методи моделювання застосовувались дуже широко, з їх використанням пов'язані практично всі роботи, удостоєні Нобелівської премії з економіки (Д. Хікс, Р. Солоу, В. Леонтьєв, П. Самуельсон та ін.).

Таким чином слід визначити, що розвиток мікроекономіки, макроекономіки, прикладних дисциплін пов'язаний з дедалі вищим рівнем їх формалізації. Основу для цього надає прогрес в області прикладної математики – теорії ігор, математичного програмування, математичної статистики. На початку XX століття великий внесок у математичне моделювання економіки внесли В. К. Дмитрієв і Є. Є. Слуцький. У 1960–1980-х роках економіко-математичний напрям (В. С. Немчинов, В. В. Новожилов, Л. В. Канторович) був пов'язаний в основному зі спробами формально описати «систему оптимального функціонування соціалістичної економіки» (Н. П. Федоренко, С. С. Шаталін та ін.), тобто багаторівневі системи моделей народногосподарського планування, оптимізаційних моделей галузей і підприємств [63; 64; 65].

Враховуючи досвід попередніх дослідників, слід наголосити на тому, що будь-яке економічне дослідження завжди передбачає об'єднання теорії (теоретичні економічні моделі) і практики (статистичні дані). Теоретичні моделі використовуються для опису і пояснення спостережуваних процесів, а статистичні дані збираються з метою емпіричної побудови й обґрунтування моделей [71].

Для вивчення різних економічних явищ економісти на практиці використовують їхні спрощені формальні описи: економічні моделі. Прикладами економічних моделей є моделі споживчого вибору, моделі фірм, моделі економічного зростання, моделі рівноваги на товарних, факторних і фінансових ринках і багато інших. Розробляючи моделі, економісти виявляють істотні фактори, що визначають досліджуване явище, і відкидають деталі, не суттєві для розв'язання поставленої проблеми. Формалізація основних особливостей функціонування економічних об'єктів дозволяє оцінити можливі наслідки впливу на них і використовувати такі оцінки в управлінні [18].

Розглянемо методи побудови економічної моделі [34]:

1. Формулюються предмет і мета дослідження.
2. У розглянутій економічній системі виділяються структурні або функціональні елементи, відповідні даній меті, виявляються найбільш важливі якісні характеристики цих елементів.
3. Якісно описуються взаємозв'язки між елементами моделі.
4. Вводяться символічні позначення для характеристик економічного об'єкта, що враховуються і формалізуються, наскільки можливо, взаємозв'язки між ними. Тим самим формулюється математична модель.

5. Проводяться розрахунки з математичною моделлю і аналізуються отримані рішення.

Економічні моделі дозволяють виявити особливості функціонування економічного об’єкта і на основі цього передбачати майбутню поведінку економічного об’єкта за зміни будь-яких параметрів. У моделі всі взаємозв’язки змінних можуть бути оцінені кількісно, що дозволяє отримати більш точний і надійний прогноз.

Для будь-якого економічного суб’єкта прогнозування ситуації означає, перш за все, можливість отримання кращих результатів або можливість уникнути втрат.

Як видно з попереднього аналізу, за своїм визначенням будь-яка *економічна модель* є абстрактною і, отже, неповною, оскільки, виділяючи найбільш суттєві фактори, що визначають закономірності функціонування економічного об’єкта, що розглядається, вона абстрагується від інших факторів, які, попри свою відносну незначущість, усе ж у сукупності можуть визначати не тільки відхилення в поведінці об’єкта, а й саму його поведінку.

Так, у найпростішій моделі попиту вважається, що величина попиту на який-небудь товар визначається його ціною і доходом споживача. Насправді ж на величину попиту здійснюють також вплив інші фактори: смаки та очікування споживачів, ціни на інші товари, вплив реклами, моди і так далі. Зазвичай припускають, що всі фактори, не враховані в економічній моделі, справляють на об’єкт відносно малий результуючий вплив в аспекті, який цікавить дослідника. Склад урахованих у моделі факторів і її структура можуть бути уточнені в ході вдосконалення моделі.

Математична модель економічного об’єкта – це його гомоморфне відображення у формі сукупності рівнянь, нерівностей, логічних відносин, графіків. Гомоморфне відображення об’єднує групи зв’язків елементів досліджуваного об’єкта в аналогічні зв’язки елементів моделі. Модель – це умовний образ об’єкта, побудований для спрощення його дослідження.

Передбачається, що вивчення математичної моделі дає нові знання про об'єкт або дозволяє визначити найкращі рішення в тій чи іншій ситуації.

Якщо модель є оптимізаційною, то поряд з обмеженнями повинна бути визначена цільова функція, тобто величина, яка максимізується або мінімізується, що відображає інтереси суб'єкта, який ухвалює рішення.

Математичні моделі, що використовуються в економіці, можна поділяти на класи за низкою ознак, що належать до особливостей модельованого об'єкта, мети моделювання і використовуваного інструментарію: моделі макро- і мікроекономічні, теоретичні і прикладні, оптимізаційні і рівноважні, статичні і динамічні.

Макроекономічні моделі описують економіку як єдине ціле, пов'язуючи між собою укрупнені матеріальні та фінансові показники: ВНП, споживання, інвестиції, зайнятість, процентну ставку, кількість грошей та інші.

Мікроекономічні моделі описують взаємодію структурних і функціональних складових економіки або поведінку окремої такої складової в ринковому середовищі. Унаслідок різноманітності типів економічних елементів і форм їхньої взаємодії на ринку мікроекономічне моделювання займає основну частину економіко-математичної теорії. У моделюванні ринкової економіки особливе місце займають рівноважні моделі. Вони описують такі стани економіки, коли результуюча всіх сил, що прагнуть вивести її з цього стану, дорівнює нулю. У неринковій економіці нерівновага за одними параметрами (наприклад, дефіцит) компенсується іншими факторами (чорний ринок, черги тощо). Рівноважні моделі дескриптивні, описові [42; 84].

Таким чином, проведений аналіз особливостей періодичних процесів в економіці, дає вичерпну інформацію для застосування методів моделювання цих процесів.

1.2. Аналіз методів моделювання періодичних процесів в економіці

Моделі періодичних процесів в економіці, моделі економічного зростання – це мікроекономічні, макроекономічні, економіко-математичні моделі за допомогою яких описуються найзагальніші закономірності функціонування та розвитку окремих елементів технологічного способу виробництва, а також зміни в часі комплексу економічних показників, що характеризують процес розвитку економіки щодо матеріально-речового змісту та у вартісній формі [59].

Початковим варіантом створення таких моделей була «Економічна таблиця» Ф. Кене, в якій було зроблено спробу простежити рух створеного в сільському господарстві додаткового продукту в соціальну сферу [10].

Неокласична модель економічного зростання наголошує на можливості нагромадження капіталу, тобто зростання капіталоозброєності праці і технічних змін при поясненні потенційного і реального ВВП [11].

Неокейнсіанська модель мультиплікатора-акселератора є моделлю циклічності економічного розвитку. Відповідно до даної концепції імпульсом для виникнення циклічних коливань в економіці служить автономне збільшення якої-небудь складової автономного попиту. Ріст сукупного попиту, як випливає з кейнсіанської теорії, породжує мультиплікативний ефект, у результаті якого кінцевий приріст національного доходу перевищує початковий приріст сукупного попиту на розмір, рівний значенню мультиплікатора автономних витрат [38].

З наведеного короткого аналізу істотно виділити певні етапи, пов’язані з побудовою і аналізом різних моделей періодичних процесів та моделей економічного зростання, а також виділити послідовність процесу проведення емпіричних досліджень у сфері моделювання періодичних процесів в економіці. Тому розглянемо неокласичні моделі економічного зростання в хронологічній послідовності їх розробки.

У 1927 р. Ч. Кобб та П. Дуглас створили модель, що дозволяє розрахувати вклад різних чинників виробництва у збільшення обсягу виробництва або національного доходу. Ця функція отримала наступний вигляд:

$$Y = AK^a L^b,$$

де Y – обсяг виробництва;

K і L – відповідно капітал і праця;

a – коефіцієнти виробничої функції:

A – коефіцієнт пропорційності;

b – коефіцієнт еластичності обсягу виробництва за витратами праці і капіталу.

Коефіцієнт a показує, на скільки відсотків зміниться обсяг виробництва або національного доходу, якщо витрати капіталу збільшаться на 1 %. Відповідно коефіцієнт b показує, наскільки збільшиться дохід, якщо витрати праці зростуть на 1 %.

Сума $a + b$ показує, на скільки відсотків збільшиться обсяг виробництва або національного доходу при одночасному збільшенні праці і капіталу на 1 %.

Подальша модифікація функції Кобба-Дугласа здійснювалася у двох напрямах. Послідовники почали вводити у виробничу функцію екзогенний (зовнішній) або ендогенний (внутрішній) показник як один з факторів науково-технічного прогрессу [10].

Ф. Рамсей (1928 р.), аналізуючи умови економічного зростання, висунув ідею про оптимізацію споживання домашніх господарств. Водночас ним було запропоновано функцію корисності, яку використовують у сучасній макроекономіці для оптимізації споживання у тривалому періоді. Відома ж однопродуктова модель довготривалого економічного зростання Рамсея полягає в тому, що потік національного доходу створюється наявними на даний момент виробничими фондами і трудовими ресурсами. Цей потік поділяється на частину, яка споживається (C), і частину, яка нагромаджується, визначаючи приріст виробничих фондів K', тобто [41]:

$$C + K' = F(K, L),$$

де *K* – наявні виробничі фонди,

C – споживання,

L – використані трудові ресурси.

Всі показники належать до моменту часу *t*. Вважається, що виробнича функція не змінюється з часом, тобто технічний прогрес відсутній. Ця модель здійснила суттєвий вплив на розвиток як теорії економічного зростання, так і макроекономічного моделювання загалом.

З 1937 р. стає відомою модель фон Неймана (Дж. Нейман) – теоретична модель економічної динаміки, у якій виробництво всіх продуктів зростає в одному темпі, ціни не залежать від часу, приріст виробництва фінансується шляхом інвестування прибутку [37]:

$$a = \frac{\max}{x \geq 0} \frac{\min}{t \neq 0} \left[\frac{\sum_{j=1}^{n} x_0 b_{ij}}{\sum_{j=1}^{n} x_j a_{ij}} \right],$$

де α – максимальний технологічний темп зростання багатогалузевої економіки за максимального використання вектора інтенсивностей і мінімізації витрат;

(x_i, ..., x_j) – вектор інтенсивності виробничих способів, названий нейманівським (нейманівські інтенсивності);

b_{ij} – випуск продукції, виробленої виробничим способом;

a_{ij} – величина витрат фактора виробництва у виробничому способі *k*.

Матриця витрат *A* дорівнює Σ a_{ij}; матриця продукції (випуску) B дорівнює Σ b_{ij}. Нейманівські ціни продуктів і факторів (p_i, ..., p_j) визначаються співвідношеннями:

$$\sum_{ij}^{n} x_{ij} b_{ij} p_{ij} - a \sum_{ij}^{n} x_{ij} a_{ij} p_{ij} = 0 \geq \sum_{ij}^{n} b_{ij} p_{ij} - a \sum_{ij}^{n} a_{ij} p_{ij}.$$

Тоді продукт *BX*, використання якого стає можливим в кінці періоду, компенсує витрати *AX*, і різниця між спільним продуктом і витратами складає чистий продукт *Y*. Це означає, що одне технологічне зростання без урахування вектора інтенсивностей може не дати значного приросту продукції. Відмінною ознакою нейманівських інтенсивностей є те, що вони дають можливість описати оптимальну траєкторію зростання економічної системи і відповідну їй оптимальну траєкторію цін.

Модель Неймана є необчислюваною, чисто теоретичною моделлю. Вихід до практичних результатів здійснюється через динамічну модель В. Леонтьєва, що є окремим випадком моделі Неймана [1].

У 1942 р. Я. Тінберген модифікував виробничу функцію Кобба-Дугласа, у яку він ввів додаткову компоненту, – експоненціальну функцію, що відображає, все «те, що збільшує з часом обсяг випуску продукції без збільшення об’ємів залучених ресурсів». Такий розгляд факторів (причин) інтенсивного типу розвитку економіки отримав назву автономного науково-технічного прогресу (НТП):

$$Y = aK^{a}L^{b}eP^{t},$$

де e – фактор часу;

p^t – темп НТП.

За межами моделі залишаються такі істотні моменти: функція добробуту задається екзогенно, отже, набір стратегічних цілей, а також цілей пріоритетних на цьому етапі розвитку, формується на основі експертних проектувань, оскільки необхідно врахувати дуже велику кількість чинників, що не формалізуються, і їх конкретних особливостей [80].

Дж. Мід (1951 р.) розглянув особливості моделі розвитку економіки, в якій зростання суспільного виробництва пов’язувалось зі зміною різних економічних факторів. Основне поняття, що враховує вплив різних факторів економічного зростання на динаміку національного продукту (доходу), – це поняття виробничої функції, її найпростіший вигляд такий:

$$Y_t = F(K_t,\, L_t,\, T_t,\, N_t),$$

де Y_t – обсяг національного виробництва;

K_t – розміри капіталу;

L_t – трудові ресурси;

T_t – узагальнений природний ресурс, визначений на основі статистичної обробки динамічних рядів у базісному періоді;

N_t – фактор, що повинен вловити вплив на обсяг виробництва технічного прогресу, представленого тут як функція часу.

Якщо задано закони зміни ресурсів і кінцевого споживання C_t, то мова йтиме про траєкторію обсягів виробництва продукції відповідно до рівняння:

$$Y_t + 1 = Y_t + F(K_t, L_t, N_t) - C_t,$$

де

$$Y_t = F(Kt, Lt, Tt, Nt) = const$$

За таких умов змінюють темпи зростання заощаджень, отже, норми нагромадження відразу впливатимуть не на темпи національного виробництва, викликаючи їх прискорення або уповільнення, а на зміну співвідношення темпів зростання основних виробничих ресурсів (капіталу і праці).

Відповідно до цієї моделі господарська рівновага є досить стійкою, тому державне втручання в економіку повинно бути мінімальним і обмежуватися сферою кредитно-грошового регулювання. Гнучка кредитно-грошова політика змінить співвідношення між прибутком і зарплатою і вплине на темп зростання зайнятості. У результаті всі основні макроекономічні змінні зростають у стійкому темпі, що дорівнює темпу зростання робочої сили. Ця модель стійкого економічного зростання застосовується до абстрактних економічних умов (тобто передбачає велику кількість значних обмежень), тобто коли діють закони граничної продуктивності і коли виробничі чинники можуть поєднуватися в будь-яких пропорціях і комбінаціях. Проте в реальній економіці такі умови складаються далеко не завжди [72; 73; 90].

У 1956 р. створено модель економічного зростання Солоу–Свана – теорію економічного зростання залежно від рівня технічного прогресу. В ній використовується виробнича функція, в якій випуск є функцією капіталу і праці. Капітал може заміщатися працею, але ці чинники не є абсолютно взаємозамінними.

Цю модель можна подати у вигляді системи з п'яти макроекономічних рівнянь:

1. Виробнича функція:

$$Y = A \cdot K^{a} \cdot L^{1-a},$$

де Y – обсяг виробництва;

K і L – відповідно капітал і праця;

a –коефіцієнти виробничої функції:

A – коефіцієнт пропорційності;

$1–a$ – коефіцієнт еластичності обсягу виробництва за витратами праці і капіталу. Важливе співвідношення у виробничій функції:

$$Y = AK^{a}L^{1-a} \leftrightarrow y = AK^{a}$$

яка є виробничою функцією, розділеною на L, щоб визначити продуктивність на душу населення і капіталоозброєності.

2. Рівняння валового національного продукту:

$$Y = C + I + G + NE,$$

де C – споживчі витрати;

I – валові приватні інвестиції;

G – державні витрати;

NE – чистий експорт.

У моделі чистий експорт і державні витрати не враховуються.

3. Функція заощадження:

$$I = sY.$$

Ця функція визначає заощадження I, як частку s повного виробництва Y.

4. Рівняння зміни капіталу:

$$\Delta K = sY - \delta K,$$

де δK – норма амортизації.

5. Рівняння зміни робочої сили:

$$L_t + 1 = L_t(1 + gL),$$

gL – функція зростання праці L.

Але умов моделі недостатньо для того, щоб повністю пояснити відхилення показників для зростання різних країн. При цьому необхідним є більш глибокий аналіз чинників і умов, пов’язаних з людським капіталом. Проте слід мати на увазі, що концепція певної відповідності умов виходу на стаціонарну траєкторію – центральна умова моделі – має велике значення для пояснення умов економічного зростання окремих країн і регіонів [33; 56].

У 1965 р. П. Даймонд припустив, що індивіди живуть всього два періоди. У першому періоді вони роблять вибір між працею і відпочинком, а також між споживанням і заощадженнями. У другому періоді вони не працюють, проїдаючи заощадження, зроблені в попередньому періоді. В кінці цього періоду вони вмирають. Таким чином, структура індивідів в економіці постійно міняється: кожен період одні індивіди вирушають з економіки, а інші стають її учасниками. Згідно з моделлю П. Даймонда індивіди планують своє споживання не на безкінечну кількість періодів, а всього лише на два періоди і роблять вони це відповідно до такої функції корисності:

$$U = \frac{C_{1t}^{1-\Phi}}{(1-\Phi)} + \frac{1}{(1+p)\cdot(\frac{C_{2t+1}^{1-\Phi}}{1-\Phi})},\ \Phi > 0,\ p > -1,$$

де C_{1t} – споживання молодого індивіда в період t;

C_{2t+1} – споживання старого індивіда в період $t + 1$.

Величина U – показує готовність домогосподарства змінювати міжчасову структуру свого споживання («ступінь гнучкості» домогосподарства);

p – це суб’єктивна норма дисконту, і чим менша ця норма, тим більше домогосподарство цінує майбутнє споживання в порівнянні з поточним споживанням та вимірює значущість першого періоду для індивіда.

Якщо $p > 0$, то перший період більш значущий, ніж другий. Той факт, що $p > -1$ означає, що цінність споживання в другому періоді для індивіда позитивна. Бюджетне обмеження індивіда виглядає таким чином:

$$C_{1t} + \frac{1}{(1+r)\cdot C_{2t+1}} = At^{wt}.$$

Конкретний вибір значень споживання в обох періодах здійснюється індивідом відповідно до методу множників Лагранжа.

Кінцевий результат такий:

$$\frac{C_{2t}}{C_{1t}} = \left[\frac{(1+rt+1)}{(1+p)}\right]^{\frac{1}{\Phi}}.$$

Ця формула показує, що динаміка споживання у часі залежить від співвідношення між реальною ставкою відсотка і нормою дисконту.

Таким чином держава через фіскальну політику в змозі наблизити економіку до оптимуму за Парето [55]. Але недоліком є нереалістичне трактування поведінки людей, тому що не враховуються зв’язки між поколіннями і реальна «тривалість» періоду життя індивідів. Крім того, самовикористання ідеї оптимуму за Парето навряд чи реалістично, хоч би тому, що переваги кожного індивіда залежать від соціальних норм [38].

У 1988 р. Р. Лукас обґрунтував модель, в якій знання накопичуються у індивідів, а не фірм, у вигляді людського капіталу, причому, індивіди самостійно визначають, яку частку доходу зберігати, а яку інвестувати в людський капітал.

Як чинники зростання приймає L – чисельність робочої сили: k – рівень знань працівника модельованого підприємства; k_0 – рівень знань середнього працівника в країні; $u(t)$ – частка праці в матеріальному виробництві; $K(t)$ – фізичний каптал в рік t.

Виробнича функція має вигляд:

$$Y = rK^{a}(u(t)L)^{1-b}k_0^{c},$$

де r, a, b і c – статистичні параметри.

Зміна фізичного капіталу описується рівнянням:

$$dK(t) / dt = Y(t) - L(t) \cdot p(t),$$

де $p(t)$ – споживання на душу населення [74].

С. Ребелло (1991 р.) заперечує спадну віддачу капіталу, яка робила капітал перманентним джерелом зростання в моделі Солоу, і стверджує, що індивіди можуть накопичувати всі фактори виробництва. Він розробив модель, в якій не виділялися різні типи капіталу, і виробнича функція має дуже простий вигляд:

$$O = Ak.$$

Оскільки в цій функції не спостерігалося спадної віддачі на капітал, накопичення капіталу не призводило до уповільнення темпів зростання. Екзогенного технічного прогресу немає. Темпи зростання населення вважаються нульовими. Амортизація відсутня. Інвестування в людський капітал збільшує запас праці. У довгостроковому періоді фізичний капітал і людський капітал зростатимуть однаковими темпами, запобігаючи спадній віддачі капіталу. Накопичення капіталу:

$$K = Ak - c.$$

Цільова функція домогосподарства:

$$\int_0^\infty \frac{c_t^{1-\theta} - 1}{1\theta} e - pt_{dt}$$

де c_t – споживання сім'ї в момент t;

$p > 0$ – коефіцієнт дисконтування.

Ця модель – проста версія того, що отримало назву «Ендогенних моделей зростання», в яких зростання є ендогенною функцією політичних стимулів і поведінки окремого суб'єкта. Особливістю такої моделі є врахування у ній суттєвого впливу політики на накопичення людського і фізичного капіталу [41].

Визначальне наукове і практичне значення в галузі економічної динаміки і теорії економічного зростання мали дослідження неокейнсіанців Р. Харрода та Є. Домара.

Рой Форбс Харрод (1900–1978 рр.), видатний англійський економіст, професор Оксфордського університету, один з найвидатніших продовжувачів кейнсіанських ідей, вважається батьком теорії економічного зростання. Саме йому належить пріоритет у розробці проблем економічного зростання та його математичного моделювання.

У 1933 р. вийшла перша книга Р. Харрода «Теорія міжнародної економіки», у якій праці автор, спираючись на теорію Д. Рікардо, одним з перших виклав принцип порівняльних витрат як основний принцип міжнародного поділу праці. На відміну від поняття постійних витрат у Д. Рікардо, ввів поняття граничних витрат [81].

У 1928–1940 рр. з’явилися численні публікації присвячені дослідженню фундаментальних проблем економічної теорії, у яких розглянуто, зокрема, проблеми недосконалої конкуренції, динаміки витрат і циклічних коливань. Причому основною проблематикою більшості з цих наукових праць є питання макроекономічного зростання та циклів [92].

У 1936 р. була опублікована праця Р. Харрода «Торговий цикл», що містила елементи майбутньої теорії циклічних коливань: аналіз взаємозалежності коливань інвестицій та споживання, моделювання механізму циклу, взаємодія мультиплікативного та акселеративного ефектів. У праці також містилися елементи його майбутньої теорії економічної динаміки: критика обмеженості статичних неокласичних економічних моделей, формування погляду на циклічність як на проблему динамічних станів економіки, введення у теортичний аналіз довготривалих змін інвестицій та заощаджень, що стало підгрунтям для праці «Нарис теорії динаміки» (1939 р.), а надалі основної фундаментальної монографії «До теорії економічної динаміки» (1948 р.), яка мала величезний науковий успіх, принесла автору визнання та репутацію теоретика-новатора [11]. Але перша спроба осучаснити вчення Дж. М. Кейнса була здійснена Р. Харродом ще у 1939 р. у статті "Нарис теорії динаміки, де він сформулював основні принципи теорії економічної динаміки. У центрі уваги: визначення темпу зростання національного доходу, необхідного для використання всезростаючого обсягу виробничих потужностей і забезпечення повної зайнятості у тривалій перспективі.

Надалі розвиток цих ідей Р. Харрода було докладно викладено у фундаментальній монографії «До теорії економічної динаміки» (1948 р.), у якій Р. Харрод визначає основні риси моделі економічної динаміки, тобто умови підтримання стійких темпів економічного зростання при повній зайнятості як людських, так і матеріальних ресурсів. Він будує агрегативну модель економічного зростання, де темп росту залежить від частки нагромадження в національному доході чи величини капіталовкладень та від рівня капіталомісткості виробництва. Формулу темпу економічного зростання Р. Харрод визначає так [33]:

$$G \times C = S,$$

де G – темп зростання національного доходу;

C – коефіцієнт капіталомісткості національного доходу, тобто показник величини капіталу, необхідного для створення одного процента приросту національного доход;

S – частка заощаджень в національному доході.

Але виходячи з того, що величина C фіксована технічними умовами (нейтральним технічним прогресом), Р. Харрод вважає, що темп зростання національного доходу (G) цілком залежить від одного фактора, від змін заощаджень суспільства чи норми нагромадження. При цьому для досягнення постійного темпу зростання необхідно, щоб ресурси використовувалися повністю, тобто щоб інвестиції (I) дорівнювали заощадженням (S):

$$I = S.$$

Якщо інвестиції будуть дорівнювати заощадженням, то економіка не буде відчувати ускладнень. Р. Харрод приходить до висновку, що гарантований темп зростання національного доходу, що забезпечує динамічну рівновагу (Gw), визначатиметься двома величинами: постійністю частки заощаджень (S) і постійністю капіталомісткості (Cr). Цей функціональний зв´язок знайшов такий вираз у моделі економічної динаміки Р. Харрода [66]:

$$Gw \times Cr = S,$$

де Gw – гарантований темп зростання національного доходу, що забезпечує динамічну рівновагу;

Cr – прогнозний коефіцієнт капіталомісткості національного доходу, відображає потребу в новому капіталі;

S – частка заощаджень.

Обидві частини рівняння є постійними, тобто забезпечується динамічна рівновага. Р. Харрод підкреслював, що "єдина гарантована лінія зростання визначається одночасно схильністю до заощаджень і величиною капіталу, що обумовлюється технічними та іншими умовами на одиницю збільшення продукції. Тільки в тому разі, якщо підприємці дотримуються цієї лінії розвитку, вони виявляють, що в цілому їхнє виробництво у будь-який період часу не буде ні збитковим, ні недостатнім" [11, стор. 346].

Таким чином, у моделі Р. Харрода темп приросту національного доходу, що забезпечує динамічну рівновагу, має бути постійним. При цьому динамічна рівновага, що забезпечується гарантованим темпом зростання, означає повне використання наявних виробничих потужностей і досягнення стійкої норми прибутку.

Але, згідно з теорією Р. Харрода, немає механізму, який у випадку порушення рівноваги автоматично відновлював би її. «Економіка балансує на лезі ножа», – зазначав Р. Харрод [11, стор. 251]. Він писав, що «в галузі динаміки ми маємо умови, протилежні тим, які ми спостерігаємо в галузі статики. Відхилення від рівноваги, замість того, щоб бути самозатухаючими, стають само наростаючими» [31, стор. 310].

Як бачимо, Р. Харрод реалістично оцінював проблему стійкості ринкової економіки, вважаючи, що фактичний темп зростання національного доходу відхиляється від гарантованого. А це значить, що проблема встановлення динамічної рівноваги є дуже складною і суперечливою.

При цьому Р. Харрод розрізняв два таких поняття:

Gw – гарантований темп зростання національного доходу, за якого забезпечуються інтереси підприємців щодо одержання прибутку. Він відповідає повному використанню заощаджень ($I = S$), але безробіття не ліквідується;

Gn – природний темп зростання національного доходу, що означає повне використання ресурсів, в тому числі трудових, тобто відсутнє безробіття.

Звідси Р. Харрод робить висновок про те, що ситуація, коли гарантований темп зростання національного доходу дорівнює природному темпу (тобто $Gw = Gn$) є ідеальним станом економіки, за якого немає ні безробіття, ні хронічного недовантаження виробництва.

Але справа в тому, що фактичний приріст національного доходу тільки випадково може збігатися з одним із цих показників (*Gw* чи *Gn*). В результаті цього рівновага систематично порушується і її потрібно регулювати з боку держави.

Відповідно до схеми Р. Харрода, ймовірні такі дві основні нерівноважні макроекономічні ситуації:

Перша, коли

$$Gw < Gn;$$

І *друга* макроекономічні ситуації – це коли:

$$Gw > Gn.$$

Відхилення, за настання другої макроекономічні ситуації призводить до того, що розширення виробництва наштовхується на межу повної зайнятості, внаслідок чого настає хронічна депресія, недовантаження виробництва та надлишок капіталу.

Друга макроекономічна ситуація стимулює зростання виробництва, тривалий бум.

За умов, коли гарантований темп зростання національного доходу зростає чи знижується порівняно з природним, призводить до стану хронічної депресії чи кризи, робить висновок Р. Харрод, державне регулювання має бути безпосередньо спрямоване на досягнення стану рівноваги: $Gw = Gn$. Саме тоді досягається повне використання всіх зайнятих і реалізація всіх можливостей техніки, тобто динамічна рівновага [80].

Таким чином, в моделі економічної динаміки Р. Харрода виявляються нові методологічні позиції: використовується новий підхід з погляду досягнення динамізації економічних процесів. Ці процеси розглядаються як такі, що залежать від технічного прогресу (в трактуванні Р. Харрода — природні) і використовується причинно-наслідковий аналіз поряд з функціональним. Новими методологічними підходами вирішуються такі головні проблеми [82]:

по-перше, це дослідження факторів, що визначають потенційні можливості зростання національного доходу на довгостроковий період;

по-друге, це вирішення проблеми забезпечення стійкого стану економіки, тобто умов динамічної рівноваги;

по-третє, відповідь на питання, як економіка пристосовується до цього стійкого стану рівноваги, чи спроможна вона підтримувати цей стан автоматично.

При цьому Р. Харрод робить важливий висновок, щодо проблеми саморегулювання економіки, зробивши висновок про те, що розвинута ринкова економіка автоматично не може досягати стійкої рівноваги, що гарантований темп зростання національного доходу відхиляється від природного, і не існує сил, які б автоматично повернули економіку на шлях збалансованого розвитку окрім державного регулювання економіки [88].

Другим важливим висновком Р. Харрода є висновок про те, що темп зростання національного доходу залежить від нагромаджень ($I = S$), від використання технічного прогресу. Однак, в моделі Р.Харрода коефіцієнт капіталовкладень прийнято величиною постійною, а характер технічного прогресу – нейтральний (незмінний), хоча у житті ці показники змінюються в результаті технічного прогресу і зростання продуктивності праці. В цілому ж модель економічної динаміки Р.Харрода діє за принципом акселератора, так як в її основу було покладено рівність заощаджень та інвестицій.

Аналогічного висновку про необхідність постійного темпу зростання національного доходу як важливої умови динамічної рівноваги приблизно в той самий час, що і Р. Харрод, дійшов професор Массачусетського університету (США) Євсій Домар. Тому надалі в економічній літературі ці споріднені підходи було об´єднано у так звану модель Харрода–Домара [54].

Однак модель Є. Домара дещо відрізняється від моделі Р. Харрода. В її основу покладені не рівність заощаджень інвестиціям, а рівність грошового доходу (попиту) виробничим потужностям (пропозиції). Під виробничими потужностями Є. Домар розумів потенційно можливе виробництво продукції в умовах повної зайнятості. Таким чином доцільним є висновок про те, що модель Р. Харрода будувалася на акселераторі, а модель Є. Домара – на мультиплікаторі. В моделі Є. Домара динамічна рівновага досягається за умови, що попит і пропозиція мають зростати так, щоб приріст попиту дорівнював приросту пропозиції. При цьому динамічна рівновага може бути забезпечена лише певним темпом росту інвестицій, а зростання капіталовкладень розглядається як стратегічний фактор збалансованості економічного зростання. Відмінність моделі Є. Домара полягала і в тому, що в ній передбачалася повна зайнятість, тоді як Р. Харрод виходив з того, що динамічна рівновага може не збігатися з повною зайнятістю.

Але висновок Є. Домар робить такий самий, що і Р. Харрод: необхідною умовою динамічної рівноваги, тобто поступального руху економіки, є стійкий темп економічного зростання. «Я намагався показати, – писав Є. Домар, – що існує такий темп зростання доходу, яким би приблизно він не був, котрий, якщо його досягти, не призведе до зниження норми прибутку, зникнення інвестиційних можливостей, до виникнення хронічного безробіття і подібних лих... і що тією мірою, якою ми можемо тепер це збагнути, цей темп зростання не знаходиться за межами наших фізичних можливостей» [55, стор. 148]. При цьому і Р. Харрод і Є. Домар, стоячи на позиціях Дж. М .Кейнса, підкреслювали складність вирішення проблеми динамічної рівноваги і необхідність проведення відповідної державної політики регулювання економіки.

Таким чином, модель Харрода–Домара спрямована на те, щоб подолати статичність макроекономічної моделі Кейнса і розробити модель, розраховану на довгостроковий період. Моделі економічного зростання Харрода–Домара є однофакторними, тобто спрощеними. Вихідним положенням було те, що динамічна рівновага потребує певної відповідності виробництва та попиту. Є. Домар і Р. Харрод усвідомлювали спрощеність своїх моделей, вважаючи, що вони є лише інструментами теоретичного аналізу. По суті це були лише перші кроки в дослідженні складних зв΄язків процесу відтворення у вигляді однофакторної моделі (коефіцієнт капіталомісткості). Далі модель динамічної рівноваги розвивалась у напрямку розробки багатофакторних моделей економічного зростання, дослідження виробничих функцій, економічного програмування [66].

Складнішими системами моделювання є багатофакторні моделі економічного зростання Е. Хансена, Д. Хікса, Д. Дьюзенберрі. Ці моделі є неокейнсіанськими, модифікованими за рахунок запровадження в базові (однофакторні) моделі механізму циклічних коливань, змін галузевої структури виробництва, впливу науково-технічного прогресу, аналізу та залучення конкретних економічних даних. Таким чином теорії економічного зростання, що засновані на кейнсіанській концепції, дали поштовх серйозним статистичним розробкам, глибшому вивченню економічної кон’юнктури для розширення використання математичних методів у економічних дослідженнях [61].

Модель Харрода–Домара відображає зв’язок між рівнем заощаджень, інвестиціями та економічним зростанням. Автори моделі виходять з того, що у разі зростання продуктивності праці коефіцієнт капіталомісткості, тобто відношення капіталу до випуску продукції, суттєво не зміниться. У цьому випадку зростає і відношення капіталу до праці, і відношення виробленої продукції до трудових затрат, а значить коефіцієнт «капітал-виробництво» залишається незмінним. Дана модель розкриває складні взаємозв’язки, здатні врівноважити змінні зростання не у відносно короткий термін, а в довгостроковому періоді. Модель покликана підказати, які умови необхідні для постійного, рівномірного зростання. Але, однофакторна модель Харрода–Домара не є універсальним інструментом аналізу. Вона має обмежене використання, адже коефіцієнт капіталомісткості в різних країнах на різних стадіях господарського розвитку неоднаковий [41].

Так як неокласичні теорії росту були основані на принципі досконалої концепції відсутності державного втручання в економіку як обов'язкової умови, що забезпечує рівність між доходами власників факторів виробництва і їх граничними продуктами, то однією з головних особливостей неокейнсіанства стала глибока критична переробка та вдосконалення теорії статичної ринкової рівноваги Кейнса з метою її пристосування до більш повного врахування факторів економічної динаміки та дослідження динамічних станів економіки. Результатом теоретичних пошуків стала розробка неокейнсіанської теорії макроекономінної динаміки [81].

Основний зміст коригування теорії Кейнса полягав у реальних спробах подолати її явно виражений статичний характер шляхом введення у макроекономічну модель таких динамічних факторів, які б дали можливість здійснювати на основі методології Кейнса економічний аналіз рівноважних та нерівноважних станів економіки, що розвивається та зростає.

В моделі економічного зростання Кейнса обгрунтовано положення, що сукупний попит створює власну пропозицію й відіграє вирішальну роль у досягненні макроекономічної рівноваги. Водночас Кейнс враховував роль грошей у характеристиці динаміки рівня доходу й зайнятості. Визначальною ланкою попиту він називав інвестиції, які завдяки дії мультиплікатора зумовлюють зростання прибутку. Крім того, до аналізу співвідношення між сукупним попитом і доходами Кейнс включив функцію споживання, а капіталовкладення, у моделі Кейнса обумовлюються зростанням прибутків і є функцією від їх збільшення. Таким чином, наявність даних про обсяги інвестицій за заданого виду функцій споживання дає можливість визначити рівень доходу і споживання [17].

У посткейнсіанській найпростішій моделі економічного зростання Домара інвестиції є фактором створення і доходу, і нових потужностей. Він заперечував положення Кейнса про те, що досягнення певної зайнятості передбачає відповідний рівень сукупного попиту у короткотерміновому періоді, і стверджував, що в системі, яка динамічно розвивається, сукупний попит повинен зростати пропорційно її виробничим можливостям. Зміна цих можливостей залежить від динаміки національних ресурсів, розміру капіталу, наявної робочої сили і стану техніки. Ці показники, однак, можна узагальнити у величині зміни капіталу та його продуктивності, а отже, в обсязі чистих інвестицій. У результаті отримується рівняння [8]:

$$P_{t+1} - P_t = I_t s,$$

де P_{t+1} і p_t – виробничі можливості в різні моменти (у момент t досягається повна зайнятість);

I_t – чисті капіталовкладення;

s – приріст виробничих можливостей на одиницю інвестицій (береться як постійна величина).

Домар дійшов висновку, що приріст виробничих потужностей у межах динамічної економічної системи менший від $I_t s$ і є величиною $I_t Q$, де Q –- потенційна середня продуктивність капіталовкладень, тобто за незмінності граничної схильності до заощаджень рівень доходу перебуває у прямо пропорційній залежності від рівня капіталовкладень. Суттєвий недолік моделі Домара – її однофакторність (урахування впливу лише капіталокладень) і наявність тільки одного виду продукту [19].

В більш досконалій моделі економічного зростання Харрода ендогенна теорія інвестицій грунтується на принципі акселератора та очікуваннях підприємців, які, на його думку, виходять з того, що у разі підтвердження їх прогнозів попереднього періоду щодо динаміки інвестицій та реалізації виготовлених товарів вони плануватимуть зростання обсягів виробництва у таких самих обсягах. За перевищення запланованими обсягами виробництва масштабів ринкового попиту темпи зростання пропозицій зменшуватимуться на певну величину, і навпаки. Харрод водночас вважав, що гранична схильність до споживання впродовж усього періоду є постійною, а обсяг інвестицій визначається за допомогою принципу акселерації.

Таким чином, темпи зростання виробництва і доходу перебувають у прямо пропорційній залежності, економіка розвивається динамічно з-за прискореного зростання доходів. Для цього темпи зростання інвестицій мають випереджати динаміку споживчого попиту. Оскільки така модель економічного зростання передбачає наявність нестійкої рівноваги, держава повинна впливати на відповідні макроекономічні показники передусім за допомогою бюджетної політики. Харрод використовує в моделі поняття «природний темп приросту», що визначається збільшенням кількості активного населення й технічним прогресом, і доходить висновку, що для забезпечення повної зайнятості необхідне зростання інвестицій (норми нагромадження) такими ж темпами, як і темпи технічного прогресу. Оптимальний розвиток економіки, за Харродом, забезпечується за умови, що фактичні темпи її зростання відповідають гарантованим темпам зростання (за таких темпів підприємці задоволені своїми рішеннями), а гарантовані темпи – природним темпам зростання (повністю використовуються трудові ресурси) [63].

Таким чином головним інструментом теоретичної економіки є економічні моделі, які відображають реально існуючий зв’язок між явищами в реальній економіці, а дослідження проблеми економічного зростання призвело до вивчення її теоретичних моделей, покликаних обґрунтувати взаємозв’язок і взаємозалежність основних макроекономічних показників без чого неможливе ефективне прогнозування наслідків і варіантів доцільної стратегії.

Економічні проблеми, які відображають в часі економічне зростання (розвиток), з одного боку повинні передбачати здатність економічної системи зберігати свою стійкість та протидіяти змінам – без цього не можуть бути забезпечені направленість на незворотність, а з другого – розвиток нерозривно пов’язаний зі здатністю системи до переходу в інший стан. У зв’язку з цим погляди на проблему використання економічних моделей еволюціонували від класичної теорії до кейнсіанської та її послідовників і пов'язані з об'єктивною необхідністю державного втручання в економіку.

Одним з найважливіших інструментів запропонованим неокласичною школою на відміну кейнсіанства і його послідовників є теорія економічного росту, яка націлена, насамперед, на процеси відтворення суспільного капіталу [11].

Досліджуючи різноманітні процеси, які виникають в економіці та інших соціальних науках, не завжди вдається безпосередньо простежити залежність між величинами, що описують певний процес чи явище. Однак у багатьох випадках можна виявити функціональну залежність між визначальними характеристиками процесу (функціями), швидкостями їх зміни й часом, тобто знайти рівняння, які містять шукані функції та їхні похідні. Такі рівняння називають *диференціальними*, а знаходження невідомої функції (розв'язку) – *інтегруванням* диференціального рівняння [46].

Диференціальне рівняння, одержане у процесі дослідження деякого реального економічного процесу, називають *диференціальною моделлю* процесу. Диференціальні моделі називають ще *динамічними математичними моделями* описуваних ними реальних об'єктів. У таких моделях, крім шуканих залежних величин, містяться також похідні шуканих залежностей (швидкості, прискорення та ін.).

Диференціальні моделі допомагають зрозуміти досліджувані процеси, дають можливість установити якісні та кількісні характеристики їхніх станів. За допомогою їх використання можна описати механізм розвитку процесу, а також передбачити його подальший розвиток без натуральних експериментів, проведення яких часто є надто дорогим або просто неможливим.

Диференціальні моделі є важливою складовою математичного моделювання, яке включає не тільки побудову і дослідження математичних моделей, а й створення обчислювальних алгоритмів і програм, що реалізують ці моделі на комп'ютерах [67; 79].

У процесі побудови диференціальних моделей важливе значення має знання законів тієї області науки, з якою пов'язана природа задачі, що вивчається. Наприклад, в економіці – це модель росту в умовах конкуренції.

Звичайним диференціальним рівнянням називають співвідношення [82]:

$$F = \left(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}\right) = 0 \tag{1.3}$$

між незалежною змінною *x*,шуканою функцією *y=y(x)* цієї змінної і похідними $y', y'', ..., y^{(n)}$.

Позначення, використані в наведеному означенні, не є суттєвими: незалежна змінна може позначатися через *t*, шукана функція – через *s*, *f*, φ, *F* тощо.

Порядком звичайного диференціального рівняння називають порядок найвищої похідної невідомої функції, яка входить у рівняння [16].

У рівнянні *n*-го порядку (1.3) вважається, що похідна *n*-го порядку шуканої функції справді входить у це рівняння, тоді як наявність решти аргументів необов'язкова.

Наведемо приклади звичайних диференціальних рівнянь:

1. $y = xy' + y',\ y' + |y'| = 0,$
2. $y'' + y' = 0,$
3. $y'' + y' = \cos x,$
4. $y^{IV} - 4y''' + 5y'' - 2y' + y = xe^{x},$
5. $y^{(10)} = x.$

Перші два з наведених рівнянь (1, 2) мають перший порядок, третє рівняння – другий порядок, четверте рівняння – четвертий порядок, п'яте – десятий порядок.

Якщо диференціальне рівняння містить частинні похідні невідомої функції від кількох незалежних змінних, то його називають *рівнянням із частинними похідними*. Наведемо приклади таких рівнянь [46]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f(x, y, z).$$

Розв'язком рівняння (1.3) на деякому інтервалі $(a, b), -\infty \le a < b \le +\infty$, називають функцію *y=y(x)* яка має на цьому інтервалі похідні до порядку *n* включно і задовольняє рівняння (1.3). Це означає, що для всіх $x \in (a, b)$, виконується тотожність [57]:

$$F\left(x, y(x), y'(x), y''(x), ..., y^{(n)}(x)\right) \equiv 0.$$

Звичайне диференціальне рівняння *n*-го порядку в загальному варіанті має сім'ю розв'язків, залежну від *n* довільних сталих. Наприклад, усі розв'язки диференціального рівняння $y^{(n)} = 0$ містяться у формулі $y = C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + ... + C_{n-1} x + C_n$, де $C_1, ..., C_n$ – довільні сталі.

З геометричного погляду розв'язку диференціального рівняння у прямокутній системі координат відповідає деяка крива, яку називають *інтегральною кривою*. Сукупність інтегральних кривих, залежну від довільних сталих, називають *сім'єю інтегральних кривих*. Наприклад, розв'язки рівняння утворюють двопараметричну сім'ю парабол, кожна з яких є інтегральною кривою [52].

Процес знаходження розв'язків диференціального рівняння називають *інтегруванням* цього рівняння. Якщо при цьому всі розв'язки вдається виразити через елементарні функції або через інтеграли від елементарних функцій, то кажуть, що рівняння зінтегроване *у скінченному вигляді*. Надалі розглядатимемо переважно саме такі рівняння, тому що значно більше диференціальних рівнянь не інтегруються у скінченному вигляді й для представлення їхніх розв'язків доводиться використовувати більш складний математичний апарат.

Основною задачею теорії інтегрування диференціального рівняння є знаходження всіх його розв'язків і дослідження їхніх властивостей.

Диференціальне рівняння першого порядку в загальному варіанті можна записати так [75]:

$$F(x, y, y') = 0, \tag{1.4}$$

де *x* – незалежна змінна; *y* – невідома функція від *x*; $F(x, y, y')$– задана функція змінних *x*, *y*, $y' = \dfrac{dy}{dx}$.

Якщо рівняння (1.4) можна розв'язати відносно похідної, то його записують так:

$$y' = f(x, y). \tag{1.5}$$

Форма запису диференціального рівняння (1.5) називається *нормальною*.

Найпростішим із диференціальних рівнянь нормальної форми є рівняння *y'= f(x).* Якщо функція *f(x)* визначена і неперервна на деякому інтервалі *(a, b)*, то, як $y = \int f(x)dx + C,$ де C – довільна стала.

У багатьох випадках рівняння (1.4) зручно записувати у формі *dy– f(x, y)dx=0,* що є окремим випадком рівняння:

$$M(x, y)dx + N(x + y)dy = 0, \tag{1.6}$$

де $M(x, y), N(x, y)$ – відомі функції (*коефіцієнти рівняння*). Рівняння (1.6) зручне тим, що змінні *x* і *y* в ньому рівноправні, тобто кожну з них можна розглядати як функцію від іншої.

Розв'язком диференціального рівняння (1.5) на інтервалі (a, b) є неперервно диференційовна на цьому інтервалі функція *y=y(x),* яка перетворює рівняння (1.5) у тотожність, тобто $y'(x) = f(x, y(x))$.

Розв'язок рівняння (1.5) може бути заданий не тільки явно, тобто як *y=y(x),* а й у неявній формі: $\Phi(x, y) = 0$ (у формі, не розв'язаній відносно *y*) або у параметричній формі: *x=*φ*(t), y=*ψ*(t).*

Вище було зазначено, що диференціальні рівняння зазвичай мають безліч розв'язків. Однак у багатьох задачах теоретичного і прикладного характеру серед усіх розв'язків диференціального рівняння (1.5) потрібно знайти такий розв'язок *y=y(x),* який задовольняв би умову [3]:

$$y(x_0) = y_0, \tag{1.7}$$

де x_0, y_0 – задані числа. Тобто розв'язок, який для заданого значення незалежної змінної $x=x_0$ набуває заданого значення y_0.

Задачу відшукання розв'язку рівняння (1.5), який задовольняє умові (1.7), є *задачею Коші* (або *початковою задачею*). Умову (1.7) називають *початковою*, а числа x_0, y_0 – *початковими даними* задачі (1.5) і (1.7) [2].

З геометричного погляду задача Коші (1.5) і (1.7) полягає у відшуканні інтегральної кривої рівняння (1.5), яка проходить через наперед задану точку (x_0, y_0) площини *Oxy*.

Однак для багатьох задач важливо знати не тільки факт існування розв'язку диференціального рівняння, але також і те, чи є цей розв'язок єдиним. Відповідь на це питання має виняткове значення як для самої теорії диференціальних рівнянь, так і для багатьох її застосувань а першу чергу для моделювання періодичних процесів в економіці. Таким чином розв'язок задачі Коші єдиний, то, знайшовши розв'язок, який задовольняє задані початкові умови, то інші розв'язки, які задовольняють ті ж самі початкові умови, немає. У задачах моделювання періодичних процесів в економіці це приводить до одержання єдиного закону процесу, який визначається тільки диференціальним рівнянням і початковими умовами.

Загальним розв'язком диференціального рівняння (1.5) у деякій області *G* площини *Oxy* називають функцію [9].

$$y = y(x, C), \tag{1.8}$$

яка залежить від однієї довільної сталої *C,* якщо:

1. Вона є розв'язком рівняння (1.5) для довільного фіксованого значення сталої *C;*

2. Для довільної початкової умови (1.7), де $(x_0, y_0) \in G$ існує єдине значення сталої $C=C_0$ таке, що функція $y=y(x, C_0)$ задовольняє умову (1.7).

Якщо не можна знайти загальний розв'язок функції (1.8), його шукають у неявній формі $F=(x, y, C)=0.$ Такий розв'язок є *загальним інтегралом* диференціального рівняння. Часто загальний інтеграл одержують як $\psi(x,y)=C$, тобто як у розв'язаному відносно довільної сталої C. Функцію $\psi(x,y)$ у цьому випадку називають *інтегралом* диференціального рівняння. Аналогічно визначають сім'ю інтегральних кривих (розв'язків) рівняння, залежну від довільної сталої C, у параметричній $x=\varphi(t,C)$, $y=\psi(t,C)$ як *загальний розв'язок у параметричній формі* [68].

Якщо в точці (x_0, y_0) порушуються умови теореми Коші, то через цю точку проходить декілька інтегральних кривих (розв'язок не єдиний) або не проходить жодної інтегральної кривої (розв'язку не існує). Такі точки називають *особливими точками* диференціального рівняння.

Шукати особливі точки потрібно серед точок, у яких мають розрив функція $f(x,y)$ або її частинна похідна $f_y'(x, y)$, а потім, аналізуючи загальний розв'язок, необхідно перевірити,чи будуть ці точки особливими. Така перевірка обов'язкова, бо теорема Коші дає лише достатні умови, а отже, може існувати єдиний розв'язок задачі Коші (1.5) і (1.7) навіть тоді, коли в точці (x_0, y_0) не виконується одна або обидві умови теореми [20].

Частинним розв'язком рівняння (1.5) в області G називають функцію $y=y(x, C_0)$, утворену із загального розв'язку (1.8) за певного значення сталої $C=C_0$.

Якщо кожна точка розв'язку диференціального рівняння є особливою, то такий розв'язок називають *особливим* [77]. Особливий розв'язок не можна отримати з формули загального розв'язку (загального інтеграла) диференціального рівняння за жодного конкретного значення сталої C.

З геометричного погляду загальним розв'язком $y=y(x, C)$ є сім'я інтегральних кривих на площині Oxy, яка залежить від однієї довільної сталої C, а частинний розв'язок – це одна інтегральна крива цієї сім'ї, що проходить через задану точку. Графіком особливого розв'язку є інтегральна крива, яка у кожній своїй точці має спільну дотичну з однією з інтегральних кривих. Таку інтегральну криву називають *обвідною* сім'ї інтегральних кривих [13].

Розглянемо звичайне диференціальне рівняння n-го порядку

$$F\left(x, y, y', ..., y^{(n)}\right) = 0. \qquad (1.9)$$

Якщо рівняння (1.9) можна розв'язати відносно старшої похідної, то його записуватимемо так:

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right). \qquad (1.10)$$

Функцію $y = y(x)$, яка визначена і неперервно диференційовна n разів на інтервалі (a, b), називають *розв'язком* рівняння (1.10) на цьому інтервалі, якщо вона для всіх $x \in (a, b)$ перетворює це рівняння у тотожність.

Для рівняння (1.10) *задача Коші* формулюється так: серед усіх розв'язків цього рівняння знайти такий розв'язок $y = y(x)$, який для $x=x_0$ задовольняє умови

$$\begin{gathered} y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y_0', \ ..., \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1}, \end{gathered} \qquad (1.11)$$

де $x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}$ – задані числа, які називають *початковими даними розв'язку* $y = y(x)$.

Число x_0 називають початковим значенням незалежної змінної x, сукупність чисел $x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}$ – *початковими даними рівняння* (1.10), а умови (1.11) – *початковими умовами* [50].

Зокрема, для рівняння другого порядку

$$y'' = f\left(x, y, y'\right) \qquad (1.12)$$

задача Коші полягає у знаходженні розв'язку $y = y(x)$ цього рівняння, який задовольняє початкові умови [52]:

$$y(x_0) = y_0,$$
$$y'(x_0) = y'_0, \qquad (1.13)$$

З геометричного погляду задача Коші (1.12) і (1.13) полягає у знаходженні такої інтегральної кривої, яка проходить через точку *(x_0, y_0)* і має в цій точці заданий напрямок дотичної y'_0, тобто $tg\alpha_0 = y'_0$.

Зауважимо, що єдиність розв’язку задачі Коші для рівняння *n*-го порядку (1.10) не означає, що через точку *(x_0, y_0)* проходить тільки одна інтегральна крива, як це було для рівняння першого порядку, розв’язаного відносно похідної. Наприклад, єдиність розв’язку задачі Коші (1.12) і (1.13) означає, що через кожну точку *(x_0, y_0)* проходить єдина інтегральна крива рівняння (1.12), дотична до якої в цій точці утворює з додатним напрямком осі *Ox* кут α_0, для якого $tg\alpha_0 = y'_0$. Водночас, крім цієї інтегральної кривої, через точку *(x_0, y_0)* можуть проходити й інші інтегральні криві, але з іншим нахилом дотичної в цій точці [51].

Достатня умова існування розв’язку задачі Коші для диференціального рівняння першого порядку поширюється і на випадок рівняння *n*-го порядку.

Загальним розв’язком рівняння (1.10) є сім’я розв’язків цього рівняння, залежна від *n* довільних сталих:

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n).$$

З геометричного погляду це є сім’я інтегральних кривих на площині (x, y), залежна від *n* параметрів $C_1, C_2, ..., C_n$, причому рівняння цієї сім’ї розв’язане відносно *y*.

Загальний розв’язок рівняння (1.10) у неявній формі $\Phi(x, y, C_1, ..., C_n) = 0$ називають *загальним інтегралом* цього рівняння.

У деяких випадках, інтегруючи рівняння (1.9), шукають сім’ю інтегральних кривих, яка залежить від *n* довільних сталих C_1, C_2, C_n, у параметричній формі [75]:

$$\begin{cases} x = \varphi(p, C_1, C_2, ..., C_n), \\ y = \psi(p, C_1, C_2, ..., C_n). \end{cases}$$

Така сім'я інтегральних кривих є *загальним розв'язком у параметричній формі*.

Поняття частинних та особливих розв'язків для диференціальних рівнянь вищих порядків вводяться аналогічно, як і для рівняння першого порядку.

Розв'язок *y=y(x)* рівняння (1.10) називають *частинним*, якщо в кожній його точці зберігається єдиність розв'язку задачі Коші, тобто для кожної точки $(x_0, y(x_0))$ на інтегральній кривій, *y=y(x)* не існує іншого розв'язку $y = y_1(x)$, який би задовольняв початкові умови [86]:

$$y_1(x_0) = y(x_0),$$

$$y_1'(x_0) = y'(x_0), \ldots,$$

$$y_1^{(n-1)}(x_0) = y^{(n-1)}(x_0).$$

Кожний розв'язок, який можна одержати з формули загального розв'язку для певних допустимих числових значень сталих $C_1, C_2, \ldots, C_n$, буде, частинним.

Розв'язок, у кожній точці якого порушується розв'язку задачі Коші, називають *особливим*. Такий розв'язок не можна одержати з формули загального розв'язку для жодних значень сталих $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Слід зауважити, що диференціальне рівняння n-го порядку може мати сім'ю особливих розв'язків, залежну від довільних сталих, кількість яких може бути $n-1$.

Досліджуючи економічні об'єкти, які відповідають певним умовам, варто знати, як поводитиметься об'єкт за невеликих перерозподілів економічних ресурсів або за зміни початкових умов. Той об'єкт, економічні параметри якого не реагують на ці зміни, називають стійким.

Узагалі, створюючи диференціальну модель деякої прикладної задачі, зазвичай більш цікавим є не загальний, а частинний розв'язок диференціального рівняння, тобто розв'язок, який задовольняє певні початкові умови. Такі початкові умови, здебільшого, беруться з досліду чи експерименту, а тому їхня абсолютна точність дуже сумнівна. Маючи це на увазі, можна припустити, що незначні зміни початкових умов викликають незначну зміну самого розв'язку, інакше кажучи, що розв'язок неперервно залежить від початкових умов. Але в економічних процесах навіть незначні зміни початкових умов зумовлюють істотні відхилення розв'язків. Тобто такі розв'язки є нестійкими, і вони навіть наближено не можуть описувати економічний процес, який розглядається. Таким чином, одним з основних постає питання про стійкість розв'язків диференціальних рівнянь щодо різного роду збурень вхідних даних, тобто неточностей задання цих даних (початкових даних, правих частин рівнянь тощо), що якраз і спостерігається в економіці як слабоформалізованій системі.

Розглянемо детальніше проблему стійкості розв'язків диференціальних рівнянь для періодичниз процесів в економіці.

Позначимо через $y_1 = y_1(t),\ y_2 = y_2(t),\ ...,\ y_n = y_n(t)$ дійсні функції, які характеризують економічний процес. Припустимо, що процес зміни величин $y_1, y_2, ..., y_n$ з часом t описується нормальною системою диференціальних рівнянь:

$$\frac{dy_j}{dt} = f_j(t, y_1, y_2, ..., y_n),\ j = 1, 2, ..., n, \tag{1.14}$$

з початковими умовами [23]:

$$\begin{gathered} y_1(t_0) = y_{10}, \\ y_2(t_0) = y_{20}, ..., \\ y_{n1}(t_0) = y_{n0}. \end{gathered} \tag{1.15}$$

Якщо розглядати $y_1, y_2, ..., y_n$ як координати рухомої точки, то кожний розв'язок задач (1.14) і (1.15) називатимемо *рухом*.

У економічних задачах аргумент (зазвичай час) може необмежено зростати. Тоді не гарантується неперервної залежності розв'язків від початкових умов, тобто незначна зміна початкових умов може викликати істотні зміни в поведінці розв'язку за необмеженого зростання значення аргументу. Отже, надалі вважатимемо, що $t \in [T, +\infty)$, тобто час може необмежено зростати [28].

Розв'язок $y_j=\varphi_j(t)$, $j=1, 2, ..., n$, $t \in [T, +\infty)$, системи (1.12) є *стійким*, якщо для будь-яких ε>0 і $t_0 \geq T$ існує число δ= δ(ε)>0 таке, що довільний інший розв'язок $y_j = y_j(t)$, $j=1, 2, ..., n$, цієї ж самої системи, початкові значення $y_j(t_0)$ якого задовольняють нерівності [27]:

$$\left| y_j(t_0) - \varphi_j(t_0) \right| < \delta, \ j=1, 2, ..., n, \tag{1.16}$$

визначений для всіх $t \geq t_0$ і реалізуються нерівності

$$\left| y_j(t) - \varphi_j(t) \right| < \varepsilon, \ j=1, 2, ..., n, \ t \geq t_0. \tag{1.17}$$

Іншими словами, розв'язок $y_j=\varphi_j(t)$, $j=1, 2, ..., n$, системи (1.14) є стійким, якщо кожний розв'язок $y_j = y_j(t)$, $j=1,2,...n$, системи (1.14) із початковими умовами з δ-околу точки $\varphi_j(t_0)$ $j=1, 2, ..., n$, за $t_0 \leq t < +\infty$ існує і не виходить з ε-околу графіка розв'язку $y_j=\varphi_j(t)$, $j=1, 2, ..., n$.

Розв'язок $y_j=\varphi_j(t)$, $j=1, 2, ..., n$ є *асимптотично стійким*, якщо виконуються умови:

1. Вказаний розв'язок є стійкимвін стійкий;
2. Усі розв'язки $y_j=\varphi_j(t)$, $j=1, 2, ..., n$ системи (1.14) із достатньо близькими початковими умовами при $t \to +\infty$ необмежено наближаються до $\varphi_j(t)$, $j=1, 2, ..., n$ тобто з нерівності (1.16) випливає, що

$$\lim_{t \to +\infty} \left| y_j(t) - \varphi_j(t) \right| = 0, \ j=1, 2, ..., n. \tag{1.18}$$

При цьому слід зауважимо, що умови 1 і 2 незалежні: з умови 1 не випливає умова 2 [бо з (1.17) не випливає (1.18)], а з умови 2 не завжди випливає умова 1.

Розв'язок $y_j=\varphi_j(t)$, $j=1, 2, ..., n$ системи (1.14) є *нестійким*, якщо він не є стійким. Це означає, що існує таке ε>0, що для будь-якого як завгодно малого δ>0 знайдеться розв'язок системи (1.14) $y_j = y_j(t)$, $j=1, 2, ..., n$, для якого при виконанні нерівностей (1.16) принаймні для одного значення j матимемо, що $\left|y_j(t)-\varphi_j(t)\right| \geq \varepsilon$ для деякого $t \geq t_0$.

Здебільшого, для доведення нестійкості розв'язку користуються необмеженістю різниці $\left|y_j(t)-\varphi_j(t)\right|$ на інтервалі $[t_0, +\infty)$ або тим, що ця різниця прямує до $+\infty$, якщо $t \to +\infty$.

Розв'язок (рух), який відповідає початковим даним t_0, y_{10}, $y_{20}, ..., y_{n0}$, називають *незбуреним*, а розв'язок зі зміненими початковими даними $t_0, \tilde{y}_{10}, \tilde{y}_{20}, ..., \tilde{y}_{n0}$ – *збуреним* розв'язком (рухом).

Таким чином, аналіз вище наведених методів моделювання періодичних процесів в економіці, дає можливість для ефективного їх застосування при управлінні та моделюванні діяльності економічних об'єктів.

1.3. Концепція моделювання періодичних процесів в економіці

За ринкових умов господарювання ключовим економічним важелем, що активно впливає на розвиток суспільного виробництва і рівень життя населення, є ціна. Вона завжди коливається навколо ціни виробництва (перетвореної форми вартості одиниці товару, що дорівнює сумі витрат виробництва й нормативного прибутку) і відображає рівень суспільно потрібних витрат праці.

Базуючись на теоретичних положеннях математичного та системного аналізу, теорії економічних циклів, економічної теорії і враховуючи взаємозв'язок між періодичними процесами та стратегією економічних об'єктів, розроблено концепцію моделювання періодичних процесів в економіці (рис.1.3), що пов'язує елементи теоретичного, методичного, інструментального та модельного рівнів. Практичний рівень даної концепції передбачає впровадження у діяльність економічного об'єкту системи моделювання періодичних процесів для підвищення економічної ефективності функціонування економічного об’єкту.

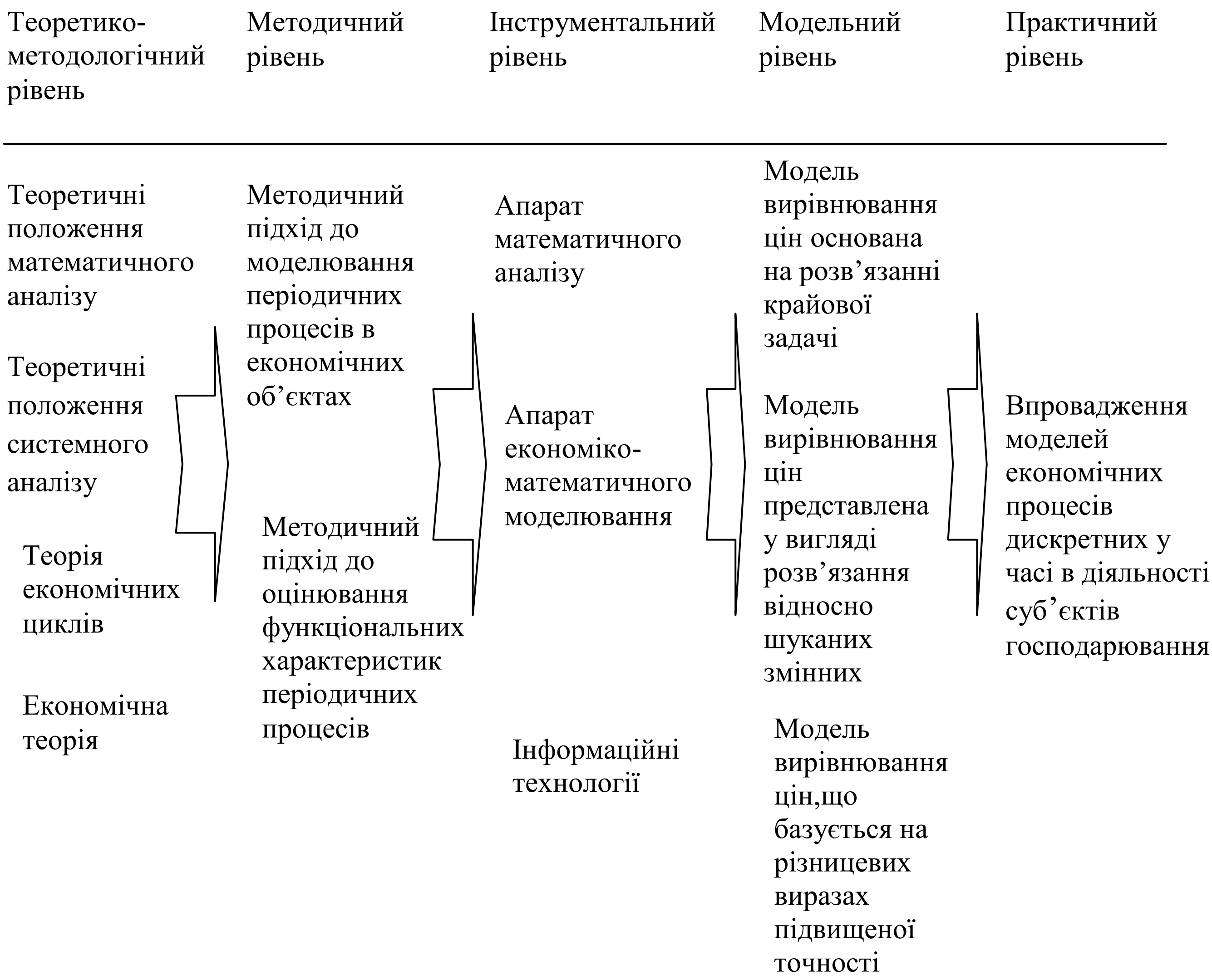

Рис. 1.3. Схема концепції моделювання періодичних процесів в економіці

Ціноутворення – це процес формування цін, він є одним із ключових елементів ринкової економіки.

Ціна є грошовим вираженням вартості, кількості грошей, які сплачують або отримують за одиницю товару чи послуги. Одночасно ціна відображає споживчі властивості (корисність) товару, купівельну спроможність грошової одиниці, ступінь рідкісності товару, силу конкуренції, державного контролю, економічну поведінку ринкових суб’єктів та інші суб’єктивні моменти.

Ціна на будь який товар складається з окремих елементів. Основними з них є собівартість і прибуток. Їх наявність у ціні є обов’язковою. Крім того, до складу ціни можуть входити акцизний збір, податок на додану вартість, націнки постачальницько-збутових організацій, торгівельні надбавки або знижки [24].

Ціноутворення – це процес обґрунтування, затвердження та перегляду цін і тарифів, визначення їхнього рівня, співвідношення і структура.

Залежно від того, яку мету переслідує підприємство чи фірма на ринку, розрізняють різні підходи до ціноутворення. Такими цілями діяльності підприємства за оптимізації ціни можуть бути [74]:

– виживання на ринку як мету ставлять тоді, коли ринок досяг майже граничної ємності; для збереження життєздатності підприємства можуть установлювати низькі ціни, сподіваючись, що ринок буде чутливим до них;

– максимізація прибутку; у цьому разі зіставляються попит і витрати на виробництво з альтернативними цінами й обирають ту з них, яка забезпечить максимальний прибуток;

– лідерство на ринку досягається шляхом зниження витрат і одержання високого і тривалого прибутку; установлюються низькі ціни з метою збільшення частки підприємства на ринку;

– лідерство як товар передбачає встановлення відносно високих цін, які повинні компенсувати великі витрати на науково-дослідні роботи і забезпечення якості.

В умовах товарного виробництва й обігу продукти праці виготовляють і реалізують як товари. Ціна кожного окремого товару необов’язково має збігається з вартістю: вона може відхилятися нагору й униз від вартості залежно від попиту і пропозиції даного товару. У ринкових коливаннях цін навколо вартості виявляється чинність закону вартості – економічного закону товарного виробництва. Закон вартості спонукає товаровиробників ураховувати суспільно потрібні витрати праці і домагатися їхнього зниження, регулює розподіл суспільної праці і засобів виробництва між галузями народного господарства [17].

Ціна повинна відбивати інтереси як виробників, так і споживачів товарів. Вона повинна забезпечити виробникові відшкодування витрат із визначеною прибутковістю, а споживачу – економічну вигоду від експлуатації даного товару.

Отже, предмет ціноутворення включає весь механізм ціноутворення, економічну суть цін, принципи, методи цін, методику розрахунку системи цін у галузях народного господарства та особливості формування цін зовнішнього ринку в умовах ринкової економіки.

Ціна виконує такі функції [50]:

1. Обліково-аналітичну (забезпечує облік результатів господарювання та їх прогнозування).

2. Розподільну (впливає на розподіл ресурсів, доходів і фінансів у суспільстві.

3. Стимулювальну (сприяє раціональному використанню обмежених ресурсів, науково-технічному прогресу, оновленню асортименту).

4. Регулятивну (здійснюється збалансування між окремими виробництвами, попитом і пропозицією).

1. Обліково-аналітична функція забезпечує еквівалентність обміну, тобто виторг від реалізації продукції (робіт, послуг) за інших рівних умов забезпечує відшкодування витрат на виробництво і реалізацію, а також утворення прибутку в розмірі, що дозволяє вдосконалювати і розвивати виробництво, підвищувати життєвий рівень робітників. Цю функцію ціни виконують завжди. Знаючи, у що обходиться та або інша продукція, можна за допомогою цін вимірювати різноманітні її види, а також виражати у грошовому вимірі будь-яку кількість продукції і послуг.

2. Розподільна (або перерозподільна) функція складається в розподілі прибутку між виробниками і споживачами. Якщо ціна товару вища від його вартості, то виробник відшкодовує свої витрати і дістає прибуток. Якщо ж ціна нижча від вартості, то виробник працює собі у збиток. Споживач продукції також має різну економічну вигоду при її використанні.

Таким чином, розподільна функція ціни виражає напрямок розподілу – на користь виготовлювача або споживача. Іншими словами, у результаті відхилення цін від вартості національний доход перерозподіляється між накопиченням і споживанням. Завдання перерозподілу національного доходу у визначених економічних, соціальних або політичних цілях може успішно вирішувати і податкова система. Тому варто поступово звільняти ціни від цієї функції і передавати її виконання податковій системі.

3. *Стимулювальна функція.* Суть її полягає в тому, що підвищені ціни стимулюють підприємства до випуску прогресивних і дефіцитних видів продукції, а знижені – до зняття з виробництва застарілої продукції.

4. *Регулятивна функція* виражається в балансуванні попиту і пропозиції. Коли ж немає можливості досягти відповідності попиту і пропозиції шляхом зміни обсягу виробництва або це невигідно, у цьому разі використовується інструмент ціни. У машинобудуванні він застосовується як стосовно засобів виробництва (наприклад, знижені ціни на сільськогосподарську техніку), так і стосовно споживчих товарів тривалого користування [51].

Функції цін взаємозалежні й утворять єдину систему, хоча їхня дія багато в чому взаємно перекривається, чим пояснюються трудності практичного ціноутворення.

При моделюванні ціноутворення використовують неперервну модель, в якій вважається, щопопит *(D)* та пропозиція *(S)* товару залежать не тільки від ціни на товар *p(t),* а й від швидкості її часової зміни, тобто $\frac{dp}{dt}\cdot$ Тоді з умови рівноваги між попитом і пропозицією

$$D\left(p,\frac{dp}{dt}\right)=S\left(p,\frac{dp}{dt}\right)$$

випливає диференціальне рівняння для визначення динаміки зміни цін [46].

Для прикладу проаналізуймо такі лінійні функції

$$D\left(p,\frac{dp}{dt}\right)=D_0+a_d\,p+b_d\,\frac{dp}{dt},$$

$$S\left(p,\frac{dp}{dt}\right)=S_0+a_s\,p+b_s\,\frac{dp}{dt}.$$

З умови рівноваги матимемо рівняння

$$\left(b_d - b_s\right)\frac{dp}{dt} = -\left(a_d - a_s\right)p + S_0 - D_0.$$

Розв’язок, коли початкова умова $p(0) = p_0$, буде таким:

$$p = \left(p_0 - p_*\right)e^{-n} + p_*,$$

де

$p_* = \dfrac{S_0 - D_0}{a_d - a_s}$ – стаціонарний розв’язок;

$\gamma = \dfrac{a_d - a_s}{b_d - b_s}$ – характерний темп зміни ціни.

Аналізуючи залежність *p(t)*, можна зробити такі висновки.

Якщо γ<0, і $p_* > 0$, то з часом *p(t)* виходить на p_* (кажуть, що ціна p_* *стійка*).

Якщо ж γ<0, то ціна експоненціально зростатиме, тобто буде інфляція. Якщо початкову умову вибрано так, що $p_0 = p_*$, $p(t) = p_*$, будь-яке відхилення в початковій умові від p_* призводить до зростання ціни (кажуть, що ціна p_* *нестійка*).

Нехай

$$D = 16 + p + 4\frac{dp}{dt},$$

$$S = 28 - 2p + 3\frac{dp}{dt},$$

$$p_0 = 20.$$

Тоді з умови рівноваги матимемо

$$\frac{dp}{dt} = -3p + 12,$$

$$p(0) = 20,$$

$$p = 16e^{-3t} + 4.$$

У цьому прикладі ціна виходить із часом на стійкий стаціонарний рівень $p_* = 4.$ Часто при аналізі динаміки зміни цін користуються і наближеннями, які містять похідні від ціни за часом вищих порядків, наприклад,

$$D = D_0 + a_d p + b_d \frac{dp}{dt} + c_d \frac{d^2 p}{dt^2},$$

$$S = S_0 + a_s p + b_s \frac{dp}{dt} + c_s \frac{d^2 p}{dt^2}.$$

З умови рівноваги між попитом і пропозицією *D*=*S* випливає диференціальне рівняння

$$\left(c_d - c_s\right)\frac{d^2 p}{dt^2} + \left(b_d - b_s\right)\frac{dp}{dt} + \left(a_d - a_s\right)p - S_0 + D_0 = 0,$$

яке слід доповнити початковими умовами, $p(0) = p_0,\ \frac{dp}{dt}(0) = p_0.$ З теорії лінійних диференціальних рівнянь відомо, що його загальний розв'язок є такий:

$$p = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + p_*,$$

$$p_* = \frac{S_0 - D_0}{a_d - a_s},$$

де C_1 і C_2 – довільні сталі;
$\lambda_{1,2}$ – корені характеристичного рівняння

$$\left(c_d - c_s\right)\lambda^2 + \left(b_d - b_s\right)\lambda + a_d - a_s = 0.$$

Якщо корені цього рівняння від'ємні, $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0,$ або комплексні $\lambda_{1,2} = \gamma \pm i\omega$ з $\gamma < 0,$ то ціна з часом виходить на стаціонарний рівень $p = p_*$ (*стійка ціна*). Якщо $\lambda_1 < 0,\ \lambda_2 < 0,$ наближення до стаціонарного рівня відбувається монотонно. Якщо $\lambda_{1,2} = \gamma \pm i\omega$

$$p = e^{n}\left(C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t\right) + p_*,$$

наближення до стаціонару $p = p_*$ має характер затухаючих коливань.

У випадках, коли хоча б один і коренів $\lambda_{1,2}$ додатній, або корені комплексні $\lambda_{1,2} = \gamma \pm i\omega$ з $\gamma>0$ то *p(t)* з часом експоненційно зростатиме (*нестійка ціна*).

Нехай попит *D* і пропозиція *S* як функції ціни *p* та її похідних задано виразами

$$D = \frac{d^2p}{dt^2} - \frac{dp}{dt} - p + 4,$$

$$S = 2\frac{d^2p}{dt^2} + 2\frac{dp}{dt} + p - 2.$$

Тоді з умови рівноваги матимемо

$$\frac{d^2p}{dt^2} - \frac{dp}{dt} - p + 4 = 2\frac{d^2p}{dt^2} + 2\frac{dp}{dt} + p - 2,$$

або

$$\frac{d^2p}{dt^2} + 3\frac{dp}{dt} + 2p - 6 = 0.$$

Стаціонарна ціна визначається з рівняння $2p_* - 6 = 0,\ p_* = 3.$ Обидва корені характеристичного рівняння $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$ від'ємні, $\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = -1.$ Тому за будь-яких початкових умов ціна виходить на стійкий стаціонарний рівень $p_* = 3.$

Ціна є головною й універсальною формою зв'язку товаровиробника і ринку. Вона уможливлює або, навпаки, робить неможливою купівлю-продаж товару, а отже, і саме економічне існування виробника товару. Можливості реалізації практично всіх економічних інтересів у кінцевому підсумку визначаються рівнем ціни, за якою продають і купують товар. Правильний вибір ціни є запорукою міцного фінансового стану і фінансової стійкості підприємства (фірми), успішної реалізації тактичного і стратегічного планування.

Світовою практикою нагромаджено достатньо великий досвід розроблення і використання ринкового механізму ціноутворення, на який впливають такі умови [1]:

– кількість суб’єктів ринку (продавців і покупців): що їх більше, то менше змінюється ціна;
– незалежність суб’єктів ринку: що їх менше, то більше можливостей як у продавців, так і в покупців впливати на рівень ціни, і – навпаки;
– ступінь індивідуалізації продукції (робіт, послуг): що різноманітніший їхній асортимент, то більша можливість того, що окремі їхні види зможуть витримати загальний напружений стан ринку;
– зовнішні обмеження: на рівень цін на ринку впливають такі чинники, як попит, пропозиція, державне регулювання цін та інші.

Процес виробітку промислової стратегії щодо встановлення цін на продукцію складається з ряду послідовних *етапів* [7]:

– установлення цілей ціноутворення;
– оцінки попиту;
– вивчення цін на продукти конкурентів;
– вибору методу ціноутворення;
– урахування чинників, що впливають на встановлення ціни;
– остаточного встановлення ціни.

Установлення цілей ціноутворення. Для розроблення відповідної цінової стратегії підприємство (фірма) повинно насамперед визначити цілі, що багато в чому зрозумілі вже із самого функціонування на ринку продукції (робіт, послуг). Ці цілі повинні бути спрямовані на досягнення підприємством стратегічних завдань, які стоять перед ним у конкретному ринковому сегменті.

Оцінка попиту. У загальному варіанті ціна і попит перебувають в обернено-пропорційній залежності, тобто зі збільшенням ціни попит падає, і – навпаки. Проте характер цього зв’язку не однаковий для різноманітних видів продукції, оскільки підвищення цін на деякі з них може сприйматись як значне поліпшення їхньої якості і призводити до підвищення попиту. Але такий ріст попиту можливий тільки до визначеної межі, після чого знову починається спад.

Вивчення попиту ведеться на підставі великої інформації про його рівні різноманітних цін. Отже, адекватність оцінки попиту і встановлення оптимальної ціни на продукцію значною мірою визначаються ступенем розвитку на підприємстві маркетингової інформації.

Виявлений характер впливу кожного з чинників дозволяє знайти оптимальні умови, що забезпечують потрібний попит, а отже, і відповідний йому рівень ціни на продукт.

Нарешті, для адекватної оцінки попиту доцільно брати до уваги його чутливість до зміни ціни. Якщо незначна зміна ціни веде до істотної зміни попиту, то він вважається еластичним [43].

Ступінь еластичності попиту на окремий продукт дозволяє скоригувати ціну на нього. Так, якщо попит недостатньо еластичний, підприємство може спробувати поступово піднімати ціну на продукцію доти, поки це не відбивається небажано на її збуті.

Проте таким прийомом не варто зловживати, оскільки можна підірвати відданість споживачів. За еластичного попиту, особливо якщо підприємство не задоволене розміром поточних прибутків, не зайвим було б злегка знизити ціну, щоб стимулювати збут і тим самим підвищити розмір одержуваного прибутку.

Вивчення цін на продукти конкурентів. Ціни, установлювані конкурентами, багато в чому визначають цінову стратегію підприємства, тому вони підлягають ретельному аналізові. Ціни на промислову продукцію і її якість повинні перебувати у прямій залежності, тому споживачі, обираючи підприємство для обслуговування, прагнуть зіставити насамперед ці показники. Перевага віддається тому підприємству, у якого ціни більшою мірою відповідають рівню якості [44].

Для аналізу продукції конкурентів підприємства звичайно вдаються до експертних оцінок показників якості.

Якість продукції конкурентів і доступність цін на них можна оцінити, дізнавшись про думку самих споживачів.

Порівнюючи показники якості і ціни конкурентів з аналогічними показниками свого підприємства, службовці відділу маркетингу повинні зробити визначені висновки про спрямованість роздрібної цінової стратегії. Для цього ціни конкурентів беруть як відправну точку досліджень. Якщо якість продукції конкурентів перевершує аналогічні показники підприємства, то говорити про встановлення ціни на тому самому ж рівні не має змісту.

Якщо ж якість продукції підприємства приблизно відповідає якості, запропонованої конкурентами, є всі підстави для встановлення ціни, близької до ціни конкурентів. Таким чином, для вироблення продуманої цінової стратегії рівень цін і якість продукції конкурентів повинні прийматися за базу порівняння.

Вибір методу ціноутворення. Розробляючи цінову стратегію, підприємство може обрати один з альтернативних методів ціноутворення.

Урахування чинників, що впливають на встановлення ціни. Це наступні чинники [44].

1. *Імідж підприємства*. Саме він багато в чому визначає встановлення цін. Підприємство, пропонуючи свою продукцію споживачам, повинно насамперед піклуватися про те, яким воно буде на фоні інших підприємств, як сприйматимуть споживачі його продукцію. Формування іміджу підприємства відбувається під впливом множини чинників – таких, як стосунки зі споживачами, якість продукції і ціна на неї. Розробляючи цінову стратегію, підприємство повинно враховувати сприйманий споживачами імідж, оскільки що більший авторитет воно має, то й більшу довіру і популярність матиме його продукція.

2. *Географічне розміщення*. Багато підприємств мають розгалужену мережу філій і продають свою продукцію по усьому світі. У зв’язку з цим виникає потреба орієнтації цінової стратегії на особливості грошових ринків у різних країнах (регіонах). Застосування єдиної цінової стратегії без урахування

географічного чинника може призвести до істотних утрат, що так чи інакше змусить підприємство переглянути свої підходи до ціноутворення.

3. *Вплив інших суб'єктів ринку*. Крім конкурентів, на цінову стратегію підприємства можуть натиснути споживачі, уряд. У багатьох випадках, щоб уникнути конфліктів із споживачами своєї продукції і для підтримки свого іміджу, підприємства йдуть назустріч побажанням споживачів, що стосуються проведеної політики встановлення цін. Проте варто намагатися не припускати таких «побажань», проводячи гнучку цінову стратегію. Якщо все-таки не вдасться уникнути подібного становища, то перед ухваленням відповідного рішення варто оцінити якісний і кількісний склад споживачів, що висувають які-небудь вимоги, і залежно від цього вносити прийнятні корективи в цінову стратегію.

4. *Цінові знижки.* Багато підприємств активно використовують у своїх цінових стратегіях різного роду цінові знижки, що покликані стимулювати придбання промислової продукції у великих обсягах. Звичайно подібні цінові скидки застосовуються щодо найбільших споживачів продукції. Проте застосування знижок і надбавок жадає від підприємств точного аналізу своїх витрат, щоб зростання обсягів продажу сприяло не скороченню, а збільшенню прибутку.

Остаточне встановлення ціни. Обраний метод ціноутворення багато в чому визначає розмір майбутньої ціни на промислову продукцію, проте остаточно встановлена ціна може істотно відрізнятися від запропонованої заздалегідь. Це пояснюється наявністю описаних вище чинників, що впливають на встановлення цін. Урахування цих чинників не дає ще остаточної ціни, оскільки потрібний також аналіз деяких психологічних показників.

Приймання багатьох фінансових рішень спирається на те, яка реальна вартість наявних активів. Наприклад, при вирішенні питання про те, чи варто інвестувати кошти на придбання цінних паперів (акцій або облігацій) або краще вкласти їх в який-небудь реальний бізнес, варто зіставити майбутні витрати в рамках усіх доступних інвестиційних можливостей.

Існує безліч інших ситуацій, у яких потрібно визначити вартість активів. Можна сказати, що здатність керувати вартістю – найважливіший елемент корпоративної стратегії, яка збагачує акціонерів і підтримує переваги компанії на ринку.

Визначенню реальної вартості компанії належить друге місце серед трьох основних принципів, на які спирається економічна теорія (інші два – це вартість грошей у часі та управління ризиком). Оцінка компанії, а конкретніше її активів, – це основний фактор при ухваленні багатьох фінансових рішень. Для сфери бізнесу апріорі передбачається, що одним з основних завдань менеджментує максимізація вартості капіталу корпорації (що призведе до збільшення добробуту акціонерів). Так само і для домогосподарств багато фінансових питань можуть бути вирішені на підставі вибору такого альтернативного рішення, яке призведе до збільшення вартості їх майна.

Компанії та активи можна оцінити, користуючись одним із таких методів [86]:

Перший метод – оцінка, заснована на активах (скільки коштують нині активи, які належать фірмі). Існують два способи оцінки активів. Один з них заснований на ліквідаційної вартості, коли з'ясовується, скільки ринок готовий заплатити за активи, якби вони піддалися ліквідації сьогодні. Другий спосіб полягає у визначенні вартості заміщення, коли оцінюється, у скільки сьогодні обійдеться відтворення або заміна активів компанії.

Другий метод – оцінка, заснована на дисконтуванні грошових потоків з метою визначення вартості власного капіталу або компанії в цілому. Грошові потоки можуть бути дисконтовані за вартістю залучення капіталу. Грошові потоки на власний капітал можна визначити як дивіденди. Єдиний вид доходу, який виплачують або може бути виплачений у майбутньому за акції компанії, – це дивіденд. Отже, попит на акції будь-якого емітента пояснюється можливостями отримання за ними дивідендів у майбутньому.

Третій – метод порівняльної оцінки (зіставлення активів – аналогів) шляхом визначення мультиплікаторів.

Четвертий метод – оцінка опціону (оцінка умовних вимог).

Основний фактор, що лежить в основі методики оцінки активів, – це визначення його вартості з урахуванням інформації за тими порівнюваними активами, ринкова ціна яких відома. Відповідно до закону єдиної ціни вартість усіх рівноцінних, еквівалентних активів повинна бути однаковою.

Базисна, фундаментальна вартість активу визначається як ціна, яку повинні заплатити за нього добре обізнані інвестори на ринку, де діють закони вільної конкуренції. Ринкова вартість активів і їхня базова ціна можуть не збігатися.

Фінансові аналітики якраз і займаються тим, що аналізують перспективи розвитку різних фірм і надають рекомендації про те, які цінні папери слід купувати або продавати залежно від того, чи є їхній курс відповідно зниженням або завищеним у порівнянні з їхньою базисної вартістю. Однак у початковій стадії ухвалення більшості фінансових рішень логічно припустити, які ціни активів, які купують і продають на конкурентному ринку, точно відповідають їхній базисній вартості [68].

Розглянемо *модель вирівнювання цін економічних об'єктів,* та її розв'язок чисельним методом.

q – рівень активу;

s – пропозиція;

d – попит;

p – ціна.

Зміна рівня активу q' пропорційна різниці між пропозицією і попитом:

$$q' = k(s-d),\ k > 0. \tag{1.19}$$

Зміна ціни p' пропорційна відхиленню активу q від деякого фіксованого рівня q_0, тобто:

$$p' = -m(q-q_0),\ m > 0. \tag{1.20}$$

Модель вирівнювання цін за рівнем активу є такою:

$$\frac{dq}{dt} = k(s_{(p)} - d_{(p)}), \tag{1.21}$$

$$\frac{dp}{dt} = -m(q - q_0) = m(q_0 - q). \tag{1.22}$$

Залежність пропозиції та попиту від ціни має вигляд

$$\begin{aligned} s_{(p)} &= ap + s_0; \\ d_{(p)} &= cp + d_0. \end{aligned} \tag{1.23}$$

Для значень k=0,3; m=0,1; q_0=20; a=*20;* s_0=10; d_0=50; c=–10.

Початкові умови: $q_{(0)}$=19, $p_{(0)}$=2.

Розв'язок:

$$\begin{cases} \dfrac{dq}{dt} = 0,3 \cdot \left[(20 \cdot p + 10) - (-10 \cdot p + 50)\right]; \\ \dfrac{dp}{dt} = 0,1 \cdot (20 - q); \end{cases} \tag{1.24}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dq}{dt} = 9 \cdot p - 12; \\ \dfrac{dp}{dt} = 2 - 0,1 \cdot q; \end{cases} \tag{1.25}$$

$$q_{(0)} = 19,\ p_{(0)} = 2,\ \Delta t. \tag{1.26}$$

Вирази (1.25) – система лінійних диференціальних рівнянь, які мають початкові умови (1.26).

Розв'язування диференціальних рівнянь (1.25) *<u>чисельним методом</u>* для Δt проведено за допомогою системи комп'ютерної алгебри MathCad, отримаємо:

Given

$q'(t) - 9 \cdot p(t) + 12 = 0$

$p'(t) + 0.1 \cdot q(t) - 2 = 0$

$q(0) = 19;\ p(0) = 2$

$$\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} := Odesolve\left[\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}, t, 100\right];$$

$$t := 0.025..100$$

Графічно розв’язок відображено на рис. 1.4 і 1.5.

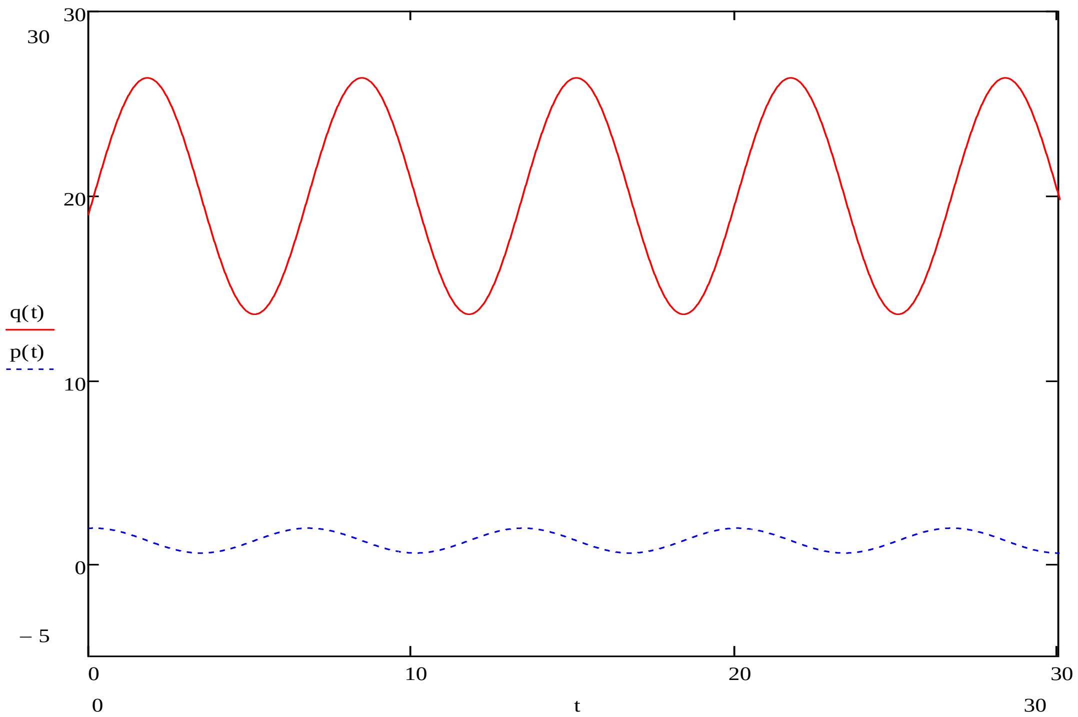

Рис. 1.4. Результат моделювання вирівнювання цін економічних об’єктів (чисельним методом).

На рисунку видно, що ціна та актив коливаються поблизу стаціонарного стану.

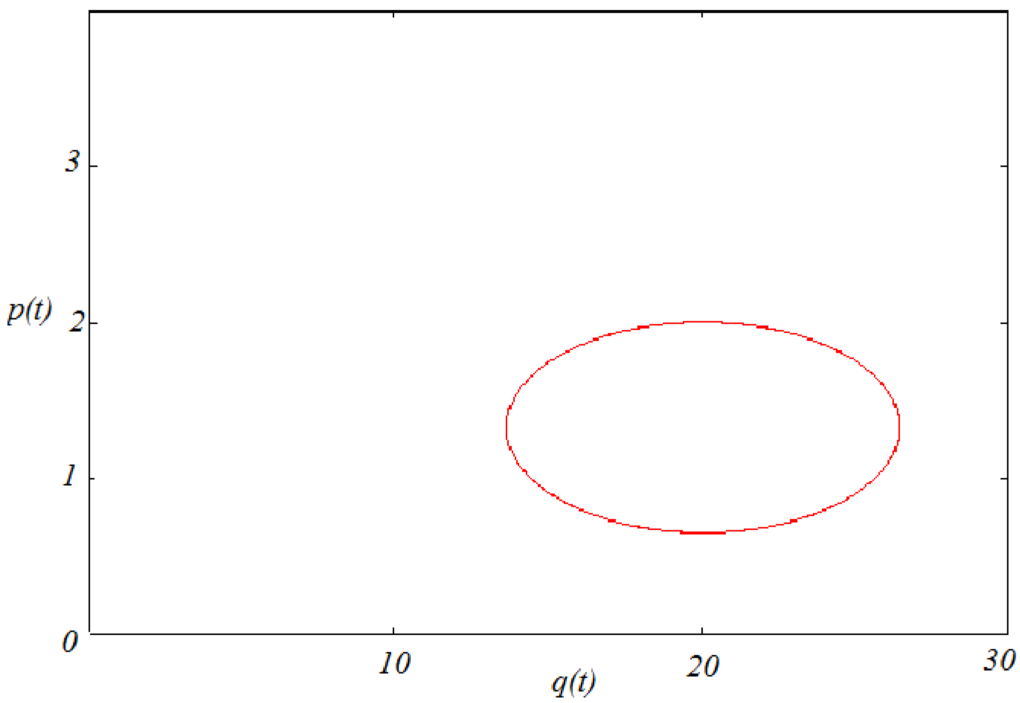

Рис. 1.5. Результат моделювання вирівнювання цін економічних об’єктів (чисельним методом) – фазова крива.

Отже, як видно із наведегих рисунків, фазова траєкторія являє собою еліпс, що оточує стаціонарну точку. Це означає, що коливання ціни та активу гармонічні.

Висновки до розділу 1

В умовах безперервного науково-технічного прогресу та інтенсифікації взаємодії між елементами економічних систем усе більшу роль у формуванні тенденцій і закономірностей відіграє фактор часу. Це привело до необхідності розроблення і використання у прогнозуванні та управлінні економічними процесами моделей особливого типу, які в науковій літературі отримали назву «динамічні моделі». Ці моделі відображають характер часових змін у системах, які розглядаються, включаючи структурні зміни, що в них відбуваються, особливості та інтенсивність взаємодії між їхніми елементами. До них відносять різноманітні види моделей, що використовують апарат теорії звичайних диференціальних рівнянь.

Перший розділ присвячується моделям економічної динаміки, побудованих на основі положень звичайних диференціальних рівнянь. Визначається важлива роль фактору часу в економіці та в економічних процесах, розглядаються можливі варіанти залежності економічних показників від часу, включаючи залежності, що випливають з теорії економічних циклів.

Для вивчення закономірностей розвитку економіки, соціальних процесів широко використовується економіко-математична модель. Вона являє собою систему формалізованих співвідношень, що описують основні взаємозв'язки елементів, що утворюють економічну систему.

Використання математичного апарату для опису моделей пов'язане з перевагами математичного підходу до багатостадійних процесів опрацювання інформації, використанням ідентичних засобів формування завдань, пошуку методів їх вирішення, фіксації цих методів і їх перетворення у програми, розраховані на застосування засобів обчислювальної техніки.

Для дослідження тих чи інших економічних явищ і узагальнення висновків варто вміти правильно використовувати математичні методи і моделі. Використання математики в економіці допомагає виділити і описати за допомогою формул найбільш важливі зв'язки між економічними змінними та об'єктами.

Головною метою розроблення і дослідження є з'ясування, послідовне обґрунтування основних, найсуттєвіших показників, а також складання математичної моделі на основі проведених досліджень. Модель дає змогу абстрактно і спрощено відображати реальний економічний процес у формі рівнянь і графіків. Математичні методи дозволяють отримати нові знання про досліджуваний об'єкт (оцінка його форми, характер залежностей між його змінними).

Динамічні економічні процеси характерезуються зміною факторів виробництва і послуг у часі. Такі процеси описуються рівняннями, які містять похідні або диференціали. У таких рівняннях існує не лише залежність змінних величин від часу, а й їхній взаємозв'язок.

Список використаних джерел до розділу 1

1. Алле М. Условия эффективности в экономике / М. Алле. – М. : Наука для общества, 1998. – 304 с.
2. Амелькин В. В. Дифференциальные уравнения в приложениях / В. В. Амелькин. – М. : Едиториал УРСС, 2003. – 208 с.
3. Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения / В. И. Арнольд. – М. : Наука, 1971. – 240 с.
4. Аронович А. Б. Сборник задач по исследованию операций / А. Б. Аронович, М. Ю. Афанасьев, Б. П. Суворов. – М. : Изд-во Москов. гос. ун-та, 1997.
5. Базилевич В. Д. Історія економічних учень: Підручник: У 2 ч. – Ч. 1 / За ред. В. Д. Базилевича. – К.: Знання, 2006. – 582 с.
6. Базилевич В. Д. Історія економічних учень: Підручник: У 2 ч. – Ч. 2 / За ред. В. Д. Базилевича. – К.: Знання, 2006. – 575 с.
7. Бандура О. В. Деякі аспекти аналізу макроекономічної динаміки: ресурсна (енергетична) модель економічного циклу / О. В. Бандура. – Миколаїв : ІЛЛІОН, 2004.
8. Бартенев С. А. Экономические теории и школы (история и современность): Курс лекций. – М.: Изд-во БЕК, 1996. – 352 с.
9. Бахвалов Н. С. Численные метода / Н. С. Бахвалов. – М. : Наука, 1973. – 632 с.
10. Блауг М. 100 великих экономистов до Кейнса: Пер. с англ. – СПб. : Экономическая школа, 2008. – 352 с.

11. Блауг М. Економічна теорія в ретроспективі: Пер. з англ. – К.: Вид-во Соломії Павличко «Основи», 2001. – 670 с.

12. Богатов О. И., Рейтинговое управление экономическими системами / О. И. Богатов, Ю. Г. Лысенко, В. Л. Петренко, В. Г. Скобелев. – Донецк : Юго-Восток, 1999. – 110 с.

13. Боглаев Ю. И. Вычислительная математика и программирование / Ю. И. Боглаев. – М. : Высш. школа, 990. – 544 с.

14. Болотіна Є. В. Економічна історія: Методичний посібник до вивчення курсу: Навч. посібник. – К.: Центр навчальної літератури, 2006. – 120 с.

15. Боярчук А. К. Справочное пособие по высшей математике / А. К. Боярчук, Г. П. Головач. – М. : Едиториал УРСС, 2001. – Т. 5 : Дифференциальные уравнения в примерах и задачах – 384 с.

16. Брігхем Е. Основи фінансового менеджменту : пер. з англ / Е. Брігхем. – К. : Молодь, 1997. – 1000 с.

17. Бродель Ф. Матеріальна цивілізація, економіка і капіталізм, XV–XVIII ст. – Т. 2: Ігри обміну. – К.: Основи, 1997. – 585 с.

18. Вентцель Е. С. Исследование операций / Е. С. Вентцель. – М. : Сов. радио, 1972.

19. Вербова О. Економічна історія: Навч. посібник. – Львів: ЛА «Піраміда», 2002. – 387 с.

20. Волков Е. А. Численные метода / Е. А. Волков. – М. : Наука, 1982. – 256 с.

21. Гаврилюк І. П. Методи обчислень, / І. П. Гаврилюк, В. Л. Макаров. – К. : Виша школа, 1995. – Ч. 1.

22. Гранберг А. Г. Динамические модели народного хозяйства : учеб. пособие / А. Г. Гранберг. – М. : Зкономика, 1985.

23. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости / Б. П. Демидович. – М. : Изд-во МГУ, 1998. – 480 с.

24. Дж. Моццера Исследование операций : в 2 т. / под ред. Дж. Моццера, С. Эл-маграби. – М. : Мир, 1981.

25. Дьяконов В. П. Maple 9.5/10 в математике, физике и образовании / В. П. Дьяконов. – М. : СОЛОН-Пресс, 2006. – 720 с.
26. Егоров А. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения с приложениями / А. И. Егоров. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 384 с.
27. Єлейко В. Основи економетрії : у 2 ч. / В. Єлейко. – Львів : Марка ЛТД, 1995.
28. Журавлев С. Г. Дифференциальные уравнения: примеры и задачи экономики, экологии и других социальных наук / С. Г. Журавлев, В. В. Аниковский. – М. : Экзамен, 2005. – 128 с.
29. Здрок В. В. Прикладна економетрія : навч. посібник : у 2 ч. / В. В. Здрок. – Львів : Вид. центр ЛНУ імені Івана Франка, 2004. – Ч. I : Симультативні моделі.
30. Злупко С. М. Економічна історія України: Навч. посібник. – К.: Знання, 2006. – 367 с.
31. Злупко С. М. Історія економічної теорії: Підручник. – К.: Знання, 2005. – 719 с.
32. Злупко С. М. Персоналії і теорії української економічної думки. – Львів: Євросвіт, 2002. – 528 с.
33. История экономических учений: Учеб. пособие / Под ред. В. Автономова, О. Ананьина, Н. Макашевой. – М.: ИНФРА-М, 2000. – 784 с.
34. Калиткин Н. Н. Численные методы / Н. Н. Калиткин. – М. : Наука, 1972. – 512 с.
35. Кашникова Т. В., Костенко Е. П. История экономики: Учебник. – Ростов н/Д: Феникс, 2006. – 512 с.
36. Клебанова Т. С. Моделирование экономической динамики : учеб. пособие / Т. С. Клебанова, Н. А. Дубровина, О. Ю. Полякова, Е. В. Раевнева и др. – 2-е изд., стереотип. – Харьков : Изд. дом «ИНЖЗК», 2005.
37. Кобринский Н. Е. Экономическая кибернетика / Н. Е. Кобринский, Е. З. Майминас, А. Д. Смирнов. – М. : Экономика, 1982.

38. Ковальчук В. М., Лазарович М. В., Сарай М. І. Історія економіки та економічної думки: Навч. посібник. – К.: Знання, 2008. – 647 с.
39. Ковальчук В. М., Лі Цзе Гао, Останкова Л. А. Світова економіка: її історія та дослідники: Навч. посібник. – К.: Центр учбової літератури, 2011. – 524 с.
40. Козицький В. А., Основи математичної економіки. Теорія фірми : навч. посібник / В. А. Козицький, С. П. Лавренюк, Н. О. Олісневич. – Львів : Піраміда, 2005.
41. Козлова А. І. Економічна історія: Навч. посібник. – К.: ДП «Вид. дім «Персонал», 2009. – 342 с.
42. Колемаев В. А. Математическая экономика / В. А. Колемаев. – М. : ЮНИТИ, 2002. – 400 с.
43. Колемаев В. А. Математическая экономика : учебник для вузов / В. А. Колемаев. – М. : ЮНИТИ, 1998. – 240 с.
44. Копченова Н. В. Вычислительная математика впримерах и задачах / Н. В. Копченова, И. А. Марон. – М. : Наука, 1972. – 368 с.
45. Корнійчук Л. Я. Історія економічних учень: Підручник: / Л. Я. Корнійчук, Н. О. Татаренко, А. М. Поручник та ін.; За ред. Л. Я. Корнійчук, Н. О. Татаренко. – К.: КНЕУ, 2001. – 564 с.
46. Корольов О. А. Економетрія : навч. посібник / О. А. Корольов. – К. : Київський національний торгово-економічний університет, 2000.
47. Костіна Н. І. Фінанси: системи моделей і прогнозів : навч. посібник / Н. І. Костіна, А. А. Алексєєв, О. Д. Василик. – К. : Четверта хвиля, 1998. – 304 с.
48. Кофман А. Займемся исследованием операций / А. Кофман, Р. Фор. – М. : Мир, 1968.
49. Краснов М. Л. Вариационное исчисление. Задачи и примеры с подробными решениями / М. Л. Краснов, Г. И. Макаренко, А. И. Киселев. – М. : УРСС, 2002. – 176 с.

50. Кривошея С. А. Диференціальні та інтегральні рівняння / С. А. Кривошея, М. О. Перестюк, В. М. Бурим. – К. : Либідь, 2004. – 408 с.

51. Крышов В. И. Вычислительные метода высшей математики : в 2-х т. / В. И. Крышов, В. В. Бобков, П. Н. Монастырный. – Минск : Вышэйшая школа, 1972. – Т. 1. – 304 с. ; Т. 2. – 400 с.

52. Кузнецов А. В. Высшая математика. Математическое программирование / А. В. Кузнецов, В. А. Сакович, Н. И. Холод. – Минск : Виш. шк., 1994.

53. Кузьменко, В. І. Вступ до методу скінченних елементів / В. І. Кузьменко. – Д. : ДНУ, 2002. – 84 с.

54. Леоненко П. М., Юхименко П. І. Економічна історія: Навч. посібник. – К.: Знання-Прес, 2004. – 499 с.

55. Лісовицький В. М. Історія економічних вчень: Навч. посібник. – К. : Центр навчальної літератури, 2004. – 220 с.

56. Лортикян Э. Л. История экономики и экономической мысли Украины. Эволюция рыночной экономики. – Харьков: Консум, 2004. – 360 с.

57. Лысенко Ю. Г. Экономическая динамика : учеб. пособие / Ю. Г. Лысенко, В. Л. Петренко и др. – Донецк : ДонГУ, 2000.

58. Майбурд Е. М. Введение в историю экономической мысли. От пророков до профессоров. – М.: Дело, 2000. – 560 с.

59. Мак-Кракей Д. Численные методы и программирование на Фортране / Д. Мак-Кракей, У. Дорн. – М. : Мир, 1977. – 580 с.

60. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики / Г. И. Марчук. – М. : Наука, 1989. – 608 с.

61. Марюта А. Н. Статистические методи и модели в зкономике / А. Н. Марюта, Н. Е. Бойцун. – Днепропетровск : Пороги, 2002.

62. Мочерний С. В., Довбенко М. В. Історія економічних вчень (Сучасна економічна думка): Навч. посібник. – Львів: Новий Світ-2000, 2004. – 480 с.

63. Панчишин С. М. Макроекономіка : навч. посібник / С. М. Панчишин. – К. : Либідь, 2001.

64. Пономарев К. К. Составление и решение дифференциальных уравнений / К. К. Пономарев. – Минск : Выш. школа, 1973. – 560 с.
65. Поплавська Ж. Історія економічних вчень: Навч. посібник. – Львів: Вид-во Національного університету «Львівська політехніка», 2006. – 224 с.
66. Проскурін П. В. Історія економіки та економічних учень: Нариси економічної історії індустріальної цивілізації: Навч. посібник. – К.: КНЕУ, 2005. – 372 с.
67. Рябушкина Т. В. Статистические методи анализа экономической динамики / под ред. Т. В. Рябушкина, А. А. Френкеля. – М. : Наука, 1983.
68. Самарский А. А. Введение в численные методьх / А. А. Самарский. – М. : Наука, 1987. – 288 с.
69. Самарский А. А. Численные методы / А. А. Самарский, А. В. Гулин. – М. : Наука, 1989.
70. Самарский А. А. Численные методы математической физики / А. А. Самарский, А. В. Гулин. – М. : Наука, 2003. – 316 с.
71. Самойленко А. М. Диференціальні рівняння / А. М. Самойленко, М. О. Перестюк, І. О. Парасюк. – К. : Либідь, 2003. – 600 с.
72. Степаненко С. В. Історія економіки та економічної думки: Курс лекцій / Авт. кол.: С. В. Степаненко, В. М. Фещенко, С. Н. Антонюк, Н. О. Тимочко та ін. – К.: КНЕУ, 2006. – 664 с.
73. Тараненко О. С. Історія економічних вчень: Навч. посіб. для дистанційного навчання. – К.: Університет «Україна», 2007. – 302 с.
74. Тимошина Т.М. Экономическая история зарубежных стран: Учеб. пособие. – М.: Юридический Дом «Юстицинформ» 2003. – 496 с.
75. Тихонов А. Н. Дифференциальные уравнения / А. Н. Тихонов, А. Б. Васильева, А. Г. Свешников. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 256 с.
76. Фельдман А. П. Чисельні методи в інформатиці / А. П. Фельдман, А. І. Петренко, О. А. Дмитрієва. – К. : ВНЗ, 2006. – 480 с.
77. Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям / А. Ф. Филиппов. – Ижевск : НИЦ «РХД», 2000. – 176 с.

78. Хикс Дж. Стоимость и капитал : пер. с англ. / Дж. Хикс ; общ. ред. и вступ. ст. Р. М. Энтова. – М. : Прогресс, 1993. – 488 с.

79. Холод Н. И. Экономико-математические методы и модели : учеб. пособие / Н. И. Холод ; под общ. ред. А. В. Кузнецова. – Минск : БГЭУ, 1999. – 413 с.

80. Хохлов А. В. История экономических учений: Учеб. пособие. – М.: Эксмо, 2008. – 448 с.

81. Черкашина Н. К. Економічна історія: Навч. посібник. – К.: ЦУЛ, 2002. – 193 с.

82. Чухно А. А., Юхименко П. І., Леоненко П. М. Сучасні економічні теорії: Підручник. – К. : Знання, 2007. – 878 с.

83. Шевченко О. О. Історія економіки та економічної думки: сучасні економічні теорії: Навч. посібник. – К.: Центр учбової літератури, 2012. – 288 с.

84. Шелобаев С. И. Математические методы и модели в экономике,финансах, бизнесе : учеб. пособие для вузов / С. И. Шелобаев. – М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2000. – 367 с.

85. Шкіль М. І. Диференціальні рівняння / М. І. Шкіль, В. М. Лейфура, П. Ф. Самусенко. – К. : Техніка, 2003. – 368 с.

86. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление / Л. Э. Эльсгольц. – М. : Наука, 1965. – 424 с.

87. Эрроусмит Д. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями / Д. Эрроусмит, К. Плейс. – М. : Мир, 1986. – 243 с.

88. Юданов А. Ю. Конкуренция: теория и практика / А. Ю. Юданов. – М. : ГНОМ и Д., 2001. – 142 с.

89. Юхименко П. І. Економічна історія: Навч. посібник. – К.: Вікар, 2006. – 341 с.

90. Юхименко П. І., Леоненко П. М. Економічна історія: Підручник. – К.: Знання-Прес, 2008. – 567 с.

91. Ядгаров Я. С. История экономических учений: Учебник. – М.: Инфра-М, 2008. – 480 с.

92. Ястремський О. І. Основи мікроекономіки : підручник / О. І. Ястремський, О. Г. Гриценко. – К. : Знання, 1998. – 784 с.

93. Braun M. Differential equations and their applications. – 3rd ed. / Braun Martin. – New York : Springer-Verlag, 1983. – 546, [11] p. – (Applied Mathematical Sciences; v. 15). – ISBN0-387-90806-4.

94. Chicone C. Ordinary differential equations with applications / Chicone Carmen. – New York : Springer-Verlag, 1999. – XV. – 562 p. – (Texts in applied mathematics; 34). – ISBN 0-387-98535-2.

95. Patinkin D. Money, interest, and prices: an integration of monetary and value theory / D. Patinkin. – 2nd ed. – New York, 1965. – 708 p.

РОЗДІЛ 2
ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПЕРІОДИЧНИХ ПРОЦЕСІВ В ЕКОНОМІЦІ

2.1. Моделювання періодичних процесів в економіці з використанням апарату кінцево-різницевих рівнянь

У теперішній час є підвищений інтерес до складних дискретних систем, більшість з яких є нелінійними. Для їхнього адекватного опису потрібні нові, порівняно з добре розвинутими методами лінійного аналізу методи моделювання.

Нелінійна динаміка (англійський термін *nonlinear science* – нелінійна наука) фокусує свою увагу на нових типах поведінки в нелінійних системах, а саме динамічному хаосі – виникненні нерегулярних рухів у детермінованих системах, у яких без джерел випадкових шумів можливі складні незавбачувані рухи.

Нелінійні різницеві рівняння часто трапляються при дослідженні і моделюванні різних прикладних завдань у техніці, економіці, соціології, демографії та інших дисциплінах. У математиці нелінійні різницеві рівняння з'являються, зокрема, при аналізі збіжності різних ітераційних процесів [37; 38; 39; 42].

У теорії різницевих рівнянь передбачається, що показники економічного процесу, які досліджують, визначені в дискретні моменти часу.

Доцільність такого розгляду визначається вихідними даними про економічний процес, які часто вимірюються в дискретні моменти часу (офіційна статистика, періодичні опитування, переписи тощо). Інтервалом часу може бути п'ятирічка, рік, квартал, місяць, тиждень тощо.

Якщо інтервал часу стає нескінченно малим, то процес розглядають як неперервний і його вивчають за допомогою теорії диференціальних рівнянь.

Поведінка системи в дискретному часі визначається за допомогою різницевого рівняння, яке пов'язує значення економічного показника, що досліджується, у сусідні моменти часу.

Різницеві рівняння

При моделюванні економічних процесів часто використовують рівняння

$$x_i = F(x_{i-1}, x_{i-2}, ..., x_{i-n}), \tag{2.1}$$

де величина x_t у будь-який момент часу $t_i = i\Delta t,\ i = n+1,\ n+2,\ ...$ залежить від її значень у попередні n моментів часу $t_{i-1}, t_{i-2}, ..., t_{i-n}$. Таке рівняння є різницевим, або рекурентним, рівнянням n-го порядку.

Розв'язком різницевого рівняння є послідовність $x_k (k = 0, 1, 2, ...)$, яка перетворює його в тотожність. Розв'язок рівняння (2.1) знаходиться, якщо задати n так званих початкових умов, наприклад, $x_0, x_1, ..., x_{n-1}$. Підставляючи початкові умови у праву частину рівняння (2.1), знаходимо x_n, потім, використовуючи значення, знаходимо x_{n+1}, x_{n+2} і т. д. [38]

Рівняння

$$x_t = a_1 x_{t-1} + a_2 x_{t-2} + ... + a_n x_{t-n} + a_0(t), \tag{2.2}$$

де $a_1, a_2, ..., a_n$ – сталі коефіцієнти, є *лінійним різницевим рівнянням n-го порядку зі сталими коефіцієнтами*. Рівняння називається *однорідним*, якщо $a_0(t) \equiv 0,$ і *неоднорідним* у іншому випадку.

У теорії різницевих рівнянь доводять, що загальний розв'язок рівняння (2.2) дорівнює сумі загального розв'язку відповідного однорідного рівняння

$$x_t = a_1 x_{t-1} + a_2 x_{t-2} + ... + a_n x_{t-n},$$

і будь якого частинного розв'язку неоднорідного рівняння (2.2).

Лінійні рівняння першого порядку

Рівняння

$$x_t = a x_{t-1} + a_0(t),\ t = 1, 2, ... \tag{2.3}$$

називається лінійним різницевим рівнянням першого порядку. Загальний розв'язок однорідного рівняння

$$x_t = ax_{t-1}$$

– це геометрична прогресія

$$x_t = Ca^t,$$

де C – довільна стала. Можливі такі варіанти:

$0 < a < 1,$ – x_t монотонно спадає;

$a > 1,$ – x_t монотонно зростає;

$-1 < a < 0,$ – x_t почергово змінює знак, $|x_t|$ монотонно спадає;

$a < -1,$ – x_t почергово змінює знак, $|x_t|$ монотонно зростає;

$a = 1$ – $x_t = C$;

$a = -1$ – x_t має вигляд коливання,

$$x_t = \begin{cases} C, \ t = 0,\ 2,\ ...,\ 2n,\ ... \\ -C, \ t = 1,\ 3,\ ..,\ 2n+1,\ ... \end{cases}$$

Розв'язування неоднорідного рівняння

Розглянемо два характерні варіанти.

1. Якщо $a_0 = const$ і $a \neq 1,$ то частинний розв'язок неоднорідного рівняння

$$x_t = ax_{t-1} + a_0$$

шукаємо у формі сталої

$$x_{nh} = C_0.$$

Після підстановки в рівняння матимемо $C_0 = aC_0 + a_0,$

або

$$C_0 = \frac{a_0}{1-a},$$

$$x_{nh} = \frac{a_0}{1-a}.$$

Якщо a=1, то частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо так:

$$x_{tnh} = C_0 t.$$

Після підстановки в рівняння матимемо

$$C_0 t = C_0 (t-1) + a_0,$$

$$C_0 = a_0,$$

$$x_{nh} = a_0 t.$$

2. Якщо різницеве рівняння є таким:

$$x_t = a x_{t-1} + a_0 d^t,$$

то в разі, якщо $a \neq d$, частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо так:

$$x_{nh} = C_0 d^t.$$

Після підстановки в рівняння матимемо

$$C_0 d^t = a C_0 d^{t-1} + a_0 d^t,$$

$$C_0 = \frac{a_0 d}{d-a},$$

$$x_{nh} = \frac{a_0}{d-a} d^{t+1}.$$

Лінійні різницеві рівняння другого порядку

Лінійне різницеве рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами записуємо так:

$$x_t = a_1 x_{t-1} + a_2 x_{t-2} + a_0,\ t = 2, 3, \ldots. \tag{2.4}$$

Розв'язок однорідного рівняння

$$x_t = a_1 x_{t-1} + a_2 x_{t-2} \tag{2.5}$$

шукаємо у формі $x_t = \lambda^t$. Підстановки $x_t = \lambda^t, x_{t-1} = \lambda^{t-1}, x_{t-2} = \lambda^{t-2}$ у рівняння (2.5) дають так зване *характеристичне рівняння* для визначення λ:

$$\lambda^2 - a_1 \lambda - a_2 = 0. \tag{2.6}$$

Позначимо його корені λ_1, λ_2, де

$$\lambda_{1,2}=\frac{a_1\pm\sqrt{D}}{2},\qquad(2.7)$$
$$D=a_1^2+4a_2.$$

У теорії різницевих рівнянь доводимо, що загальний розв'язок рівняння (2.5) є таким

$$x_t=A_1\lambda_1^t+A_2\lambda_2^t,\quad \textit{якщо}\ \lambda_1\neq\lambda_2,$$
$$x_t=\left(A_1+A_2t\right)\lambda^t,\ \textit{якщо}\ \lambda_1=\lambda_2,$$

де A_1, A_2 – довільні сталі.

Розв'язки рівняння (2.6) λ_1, λ_2, залежать від дискримінанта D.

Можливими є такі три варіанти:

1) D>0, λ_1 і λ_2 – дійсні і різні, загальний розв'язок знаходимо за формулою

$$x_t=A_1\lambda_1^t+A_2\lambda_2^t.\qquad(2.8)$$

2) D=0, характеристичне рівняння має однакові корені λ_1=λ_2 тоді

$$x_t=(A_1+A_2t)\lambda^t.\ x_t=\left(A_1+A_2t\right)\lambda^t.\qquad(2.9)$$

3) D>0, λ_1 і λ_2 – комплексно спряжені

$$\lambda_{1,2}=\alpha\pm i\beta,$$

де

$$\alpha=\frac{a_1}{2},\ \beta=\sqrt{-D},\ \ i^2=-1,$$

або, користуючись тригонометричною формою комплексного числа [8; 9; 43; 44],

$$\lambda_{1,2}=\rho\left(\cos\omega\pm i\sin\omega\right),$$
$$\rho=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=\sqrt{-a_2},$$
$$tg\omega=\beta/\alpha.$$

Розв'язок рівняння (2.5) знаходиться за формулою

$$x_t=\rho^t\left(B_1\cos\omega t\pm B_2\sin\omega t\right),\qquad(2.10)$$

де B_1, B_2 – довільні сталі.

Таким чином, якщо D>0, то розв'язок має характер коливань, амплітуда яких зростає, якщо ρ>1 або спадає, якщо ρ<1. За ρ=1 будемо мати чисто коливальний режим поведінки розв'язків.

Розв'язування неоднорідного рівняння

Якщо $\lambda_1 \neq 1$ і $\lambda_2 \neq 1$то частинний розв'язок неоднорідного рівняння

$$x_t = a_1 x_{t-1} + a_2 x_{t-2} + a_0$$

шукаємо у формі сталої $x_{nh}=C_0$. Після підстановки в рівняння матимемо

$$C_0 = \frac{a_0}{1 - a_1 - a_2}.$$

Якщо тільки один із коренів характеристичного дорівнює одиниці, $\lambda_1 = 1$ або $\lambda_2 = 1$ (у цьому разі, очевидно, $1 - a_1 - a_2 = 0$), то частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо так

$$x_{nh} = C_0 t.$$

Після підстановки в рівняння матимемо

$$C_0 = \frac{a_0}{a_1 + 2a_2}.$$

Отже,

$$x_{tnh} = \frac{a_0}{a_1 + 2a_2} t.$$

Приклад. Розв'язати рівняння

$$x_t = 2x_{t-1} - 0.99 x_{t-2} + 1,\ x_0 = 1,\ x_1 = 2.$$

Розв'язок. Корені характеристичного рівняння $\lambda^2 - 2\lambda + 0,99 = 0$ дійсні: $\lambda_1 = 0,9,\ \lambda_2 = 1,1.$ Тому загальний розв'язок однорідного рівняння є таким

$$x_{Gt} = C_1 (0,9)^t + C_2 (1,1)^t.$$

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у формі сталої $x_t = \bar{x}$. Підставляючи $x_t = \bar{x}$ у вихідне рівняння, одержимо

$$\bar{x} = 2\bar{x} - 0,99\bar{x} + 1,\ \bar{x} = -100.$$

Сталі C_1, C_2 визначаємо з початкових умов x_0=1 x_1=2. Тоді

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 101 \\ 0{,}9C_1 + 1{,}1C_2 = 102, \end{cases} \text{звідси} \quad C_1 = \frac{91}{2},\ C_2 = \frac{111}{2}.$$

Приклад. Розв'язати рівняння

$$x_t = -2x_{t-1} - 2x_{t-2} + 5,\ x_0 = 1,\ x_1 = 2.$$

Розв'язок. Корені характеристичного рівняння $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$ комплексні:

$$\lambda_{1,2} = -1 \pm i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} \pm i\sin\frac{3\pi}{4}\right).$$

Тому загальний розв'язок однорідного рівняння

$$x_{Gt} = 2^{\frac{t}{2}}\left(C_1\cos\frac{3\pi}{4}t + C_2\sin\frac{3\pi}{4}t\right).$$

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у формі сталої $x_t = \bar{x}$. Підставляючи цей вираз у наше рівняння, одержимо $\bar{x} = 1$. Загальний розв'язок рівняння:

$$x_t = 2^{\frac{t}{2}}\left(C_1\cos\frac{3\pi}{4}t + C_2\sin\frac{3\pi}{4}t\right) + 1.$$

Сталі C_1, C_2 визначаємо з початкових умов x_0=1, x_1=2:

$$\begin{cases} C_1 + 0\cdot C_2 + 1 = 1 \\ \sqrt{2}\left(C_1\cos\frac{3\pi}{4} + C_2\sin\frac{3\pi}{4}\right) + 1. \end{cases}$$

Звідси C_1=0, C_2=1 і $x_t = 2^{\frac{t}{2}}\sin\frac{3\pi}{4}t + 1.$

Приклад. Розв'язати рівняння

$$x_t = -2x_{t-1} - x_{t-2} + 4,\ x_0 = 1,\ x_1 = 2.$$

Розв'язок. Характеристичне рівняння $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$ має кратний корінь $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$. Тому загальний розв'язок однорідного рівняння записуємо так:

$$x_{Gt} = (-1)^t(C_1 + C_2 t).$$

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у формі сталої $x_t = \bar{x}$. Підставляючи $x_t = \bar{x}$ в вихідне рівняння, одержимо $\bar{x} = 1.$ Таким чином, загальний розв'язок рівняння буде таким:

$$x_t = (-1)^{t+1} t + 1.$$

Зауваження. Якщо різницеве рівняння записуємо так

$$x_t = a_1 x_{t-1} + a_2 x_{t-2} + a_0 d^t,$$

то в разі, якщо корені характеристичного рівняння не є збіжними з d, тобто $\lambda_1 \neq d, \lambda_2 \neq d,$ частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо так

$$x_{tnh} = C_0 d^t.$$

Після підстановки в рівняння матимемо

$$C_0 = \frac{a_0 d^2}{d^2 - a_1 d - a_2},$$

$$x_{tnh} = \frac{a_0 d^{t+2}}{d^2 - a_1 d - a_2}.$$

Системи лінійних різницевих рівнянь другого порядку

Система лінійних різницевих рівнянь другого порядку зі сталими коефіцієнтами є такою:

$$\begin{aligned} x_t &= a_{11} x_{t-1} + a_{12} y_{t-1} + b_1 \\ y_t &= a_{21} x_{t-1} + a_{22} y_{t-1} + b_2, \end{aligned} \tag{2.11}$$

де x_t, y_t – невідомі послідовності, $a_{11}, a_{12}, b_1, a_{21}, a_{22}, b_2$ – сталі, $t = 1, 2, ...$ Така система називається однорідною, якщо $b_1 = b_2 = 0,$ і неоднорідною – в іншому варіанті.

Будемо розглядати випадок $\det A = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} \neq 0.$ Заміною невідомих

$$x_t = u_t + x_*,\ y_t = v_t + y_*,$$

де x_*, y_* – розв'язки системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$a_{11}x_* + a_{12}y_* + b_1 = 0$$
$$a_{21}x_* + a_{22}y_* + b_2 = 0,$$

вона зводиться до однорідної [4; 9; 14; 29]

$$\begin{aligned} u_t &= a_{11}u_{t-1} + a_{12}v_{t-1} \\ v_t &= a_{21}u_{t-1} + a_{22}v_{t-1}. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Її можна звести до лінійного різницевого рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами, наприклад, таким способом: запишемо перше рівняння (2.1) для моменту t+1

$$u_{t+1} = a_{11}u_t + a_{12}v_t = a_{11}u_t + a_{12}(a_{21}u_{t-1} + a_{22}v_{t-1}) = a_{11}u_t + a_{12}a_{21}u_{t-1} + a_{22}\left[u_t - a_{11}u_t\right],$$

або

$$u_{t+1} - (a_{11} + a_{22})u_t + \det A u_{t-1} = 0.$$

Це рівняння можна розв'язати описаним раніше способом і отримати u_t як $u_t = A_1\lambda_1^t + A_2\lambda_2^t$, а потім і v_t. Однак зручніше діяти таким чином:

Запишемо систему (2.2) в матричній формі

$$z_t = \begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{t-1} \\ v_{t-1} \end{pmatrix} \equiv Az_{t-1}. \tag{2.13}$$

Підстановка

$$z_t = \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} \lambda^t = e\lambda^t$$

зводить рівняння (2.13) до задачі на власні значення

$$e\lambda^t = \lambda^{e-1}Ae, \;\; Ae = \lambda e, \;\; \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = 0,$$

де λ і e – власні значення і відповідні їм вектори, або

$$\begin{cases} (\lambda - a_{11})U - a_{12}V = 0 \\ -a_{21}U + (\lambda - a_{22})V = 0. \end{cases} \tag{2.14}$$

Власні значення λ_1 і λ_2 визначаємо з характеристичного рівняння

$$\begin{vmatrix} (\lambda - a_{11}) & -a_{12} \\ -a_{21} & (\lambda - a_2) \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0. \tag{2.15}$$

Нехай корені λ_1 і λ_2 різні. Підставивши $\lambda = \lambda_1$ і $\lambda = \lambda_2$ у будь-яке з рівнянь системи (2.14), визначаємо власні вектори $e_1 = \begin{pmatrix} U_1 \\ V_1 \end{pmatrix}$ і $e_2 = \begin{pmatrix} U_2 \\ V_2 \end{pmatrix}$.

Загальний розв’язок системи знаходимо за формулою

$$z_t = C_1\lambda_1^t e_1 + C_2\lambda_2^t e_2$$

або

$$\begin{aligned} u_t &= C_1 U_1 \lambda_1^t + C_2 U_2 \lambda_2^t, \\ v_t &= C_1 V_1 \lambda_1^t + C_2 V_2 \lambda_2^t, \end{aligned} \tag{2.16}$$

де C_1, C_2 – довільні сталі.

Формулою (2.16) зручно користуватись у разі, коли λ_1 і λ_2 – дійсні числа. Якщо λ_1 і λ_2 – комплексно спряжені, $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta\lambda_{1,2} = \rho(\cos\vartheta \pm i\sin\vartheta)$,

$$\text{а } e_{1,2} = e_{\mathrm{Re}} \pm ie_{\mathrm{Im}} \equiv \begin{pmatrix} U_R \\ 0 \end{pmatrix} \pm i\begin{pmatrix} 0 \\ U_{\mathrm{Im}} \end{pmatrix},$$

то загальний розв’язок системи можна знайти за формулою

$$z_t = \rho^t\left[(C_1\cos t\vartheta + C_2\sin t\vartheta)e_{\mathrm{Re}} + (-C_1\sin t\vartheta + C_2\cos t\vartheta)e_{\mathrm{Im}}\right]$$

або

$$\begin{aligned} u_t &= \rho^t U_{\mathrm{Re}}(C_1\cos t\vartheta + C_2\sin t\vartheta) \\ v_t &= \rho^t U_{\mathrm{Im}}(-C_1\sin t\vartheta + C_2\cos t\vartheta) \end{aligned} \tag{2.17}$$

де C_1, C_2 – довільні сталі, $\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, $\cos\vartheta = \dfrac{\alpha}{\rho}$, $\sin\vartheta = \dfrac{\beta}{\rho}$.

Приклад. Розв’язати систему

$$u_t = -u_{t-1} - 2v_{t-1},\ v_t = 3u_{t-1} + 4v_{t-1}.$$

Розв’язок. Система у цьому варіанті є такою:

$$\begin{cases} (\lambda+1)U + 2V = 0 \\ -3U + (\lambda-4)V = 0. \end{cases}$$

Корені характеристичного рівняння

$$\begin{vmatrix} \lambda+1 & 2 \\ -3 & \lambda-4 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

дійсні: $\lambda_1=1$ і $\lambda_2=2$. Підставивши $\lambda_1=1$ в систему, отримаємо

$$\begin{cases} 2U_1 + 2V_1 = 0 \\ -3U_1 - 3V_1 = 0. \end{cases}$$

Друге рівняння є наслідком першого і розв'язок визначається з точністю до сталого множника $V_1 = -U_1$. Наприклад, $U_1 = 1$. Тоді $V_1 = -1$ і $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Далі підставимо в систему λ=2 і отримаємо $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$. Тому загальний розв'язок системи буде таким:

$$u_t = C_1 + C_2 2^t,$$

$$v_t = -C_1 - \frac{3}{2} C_2 2^t.$$

Приклад. Розв'язати систему

$$u_t = u_{t-1} - \sqrt{3} v_{t-1}, \; v_t = \sqrt{3} u_{t-1} + v_{t-1}.$$

Розв'язок. Системе у цьому варіанті запишемо так:

$$\begin{cases} (\lambda - 1)U - \sqrt{3}V = 0 \\ \sqrt{3}U + (\lambda - 1)V = 0. \end{cases}$$

Корені характеристичного рівняння $\lambda^2 - 2\lambda + 4 = 0$ комплексні, $\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{3}i.$

Користуючись тригонометричною формою комплексного числа $\lambda_{1,2} = \rho(\cos\vartheta \pm i \sin\vartheta),$ матимемо

$$\rho = \sqrt{1+3} = 2,$$

$$\cos\vartheta = \frac{1}{2}, \; \sin\vartheta = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\vartheta = \frac{\pi}{2}, \; \lambda_{1,2} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} \pm i \sin\frac{\pi}{3}\right).$$

Підставивши $\lambda = 1 + \sqrt{3}i$ у систему, отримаємо $V_1 = U_1 i,$ отже,

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

оскільки

$$e_{\mathrm{Re}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_{\mathrm{Im}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Аналогічно, підставивши $\lambda = 1 - \sqrt{3}i$ в систему, отримаємо $V_2 = -U_2 i$, отже $e_2 = e_1^* = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Таким чином, згідно з формулою (2.17) загальний розв'язок системи буде таким

$$u_t = 2^t \left[C_1 \cos \frac{\pi t}{3} + C_2 \sin \frac{\pi t}{3} \right],$$

$$v_t = 2^t \left[-C_1 \sin \frac{\pi t}{3} + C_2 \cos \frac{\pi t}{3} \right].$$

2.2. Моделювання періодичних процесів в економіці методом крайової задачі

Розглянемо звичайне диференціальне рівняння n-го порядку $(n \geq 2)$

$$F\left[x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)\right] = 0, \quad x \in (a,b). \tag{2.18}$$

Нехай $\{x_i\}$ – деяка множина точок з проміжку $[a, b]$; $i = \overline{0, k}$, $k \geq 1$. Будемо вважати, що $x_0=a$, $x_k=b$.

Введемо позначення: $y^{(s_i)}(x_i) = y_i^{(s_i)}$, де $s_i \leq n-1$.

Співвідношення вигляду

$$U_j\left[y(x),\, y_0,\, y_0', \ldots, y_0^{(s_0)}, \ldots, y_k, y_k', \ldots, y_k^{(s_k)} \right] = 0, \quad j = \overline{1, m}, \tag{2.19}$$

де U_j – задані функціонали, називаються *крайовими умовами*.

Розв’язок диференціального рівняння (2.18) називається *регулярним*, якщо він належить класу $\tilde{N}^{n}_{(a,b)}$, тобто за $x \in (a, b)$ він є функцією, неперервною разом із похідними до n-го порядку включно.

Задача знаходження регулярного розв’язку рівняння (2.18), котрий задовольняв би крайові умови (2.19), називається *крайовою* задачею [22; 24; 31].

У будь-якому зі співвідношень (2.19) похідні можуть мати різні порядки, проте обов’язково $s_{i,j} \le n-1$(порядок старшої похідної у крайовій умові завжди повинен бути меншим за порядок диференціального рівняння). При цьому кількість крайових умов m у крайовій задачі (2.18),(2.19) може бути довільною.

Якщо кількість точок x_i рівна $2(k–1)$, то крайову задачу рівнянь (2.18), (2.19) називають *двоточковою*; якщо $k>1,$то крайову задачу рівнянь (2.18) і (2.19) називають *багатоточковою*. Найбільш детально вивчені задачі для диференціального рівняння (2.18) другого порядку. Так, за $n=2$ частинні випадки крайових умов (2.19) визначають конкретні крайові задачі для рівняння (2.18) з уже усталеними назвами:

– першу крайову задачу

$$U_1(y) \equiv y(a) - \gamma_1 = 0, \quad U_2(y) \equiv y(b) - \gamma_2 = 0,$$

де γ_1, γ_2 – деякі сталі;

– мішану крайову задачу

$$U_1(y) \equiv y'(a) - \gamma_1 = 0, \quad U_2(y) \equiv y(b) - \gamma_2 = 0;$$

– крайову задачу Неймана

$$U_1(y) \equiv y'(a) - \gamma_1 = 0, \quad U_2(y) \equiv y'(b) - \gamma_2 = 0;$$

– періодичну крайову задачу

$$U_1(y) \equiv y(a) - y(b) = 0, \quad U_2(y) \equiv y'(a) - y'(b) = 0;$$

– крайові задачі з умовами на нескінченості

$$U_1(y) \equiv y'(a) - \gamma_1 = 0, \quad U_2(y) \equiv y(b) = \infty$$

або

$$U_1(y) \equiv y'(a) - \gamma_1 = 0, \quad U_2(y) \equiv \lim_{x\to\infty} y(x) = 0.$$

У разі довільного *n* для рівняння (2.18) відомі:

– двоточкова крайова задача з нелінійними крайовими умовами

$$U_j(y) \equiv U_j\left[y(a),\, y'(a),\, ...,\, y^{(n-1)}(a),\, y(b),\, y'(b),\, ...,\, y^{(n-1)}(b)\right] = 0, \quad j = \overline{1, n};$$

– двоточкова крайова задача з лінійними крайовими умовами

$$U_j(y) \equiv \sum_{i=0}^{n-1}\left(\alpha_{ij} y^{(i)}(a) + \beta_{ij} y^{(i)}(b)\right) = \gamma_j, \quad j = \overline{1, n},$$

де $\alpha_{ij}, \beta_{ij}, \gamma_j$ – деякі сталі;

– (k+1)-точкова крайова задача з нелінійними крайовими умовами

$$U_j(y) \equiv U_j\left[y(x_0),\, ...,\, y^{(n-1)}(x_0),\, ...,\, y(x_k),\, ...,\, y^{(n-1)}(x_k)\right] = 0, \quad j = \overline{1, n};$$

– (k+1)-точкова крайова задача з лінійними крайовими умовами

$$U_j(y) \equiv \sum_{i=0}^{n-1}\left(\alpha_{ij}^{(0)} y^{(i)}(x_0) + \alpha_{ij}^{(1)} y^{(i)}(x_1) + ... + \alpha_{ij}^{(k)} y^{(i)}(x_k)\right) = \gamma_j, \quad j = \overline{1, n},$$

де $x_0=a$, $x_k=b$, $x_1, x_2, ..., x_{k-1} \in (a, b)$;

– крайова задача Валле – Пуссена

$$U_j(y) \equiv y^{(j-1)}(x_i) = 0, \quad j = \overline{1, n_i}, \quad i = \overline{0, k}, \quad \sum_{i=0}^{k} n_i = n.$$

Якщо ж у рівнянні (2.19) прийняти $m=n$ і $k=0$ то співвідношення (2.19) вироджуються в початкові умови в точці $x_0=a$ й одержуємо задачу Коші для рівняння (2.18) [27; 32; 33]

$$\begin{aligned} &F\left[x,\, y(x),\, y'(x),\, ...,\, y^{(n)}(x)\right] = 0, \quad x \in (a, b); \\ &U_j\left[y_0,\, y_0',\, ...,\, y_0^{(s)}\right] = 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad s \le n-1. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Як відомо з теорії звичайних диференціальних рівнянь, при виконанні умов теореми існування і єдиності розв’язку задачі Коші для рівняння (2.18) розв’язок задачі (2.20) існує і є єдиним. Цього не можна стверджувати щодо крайової задачі рівнянь (2.18) і (2.19) [14; 34; 36].

Приклад. Розв’язати задачу Коші

$$y'' + y = 0, \quad y = y(x), \quad x \in (a, b); \tag{2.21}$$

$$y(a) = A, \quad y'(a) = B, \tag{2.22}$$

де A, B – задані сталі.

Розв'язок. Загальним розв'язком рівняння (2.21) є функція

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x \tag{2.23}$$

Із початкових умов (2.22) одержимо систему для визначення довільних сталих $\tilde{N}_1$ та $\tilde{N}_2$:

$$\begin{cases} y(a) \equiv C_1 \cos a + C_2 \sin a = A; \\ y'(a) \equiv -C_1 \sin a + C_2 \cos a = B. \end{cases}$$

Детермінант цієї системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos a & \sin a \\ -\sin a & \cos a \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

а отже, система має єдиний розв'язок $C_1 = A\cos a - B\sin a$, $C_2 = B\cos a + A\sin a$. Тоді задача Коші рівнянь (2.21), (2.22) також матиме єдиний розв'язок

$$y(x) = \left(A\cos a - B\sin a\right)\cos x + \left(B\cos a + A\sin a\right)\sin x = A\cos(x-a) + B\sin(x-a)$$

Приклад. Розглянемо подібну крайову задачу: знайти розв'язок рівняння (2.21), котрий задовольняв би крайові умови

$$y(a) = A, \quad y(b) = B. \tag{2.24}$$

Розв'язок. Ураховуючи, що загальний розв'язок рівняння (2.21) є рівнянням (2.23), із крайових умов (2.24) одержимо систему для визначення довільних сталих C_1 і C_2:

$$\begin{cases} y(a) \equiv C_1 \cos a + C_2 \sin a = A; \\ y(b) \equiv C_1 \cos b + C_2 \sin b = B. \end{cases} \tag{2.25}$$

Детермінант цієї системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos a & \sin a \\ \cos b & \sin b \end{vmatrix} = \sin(b-a)$$

залежно від значень a і b може бути рівним нулеві чи відмінним від нуля.

Так, наприклад, за, $a = 0,\ b = \frac{\pi}{4},\ \Delta = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0,$ крайові задачі (2.21) і (2.24) матимуть єдиний розв'язок

$$y(x) = A\cos x + \left(B\sqrt{2} - A\right)\sin x$$

Але за $a = 0,\, b = \pi$ будемо мати $\Delta = \sin\pi = 0,$ а систему (2.25) запишемо так:

$$\begin{cases} C_1 = A; \\ -C_1 = B. \end{cases}$$

Звідси очевидно: якщо $B = -A,$ то крайові задачі (2.21) і (2.24) матимуть безліч розв’язків

$$y(x) = A\cos x + \tilde{N}_2 \sin x,$$

де $\tilde{N}_2$ – довільна стала. Якщо ж $\hat{A} \neq -A,$ то задачарівнянь (2.21) і (2.24) не мають розв’язку.

Таким чином, якщо задача Коші при виконанні умов теореми існування та єдиності завжди має єдиний розв’язок, то, на відміну від неї, крайова задача може мати єдиний чи безліч розв’язків або ж не мати жодного. Зауважимо, що заміною $\xi = x - a$ проміжок $\left[a, b\right]$ завжди можна перенести на проміжок $\left[0; l\right],$ де $l = b - a.$ Розв’язки багатьох крайових задач, які описують реальні процеси (зокрема фізичних задач, де незалежною змінною виступає час), доводиться шукати, ведучи відлік від нуля. Тому, не зменшуючи загальності досліджень, можна в (2.18) і (2.19) вважати $a = 0.$

Подібно до диференціального рівняння (2.18) ставляться крайові задачі і для систем диференціальних рівнянь. Розглянемо систему диференціальних рівнянь у нормальній формі

$$\dot{x} = f(t,\, x) \quad t \in (0;\, T), \tag{2.26}$$

де $x = (x_1(t),\, x_2(t),\, ...,\, x_n(t)),$ $f = (f_1(t, x),\, f_2(t, x),\, ...,\, f_n(t, x))$ – n-вимірні вектор-функції.

Для системи (2.26) крайові умови загального вигляду можна подати співвідношеннями [16; 18; 35; 38]:

$$\begin{aligned} &U(x) \equiv \left(U_1(x) \quad U_2(x) \quad ... \quad U_n(x)\right) = 0, \\ &U_j(x) \equiv U_j\left(\, x(t),\, x(t_0),\, x(t_1),\, ...,\, x(t_k)\right), \quad j = \overline{1,\, n}, \end{aligned} \tag{2.27}$$

де U_j – задані функціонали. Якщо функціонали U_j лінійні, то крайові умови (2.27) також називаються лінійними, а у протилежному варіанті – нелінійними. Як і щодо рівняння (2.18), розрізняють дво- і багатоточкові крайові умови залежно від кількості значень t_k незалежної змінної, які входять у (2.27). Задачу знаходження частинного розв'язку системи (2.26), котрий задовольняв би задані крайові умови (2.27), називають *крайовою задачею* [23; 25; 26; 28–30].

Деякі частинні випадки крайових умов (2.27) визначають для системи (2.26) відповідні класичні крайові задачі:

– двоточкову крайову задачу з нелінійними крайовими умовами

$$U(x) \equiv \left(U_1(x(0), x(T)) \quad U_2(x(0), x(T)) \quad \dots \quad U_n(x(0), x(T))\right) = 0;$$

– двоточкову крайову задачу з лінійними крайовими умовами

$$U(x) \equiv Ax(0) + Cx(T) - \gamma = 0,$$

де A, C – сталі матриці розмірності $n \times n$, а $\gamma = \left(\gamma_1 \quad \gamma_2 \quad \dots \quad \gamma_n\right)$ – сталий вектор;

– крайову задачу Коші – Ніколетті

$$U_j(x) \equiv x_j(t_j) - \gamma_j = 0, \quad j = \overline{1, n},$$

де $0 \le t_1 \le t_2 \le \dots \le t_n = T$;

– крайову задачу інтерполяційного типу

$$U_j(x) \equiv x_1(t_j) - \gamma_j = 0, \quad j = \overline{1, n},$$

де $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = T$;

– періодичну крайову задачу

$$U_j(x) \equiv x_j(0) - x_j(T) = 0, \quad j = \overline{1, n};$$

– $(k+1)$-точкову крайову задачу з нелінійними крайовими умовами

$$U_j(x) \equiv U_j\left(x(t_0),\ x(t_1),\ \dots,\ x(t_k)\right) = 0, \quad j = \overline{1,\ n};$$

– $(k+1)$-точкову крайову задачу з лінійними крайовими умовами

$$U(x) \equiv \sum_{i=0}^{k} B_i x(t_i) - \gamma = 0,\ 0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k = T,$$

де B_i – сталі матриці розмірності $n \times n$;

– $(k+1)$-точкову крайову задачу з функціональними крайовими умовами, наприклад

$$U(x) \equiv \sum_{i=0}^{k} B_i x(t_i) + \int_0^T \rho(t) x(t) dt - \gamma = 0,$$

де $\rho(t)$ – задана неперервна функція;

– двоточкову крайову задачу з розмежованими крайовими умовами

$$U_i(x) \equiv x_i(0) - \gamma_i = 0, \quad i = \overline{1, q},$$

$$U_j(x) \equiv x_j(T) - \gamma_j = 0, \quad j = \overline{q+1, n}.$$

Очевидно, що властивості правої частини розглядуваних диференціальних рівнянь та систем і задані крайові умови значною мірою впливають на можливості конструктивної побудови наближених розв’язків або ж на дослідження розв’язку крайових задач [6; 7; 11–13].

Нехай $\vartheta_k(\tilde{o}), k = (0; n)$ – довільні неперервні при $x \in (a, b)$ функції, причому $p_0(x) \neq 0$. Вираз

$$l_n(y) \equiv \sum_{k=0}^{n} p_k(x) y^{(n-k)}(x) \tag{2.28}$$

називається *лінійним диференціальним виразом* n-го порядку.

Будемо вважати $y(x) \in C^n_{(a,b)}$. Позначимо

$$U_j(y) = \sum_{s=0}^{n-1} \left(\alpha_{s,j} y^{(s)}(a) + \beta_{s,j} y^{(s)}(b) \right), \quad j = \overline{1, m}, \tag{2.29}$$

де $\alpha_{s,j}$, $\beta_{s,j}$ – задані сталі. Вважатимемо лінійні форми (2.29) незалежними. Тоді вирази

$$U_j(y) = \gamma_j, \quad j = \overline{1, m}, \tag{2.30}$$

де γ_j – задані числа, називаються *лінійними крайовими умовами*. Крайові умови (2.30) називаються *однорідними*, якщо всі γ_j рівні нулеві, і *неоднорідними* – у протилежному варіанті [15; 17; 20].

Позначимо через D_L множину функцій $y(x) \in C^n_{(a,b)} \bigcap C^{n-1}_{[a,b]}$, які відповідають крайовій умові (2.30). Довільній функції $y(x) \in D_L$ поставимо у відповідність деяку функцію $f(x) \in C_{(a,\,b)}$ за законом

$$l_n(y) = f(x), \tag{2.31}$$

тобто задамо в лінійному просторі $C_{(a,\,b)}$ оператор

$$Ly = f(x) \tag{2.32}$$

з областю визначення D_L, або *лінійний диференціальний оператор*, породжений лінійним диференціальним виразом (2.28) і лінійними крайовими умовами (2.30). Операторне рівняння (2.32) еквівалентне крайовій задачі (2.31) і (2.30).

Очевидно, що в разі однорідних крайових умов (2.30) D_L є лінійним підпростором лінійного простору $C^n_{(a,b)} \bigcap C^{n-1}_{[a,b]}$, причому D_L може збігатись із $C^n_{(a,b)} \bigcap C^{n-1}_{[a,b]}$, тільки тоді, коли крайові умови (2.30) відсутні.

Зауважимо, що один і той самий диференціальний вираз може породжувати різні диференціальні оператори залежно від умов (2.30).

Лінійна однорідна крайова задача (ЛОКЗ) полягає у знаходженні регулярного на інтервалі (a, b) розв'язку лінійного диференціального рівняння

$$l_n(y) \equiv \sum_{k=0}^{n} p_k(x) y^{(n-k)}(x) = 0, \tag{2.33}$$

де $p_k(x) \in C_{(a,b)}$, $k = \overline{0,n}$, причому $p_0(x) \neq 0$, який задовольняє крайові умови

$$U_j(y) \equiv \sum_{s=0}^{n-1} \left(\alpha_{s,j} y^{(s)}(a) + \beta_{s,j} y^{(s)}(b) \right) = 0, \quad j = \overline{1,m}. \tag{2.34}$$

Задача рівнянь (2.33) і (2.34) може бути записана в операторній формі $Ly = 0$. Зазначимо, що в разі ЛОКЗ область визначення D_L лінійного диференціального оператора L, породженого лінійним диференціальним виразом $l_n(y)$ і лінійними однорідними крайовими умовами (2.34), є лінійним підпростором лінійного простору $C^n_{(a,b)} \bigcap C^{n-1}_{[a,b]}$.

Очевидно, що ЛОКЗ рівнянь (2.33) і (2.34) завжди має тривіальний розв'язок $y(x) \equiv 0,$ проте це не означає, що такий розв'язок завжди є єдиним.

ЛОКЗ рівнянь (2.33) і (2.34) матиме нетривіальний розв'язок, якщо ранг матриці системи $s < n.$ Мають силу такі критерії:

1. Якщо $s = n,$ то ЛОКЗ рівнянь (2.33) і (2.34) має тільки тривіальний розв'язок.

2. Якщо $s < n,$ то ЛОКЗ рівнянь (2.33) і (2.34) буде мати і нетривіальні розв'язки, причому число лінійно незалежних частинних розв'язків буде $n - s.$ У цьому разі кажуть, що задача є $(n - s)$-кратно розв'язною.

З наведених вище критеріїв очевидно:

- ✓ якщо $m < n,$ то ЛОКЗ (2.33), (2.34)завжди має нетривіальний розв'язок;
- ✓ якщо $m = n,$ то нетривіальний розв'язок існує тільки при виконанні умови $\det U = 0;$
- ✓ якщо $m > n,$ то існування нетривіального розв'язку залежить від рангу крайової задачі (див. попередні критерії) [1; 3; 21; 22].

Приклад. Дослідити лінійну однорідну крайову задачу:

$$y'' - 4y = 0, \quad y = y(x), \quad x \in (0;1);$$
$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$

Розв'язjr. Загальний розв'язок рівняння є

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}.$$

Із крайових умов одержуємо систему

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0; \\ C_1 e^2 + C_2 e^{-2} = 0. \end{cases}$$

Маємо випадок $m = n$ (кількість крайових умов збігається з порядком диференціального рівняння), причому

$$\det U = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^2 & e^{-2} \end{vmatrix} = -2 \operatorname{sh} 2 \neq 0.$$

Отже, наведена ЛОКЗ має тільки тривіальний розв'язок.

Приклад. Дослідити лінійну однорідну крайову задачу:

$$y'' + 4y = 0, \quad y = y(x), \quad x \in (0; \pi);$$
$$y(0) = y(\pi) = 0, \quad y'(\pi/4) = 0.$$

Розв'язок. Загальний розв'язок рівняння є

$$y(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

Із крайових умов одержуємо систему

$$\begin{cases} C_1 = 0; \\ C_1 = 0; \\ -2C_1 = 0. \end{cases} \quad \text{Матриця системи } \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \ \operatorname{rank} U = 1.$$

Маємо випадок $s < n, \ (s = 1, \ n = 2).$ Отже, наведена ЛОКЗ має нетривіальні розв'язки $y(x) = C \sin 2x,$ де $C = const,$ серед яких лінійно незалежних є $n - s = 2 - 1 = 1$ (задача є однократно розв'язною).

Лінійна крайова задача називається *неоднорідною* (ЛНКЗ), якщо рівняння або крайові умови неоднорідні.

У загальному варіанті ЛНКЗ полягає у знаходженні регулярного на інтервалі (a, b) розв'язку лінійного диференціального рівняння

$$l_n(y) \equiv \sum_{k=0}^{n} p_k(x) y^{(n-k)}(x) = f(x), \tag{2.35}$$

який задовольняє крайові умови

$$U_j(y) \equiv \sum_{s=0}^{n-1} \left(\alpha_{s,j} y^{(s)}(a) + \beta_{s,j} y^{(s)}(b) \right) = \gamma_j, \quad j = \overline{1, m}. \tag{2.36}$$

Якщо при $x \in (a, b)$ коефіцієнти рівняння (2.35) $p_k(x), \ k = \overline{0, n}$ є неперервними функціями, причому $p_0(x) \neq 0,$ тоді загальний розв'язок цього рівняння подаємо як суму загального розв'язку відповідного однорідного рівняння (2.33) і деякого частинного розв'язку рівняння (2.35):

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x) + y_0(x), \tag{2.37}$$

де $\{y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)\}$ – фундаментальна система частинних розв'язків однорідного рівняння (2.33).

Підставивши (2.37) у крайові умови (2.36), одержимо систему лінійних неоднорідних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих сталих

$$\sum_{i=1}^{n} C_i U_j(y_i) = \gamma_j - U_j(y_0), \quad j = \overline{1, m}. \tag{2.38}$$

Очевидно, що існування розв'язку ЛНКЗ (2.35) і (2.36) визначатиметься розв'язком системи (2.38).

Позначимо через U матрицю системи (2.38), а через U_e – відповідну розширену [стовпцем вільних членів $\gamma_j - U_j(y_0)$] матрицю системи. Тоді мають силу такі твердження [5; 18; 40]:

1. Якщо $m > n,$ то можливі випадки:

а) $\operatorname{rank} U = \operatorname{rank} U_e = n$. Тоді система (2.38) має єдиний розв'язок;

б) $\operatorname{rank} U = n, \operatorname{rank} U_e = n + 1.$ Тоді система (2.38) не має розв'язку;

в) $\operatorname{rank} U = s < n.$ Тоді за виконання умови $\operatorname{rank} U_e = s$ система (2.38) має безліч розв'язків, причому довільних сталих у розв'язку залишиться $n - s;$ за $\operatorname{rank} U_e \neq \operatorname{rank} U$ система (2.38) не має розв'язку.

2. Якщо $m = n,$ то можливі варіанти:

а) $\det U \neq 0.$ Тоді система (2.38) має єдиний розв'язок;

б) $\det U = 0, \operatorname{rank} U_e \neq \operatorname{rank} U.$ Тоді система (2.38) не має розв'язку;

в) $\det U = 0, \operatorname{rank} U_e = \operatorname{rank} U = s < n.$ Тоді система (2.38) має безліч розв'язків, причому довільних сталих у розв'язку знову залишиться $n - s.$

3. Якщо $m < n,$ то система (2.38) або має безліч розв'язків (якщо ранги матриць U та U_e – рівні), або не має розв'язку (якщо ранги не збігаються).

Приклад. Дослідити лінійну неоднорідну крайову задачу

$$y'' + y = \sin x, \quad y = y(x), \quad x \in (0; 1);$$
$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$

Розв'язок. Загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння:

$$\bar{y}(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x.$$

Частинний розв’язок неоднорідного рівняння шукаємо за допомогою методу невизначених коефіцієнтів:

$$y_0(x) = x(A\sin x + B\cos x).$$

Тоді $y_0''(x) = 2A\cos x - 2B\sin x - x(A\sin x + B\cos x).$ Із неоднорідного рівняння дістанемо $A = 0,\ B = -0,5.$ Тоді $y_0(x) = -0,5x\cos x$ і

$$y(x) = \overline{y}(x) + y_0(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x - 0,5x\cos x. \qquad (2.39)$$

Із крайових умов одержуємо систему

$$\begin{cases} C_2 = 0; \\ C_1 \sin 1 + C_2 \cos 1 = 0,5\cos 1. \end{cases}$$

Маємо варіант $m = n = 2,\ \det U = -\sin 1 \neq 0.$ Отже, ЛНКЗ повинна мати єдиний розв’язок. Визначивши сталі зі системи і підставивши в (2.39), одержимо

$$y(x) = \overline{y}(x) + y_0(x) = 0,5(\operatorname{ctg} 1 \sin x - x\cos x).$$

Приклад. Дослідити ЛНКЗ

$$y'' + \pi^2 y = 0, \quad y = y(x), \quad x \in (0;1);$$
$$y(0) = 1, \quad y(1) = -1.$$

Розв’язок. Загальний розв’язок рівняння:

$$y(x) = C_1 \sin \pi x + C_2 \cos \pi x. \qquad (2.40)$$

Із крайових умов одержуємо систему

$$\begin{cases} C_2 = 1; \\ -C_2 = -1. \end{cases}$$

Тут

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad U_e = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Маємо варіан $m = n = 2,\ \det U = 0,$ причому ранг матриці системи збігається з рангом розширеної матриці й рівний одиниці. Отже, ЛНКЗ повинна мати безліч розв’язків. Визначивши сталі зі системи та підставивши в (2.40), одержимо

$$y(x) = C\sin\pi x + \cos\pi x,$$

де C – довільна стала.

Лінійні крайові задачі у просторі вектор-функцій. Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$y_i' = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}(x) y_j(x) + f_i(x), \quad i = \overline{1,n}, \quad x \in (a, b), \tag{2.41}$$

де функції $p_{ij}(x), f_i(x) \in C_{(a,b)}$. За допомогою матриці зі сталими елементами рангу n

$$A = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} & \beta_{11} & \dots & \beta_{1n} \\ & & & \cdots & & \\ \alpha_{m1} & \dots & \alpha_{mn} & \beta_{m1} & \dots & \beta_{mn} \end{vmatrix}$$

і заданих чисел γ_j, $j = \overline{1,n}$ складемо крайові умови

$$U_j(y) = \gamma_j, \quad j = \overline{1,m}, \tag{2.42}$$

де $U_j(y) \equiv \sum_{k=1}^{n} [\alpha_{kj} y_k(a) + \beta_{kj} y_k(b)].$ (2.43)

ЛНКЗ для системи рівнянь (2.41) полягає у знаходженні системи функцій $\{y_1(x), ..., y_n(x)\}$, які задовольняють рівняння (2.41) і крайові умови (2.42). Крайова задача називається *квазіоднорідною*, якщо всі $\gamma_j = 0$, і *однорідною*, якщо, крім того, $f_i(x) \equiv 0, i = \overline{1,n}$. Отже, відповідна до (2.41) і (2.42) ЛОКЗ є такою:

$$y_i' = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}(x) y_j(x), \quad i = \overline{1,n}, \quad x \in (a, b), \tag{2.44}$$

$$U_j(y) = 0, \quad j = \overline{1,m}. \tag{2.45}$$

Нехай $y_j = \left(y_{j,1}(x), ..., y_{j,n}(x)\right)$, $j = \overline{1,n}$ – фундаментальна система частинних розв'язків системи (2.44). Тоді однорідна задача рівнянь (2.44) і (2.45) мають нетривіальні розв'язки за тих самих умов, що й ЛОКЗ для звичайного диференціального рівняння (2.33) [24].

Справді, загальний розв’язок системи (2.38) можна подати так:

$$y_i(x)=\sum_{j=1}^{n}C_j y_{i,j}(x),\quad i=\overline{1,n}. \tag{2.46}$$

Підставивши (2.46) у (2.45), одержимо алгебраїчну систему

$$\sum_{i=1}^{n}C_i U_j(y_i)=0,\quad j=\overline{1,m}. \tag{2.47}$$

Позначимо через $U=\left\|U_j(y_i)\right\|$ матрицю системи (2.47). Тоді

– за $m<n$ ЛОКЗ рівнянь (2.44) і (2.45) завжди має нетривіальний розв’язок;

– якщо $m=n,$ то нетривіальні розв’язки існують тільки за $\Delta=\det U=0;$

– за $m>n$ нетривіальні розв’язки існують, якщо ранг матриці U менший за порядок системи (2.44).

Якщо $\operatorname{rank}U=k,$ то існує $n-k$ лінійно незалежних розв’язків однорідної задачі (2.44) і (2.45). У цьому разі ЛОКЗ рівнянь (2.45) і (2.45) називається $(n-k)$-кратно розв’язною.

Аналогічно: для неоднорідної крайової задачі рівнянь (2.41) і (2.42) мають силу ті самі критерії існування розв’язку, що й для задачі рівнянь (2.35) і (2.36).

2.3. Моделювання періодичних процесів в економіці методом невизначених коефіцієнтів розв’язування систем кінцево-різницевих рівнянь

Цей метод полягає в пошуку часткового розв’язку спеціального виду для неоднорідного лінійного рівняння зі сталими коефіцієнтами.

$$(Lx)(t)=x^{(n)}(t)+a_1x^{(n-1)}(t)+\ldots+a_nx(t)=e^{\alpha t}(b_0t^m+\ldots+b_m). \tag{2.48}$$

Права частина рівняння (2.48) – «квазіполіном». Нехай $p(\lambda)$ – характеристичний многочлен диференціального оператора L. Рівняння (2.48) будемо записувати і так: $p\left(\frac{d}{dt}\right)x = f$.

У разі, якщо $p(\alpha) \neq 0$ рівняння (2.48) має і притому єдиний розв'язок:

$$x(t) = e^{\alpha t}\left(c_0 t^m + ... + c_m\right).$$

Замінимо $x(t) = e^{\alpha t} y(t)$. Тоді

$$L\left(e^{\alpha t} y(t)\right) = e^{\alpha t}\left(y^n(t) + \frac{p^{n-1}(\alpha)}{(n-1)!} y^{(n-1)}(t) + ... + \frac{p(\alpha)}{1!} y(t)\right) = e^{\alpha t}(b_0 t^m + ... + b_m). \quad (2.49)$$

Оператор $L_\alpha : y(t) \mapsto e^{-\alpha t} L\left(e^{\alpha t} y(t)\right)$ переводить многочлен у многочлен; характеристичний многочлен $q(\lambda)$ оператора L_α є таким: $q(\lambda) = p(\lambda + \alpha)$.

Нехай E – лінійний простір многочленів ступеня, не вищого за m. Позначимо через A обмеження оператора L_α на простір E.

Оператор $L_\alpha = q\left(\frac{d}{dt}\right)$ має таку особливість: у виразі $(L_\alpha y)(t) = y^{(n)}(t) + \tilde{a}_1 y^{(n-1)}(t) + ... + \tilde{a}_n y(t)$ маємо: $\tilde{a}_n = q(0) = p(\alpha) \neq 0$.

Виберемо у просторі E базис: $\vec{e}_k = \frac{t^k}{k!} (k = 0, ..., m)$. Матриця оператора $\frac{d}{dt}$ в цьому базисі є такою:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Тому матриця оператора A така:

$$A=\begin{pmatrix}\tilde{a}_n & \tilde{a}_{n-1} & \tilde{a}_{n-2} & \dots \\ 0 & \tilde{a}_n & \tilde{a}_{n-1} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \tilde{a}_n\end{pmatrix}$$

Оскільки A – невироджена матриця, то рівняння $L_\alpha y = z,$ яке еквівалентне (2.49), у просторі E має, притому єдиний розв'язок.

Нехай $p(\alpha)=p'(\alpha)=\dots=p^{(k-1)}(\alpha)=0; p^{(k)}(\alpha)\neq 0.$ Тоді рівняння (2.48) має, і притому єдиний розв'язок: $x(t)=e^{\alpha t}t^k(c_0t^m+c_1t^{m-1}+\dots+c_m).$

За формулою (2.49) маємо:

$$(L_\alpha y)(t)=e^{-\alpha t}L(y\cdot e^{\alpha t})=y^{(n)}(t)+\frac{p^{(n-1)}(\alpha)}{(n-1)!}y^{(n-1)}(t)+\dots+\frac{p^{(k)}(\alpha)}{k!}y^{(k)}$$

Приходимо до задачі пошуку многочлена $y(t),$ для якого:

$$y^{(n)}(t)+\tilde{a}_1y^{(n-1)}(t)+\dots+\tilde{a}_{n-k}y^{(k)}(t)=b_0t^m+\dots+b_m \tag{2.50}$$

і при цьому $\tilde{a}_{n-k}\neq 0.$

Якщо зробити заміну: $y^{(k)}(t)=z(t),$ то, за аналогією, маємо висновок про існування єдиного многочлена $z(t),$ степеня не вищого за m, для якого

$$(\tilde{L}_\alpha z)(t)=z^{(n-k)}(t)+\tilde{a}_1z^{(n-k-1)}(t)+\dots+\tilde{a}_{n-k}z(t)=b_0t^m+\dots+b_m.$$

Тепер $y(t)$ можна знайти k-кратним інтегруванням $z(t).$ При цьому одержимо єдиний многочлен $d_1t^{k-1}+\dots+d_{k-1}t+d_k.$ Другий доданок задовольняє споріднене з (2.50) однорідне рівняння і тому рівняння (2.50) має, і притому єдиний розв'язок $y(t)=t^k(c_0t^m+c_1t^{m-1}+\dots+c_m).$

У разі дійсних коефіцієнтів важливим є, коли неоднорідність $f(t)$ має вид [19; 41; 45; 46]:

$$f(t)=e^{\alpha t}(P_1(t)\cos\beta t+P_2(t)\sin\beta t) \tag{2.51}$$

(тут $P_1(t), P_2(t)$ – многочлени, максимальний степінь яких дорівнює m). У цьому разі запровадимо многочлен $P(t)=P_1(t)-iP_2(t)$ (степінь $P(t)=m$). Тоді $f(t)=\mathrm{Re}\left(e^{(\alpha+\beta i)t}P(t)\right).$

У разі, якщо $\lambda=\alpha+\beta i$ є коренем характеристичного многочлена оператора L, кратності k (а тому й $\overline{\lambda}=\alpha+\beta i$), рівняння $(Lx)(t)=e^{(\alpha+\beta i)t}P(t)$ має розв'язок $e^{(\alpha+\beta i)t}t^k\cdot Q(t)$, де степінь $Q(t)$ не перевищує m.

Тоді комплексно спряжена функція $\overline{x}(t)$ задовольняє рівняння $(L\overline{x})(t)=\overline{e^{(\alpha+\beta i)t}P(t)}$, а тому $L(\mathrm{Re}(t))=f(t)$.

Цим установлено існування розв'язку рівняння (2.51):

$$y(t)-\mathrm{Re}(e^{(\alpha+\beta t)t}t^kQ(t))=e^{\alpha t}t^k(Q_1(t)\cos\beta t+Q_2(t)\sin\beta t), \tag{2.52}$$

де $Q_1(t)=\mathrm{Re}\,Q(t);Q_2(t)=-\mathrm{Im}\,Q(t)$.

При цьому у формулі (2.52): степені $Q_1(t)$ та $Q_2(t)$ не перевищують m.

Розглянемо систему

$$\dot{\vec{x}}=A\vec{x}+e^{\alpha t}\vec{P}(t), \tag{2.53}$$

де $\vec{P}(t)=t^m\vec{b}_0+t^{m-1}\vec{b}_1+...+t\vec{b}_{m-1}+\vec{b}_m$.

Тут A – стала матриця; неоднорідність $\vec{f}=e^{\alpha t}\vec{P}(t)$ – квазіполіном.

Нехай α не є коренем характеристичного многочлена матриці A. Тоді система (2.53) має, і притому єдиний розв'язок: $\vec{x}(t)=e^{\alpha t}(t^{m-1}\vec{c}_1+...+t\vec{c}_{m-1}+\vec{c}_m)$.

Розглянемо $\vec{x}(t)=e^{\alpha t}\vec{Q}(t)$, де $\vec{Q}(t)=t^m\vec{c}_0+...+\vec{c}_m$. Тоді $\dot{\vec{x}}=e^{\alpha t}(\alpha\vec{Q}(t)+\vec{Q}'(t))$ і з (2.53) маємо:

$$\alpha\vec{Q}(t)+\vec{Q}'(t)=A\vec{Q}(t)+\vec{P}(t),$$

звідки

$$\vec{Q}'(t)=(A-\alpha I)\vec{Q}(t)+\vec{P}(t).$$

Порівняємо коефіцієнти за різних степенів t:

$$\begin{cases}\vec{0}=(A-\alpha I)\vec{c}_0+\vec{b}_0\\ m\vec{c}_0=(A-\alpha I)\vec{c}_1+\vec{b}_1\\ ...\\ \vec{c}_{m-1}=(A-\alpha I)\vec{c}_m+\vec{b}_m\end{cases} \tag{2.54}$$

Оскільки $\det(A-\alpha I)\neq 0,$ то система (2.54) покроково однозначно розв’язується.

Нехай α – корінь характеристичного многочлена матриці *A*. Перейдімо до жорданова базису. При цьому коефіцієнти многочлена $\vec{P}(t)$ змінюються (зауважимо, що ненульові коефіцієнти переходять у ненульові). А оскільки жорданова форма матриці розкладається на клітини, то зосередимо увагу на дослідженні одноклітинної матриці. Тож нехай система є такою:

$$\dot{\vec{x}}(t)=\underbrace{\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0 & \cdots\cdots & 0\\ 0 & \lambda & 1 & \cdots\cdots & 0\\ 0 & 0 & \lambda & \cdots\cdots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \cdots\cdots & \ldots\\ 0 & 0 & \ldots & \cdots\ \lambda & 1\\ 0 & 0 & \ldots & \cdots\cdots & \lambda\end{pmatrix}}_{B}\vec{x}(t)+e^{\alpha t}\vec{P}(t) \tag{2.55}$$

У разі, якщо $\lambda\neq\alpha,$ то, як і раніше, приходимо до розв’язку $e^{\alpha t}\vec{Q}(t)=e^{\alpha t}(\vec{c}_0t^m+\ldots+\vec{c}_m).$

Якщо ж $\lambda=\alpha,$ то також розглянемо: $\vec{x}(t)=e^{\alpha t}\vec{Q}(t).$

Тоді $\alpha\vec{Q}(t)+\vec{Q}'(t)=B\vec{Q}(t)+\vec{P}(t);$

$$\vec{Q}'(t)=(B-\alpha I)\vec{Q}(t)+\vec{P}(t); \tag{2.56}$$

$$B-\alpha I=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0\end{pmatrix}.$$

Нехай порядок клітини *B* дорівнює *k*. Тоді $(B-\alpha I)^k=0.$ З (2.56) маємо:

$$\vec{Q}^{(k)}(t)=(B-\alpha I)\vec{Q}(t)+\vec{P}'(t)=(B-\alpha I)^2\vec{Q}(t)+(B-\alpha I)\vec{P}(t)+\vec{P}'(t)$$

і т. д. Наприкінці:

$$\vec{Q}^{(k)}(t)=(B-\alpha I)\vec{Q}(t)+(B-\alpha I)^{k-1}\vec{P}(t)+(B-\alpha I)^{k-2}\vec{P}'(t)+\ldots+\vec{P}^{(n-1)}(t). \tag{2.57}$$

З рівняння (2.57) $\vec{Q}(t)$ знаходимо k–кратним інтегруванням.

$$\vec{Q}(t) = t^{m+k}\vec{c}_0 + t^{m+k-1}\vec{c}_1 + \ldots + \vec{c}_{m+k}.$$

Оскільки вихідна система (2.53) у жордановому базисі розкладається поблочно на системи (2.55), то приходимо до загального алгоритму пошуку часткового розв’язку системи (2.53): розв’язок слід шукати так:

$$\vec{x}(t) = e^{\alpha t}(\vec{c}_0 t^{m+k} + \ldots + \vec{c}_{m+k}), \tag{2.58}$$

де k – порядок найбільшої жорданової клітини, що відповідає власному числу α. При цьому ми не можемо гарантувати єдиність розв’язку (2.58).

Для систем виду

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + e^{\alpha t}(\vec{P}_1(t)\cos\beta t + \vec{P}_2(t)\sin\beta t)$$

розв’язок слід шукати так: $\vec{x}_ч = e^{\alpha t}(\vec{Q}_1(t)\cos\beta t + \vec{Q}_2(t)\sin\beta t);$ степені $Q_1(t)$ і $Q_2(t)$ не перевищують $m = k,$ а k дорівнює максимальному розміру жорданової клітини матриці A, що відповідає числу $\alpha + \beta i$.

Висновки до розділу 2

Досліджуючи різні процеси і проблеми в області економіки, приходять до різних типів лінійних і нелінійних крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь. Теорія крайових задач для нелінійних диференціальних рівнянь є одним з актуальних розділів сучасної математики, оскільки запити практики і безліч ще не повністю розв’язаних теоретичних питань багато в чому стимулюють бурхливий розвиток цієї області математики.

У другому розділі роботи викладено основні поняття теорії крайових задач, установлюються умови існування та єдності розв’язку лінійних крайових задач.

В економіко-математичному моделюванні часто виникає ситуація, коли економічна система, що досліджується, має надзвичайно складну структуру.

Дійсно, дослідник досить часто має справу з багатовимірністю опису. До таких задач відносять, наприклад, задачі сегментації ринку, прогнозування кон'юнктури ринку, вивчення і прогнозування економічної депресії, аналізу і прогнозування соціально-економічних явищ тощо.

Наведений клас задач є надзвичайно важливим для розвитку економіки в цілому, у зв'язку з чим розроблення ефективних методів розв'язування подібних задач і реалізація їх у формі пакетів прикладних програм є актуальною науковою і практичною проблемою. Крім того, важливою особливістю розв'язку наведеного типу задач є їхня висока обчислювальна складність.

Нелінійні різницеві рівняння часто трапляються при дослідженні і моделюванні різних прикладних завдань у техніці, економіці, соціології, демографії та інших дисциплінах. У математиці нелінійні різницеві рівняння з'являються, зокрема, при аналізі збіжності різних ітераційних процесів.

У теорії різницевих рівнянь передбачається, що показники економічного процесу, що досліджується, визначені в дискретні моменти часу.

Доцільність такого розгляду визначається вихідними даними про економічний процес, які часто вимірюються в дискретні моменти часу (офіційна статистика, періодичні опитування, переписи тощо). Інтервалом часу може бути п'ятирічка, рік, квартал, місяць, тиждень тощо.

Якщо інтервал часу стає нескінченно малим, то процес розглядають як неперервний, його і вивчають за допомогою теорії диференціальних рівнянь.

Поведінка системи в дискретному часі визначають за допомогою різницевого рівняння, яке пов'язує значення економічного показника, який досліджують, у сусідні моменти часу.

Список використаних джерел до розділу 2

1. Агафонов С. А. Дифференциальные уравнения / С. А. Агафонов, А. Д. Герман, Т. В. Муратова. – М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004. – 352 с.
2. Аллен Р. Математическая экономия / Р. Аллен. – М. : ИЛ, 1963. – 667 с.
3. Березин И. С. Методы вичислений : в 2-х т. / И. С. Березин, Н. П. Жидков. – М. : 1959. – Т. 1. – 464 с. ; Т. 2. – 602 с.
4. Боярчук А. К. Справочное пособие по высшей математике / А. К. Боярчук, Г. П. Головач. – М. : Едиториал УРСС, 2001. – Т. 5 : Дифференциальные уравнения в примерах и задачах. – 384 с.
5. Бурда М. Макроекономіка: європейський контекст / М. Бурда, Ч. Виплош : пер. з англ. – К. : Основи, 1998. – 682 с.
6. Вагнер Г. Основи исследования операций : в 2 т. / Г. Вагнер. – М. : Мир, 1972.
7. Варфоломеев В. И. Алгоритмическое моделирование элементов экономических систем : практикум / В. И. Варфоломеев. – М. : Финансы и статистика, 2000. – 208 с.
8. Вержбицкий В. М. Основа численных методов / В. М. Вержбицкий. – М. : Высш. шк., 2002. – 840 с.
9. Гельфанд И. М. Вариационное исчисление / И. М. Гельфанд, С. В. Фомин. – М. : Физматгиз, 1961. – 228 с.
10. Говорухин В. Н. Компьютер в математическом исследовании: Maple, MATLAB, LaTeX / В. Н. Говорухин, Б. Г. Цибулин. – СПб. : Питер, 2001. – 624 с.
11. Грешилов А. А. Как принять наилучшее решение в реальних условиях / А. А. Грешилов. – М. : Радио и связь, 1991.
12. Григоренко Я. М. Обчислювальні методи в задачах прикладної математики / Я. М. Григоренко, І. Д. Панкратова. – К. : Либідь, 1995. – 277 с.

13. Грубер Й. Эконометрия : учебное пособие / Й. Грубер. – Киев, 1996. – Т. 1 : Введение в эконометрию.

14. Данилович В. Чисельні методи / В. Данилович, М. Кушів. – Львів : Кальварія, 1998.

15. Джонстон Дж. Эконометрические методы / Дж. Джонстон. – М. : Статистика, 1988.

16. Егоров А. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения с приложениями / А. И. Егоров. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 384 с.

17. Замков О. О. Математические методы в экономике / О. О. Замков, А. В. Толстопятенко, Ю. Н. Черемных. – М. : «ДИС», 1997. – 368 с.

18. Замков О.О. Математические методы в экономике : учебник / О. О. Замков, А. В. Толстопятенко, Ю. Н. Черемных. ; под общ. ред. д.э.н., проф. А. В. Сидоровича. – М. : Дело и Сервис, 2004.

19. Занг В. Б. Синергетическая экономика. Время и перемены в экономической теории / В. Б. Занг. – М. : Мир, 1999. – 335 с.

20. Здрок В. В. Прикладна економетрія : навч. посібник : у 2 ч. / В. В. Здрок, Т. Я. Лагоцький. – Львів : Вид. центр ЛНУ імені Івана Франка, 2005. – Ч. II : Дистрибутивно-лагові та авторегресивні моделі.

21. Ибрагимов Н. Х. Практический курс дифференциальных уравнений и математического моделирования / Н. Х. Ибрагимов. – Н. Новгород : Изд-во Нижегород. гос. ун-та, 2007. – 421 с.

22. Моццера Дж. Исследование операций : в 2 т. / Дж. Моццера ; под ред. Дж. Моццера, С. Эл-маграби. – М. : Мир, 1981. – Т. 1 : Методологические основы и математические методы.

23. Карташев А. П. Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления / А. П. Карташев, Б. Л. Рождественский. – М. : Наука, 1980. – 288 с.

24. Катиткин И. Н. Численные методи / И. Н. Катиткин. – М. : Наука, 1978. – 512 с.

25. Козацький В. А. Основи математичної економіки. Теорія споживання : навч. посібник / В. А. Козацький, С. П. Лавренюк, Н. О. Олісневич. – Львів : Піраміда, 2004.
26. Кочура Є. В. Моделювання макроекономічної динаміки / Є. В. Кочура, В. М. Косарєв. – К. : ЦНЛ, 2003. – 236с.
27. Красс И. А. Математические модели зкономической динамики / И. А. Красс. – М. : Советское радио, 1985.
28. Кузьменко В. І. Варіаційні методи аналізу математичних моделей / В. І. Кузьменко. – Дніпропетровськ : ДНУ, 1997. – 120 с.
29. Лавренюк С. П. Курс диференціальних рівнянь / С. П. Лавренюк. – Львів : Вид-во наук.-тех. л-ри, 1997. – 216 с.
30. Лизоркин П. И. Курс дифференциальных и интегральных уравнений с дополнительными главами анализа / П. И. Лизоркин. – М. : Наука, 1981. – 384 с.
31. Лук’яненко І. Г. Економетрика : підручник / І. Г. Лук’яненко, Л. І. Краснікова. – К. : Знання, 1998.
32. Лысенко Ю. Г. Экономическая кибернетика : учеб. пособие / Ю. Г. Лысенко, В. Л. Петренко, В. А. Забродский и др. – Донецк : ДонГУ, 1999.
33. Малыхин В. И. Математическое моделирование экономики / В. И. Малыхин. – М. : УРАО, 1996. – 150 с.
34. Малыхин В. И. Математическое моделирование экономики : учеб.-практ. пособие / В. И. Малыхин. – М. : УРАО, 1998. – 160 с.
35. Наконечний С. І. Економетрія / С. І. Наконечний, Т. О. Терещенко, Т. П. Романюк. – К. : КНЕУ, 2000.
36. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Л. С. Понтрягин. – М. : Физматгиз, 1965. – 332 с.
37. Пригожин И. Порядок из хаоса / И. Пригожин, И. Стенгерс. – М. : Прогресс, 1986. – 432 с.

38. Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями : пер. с франц. / А. Пуанкаре. – М., 1947. – 385 с.
39. Самойленко А. М. Диференціальні рівняння / А. М. Самойленко, М. О. Перестюк, І. О. Парасюк. – К. : Либідь, 2003. – 600 с.
40. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений / В. В. Степанов. – М. : ГИТТЛ, 1953. – 468 с.
41. Таха Х. Введение в исследование операций : в 2 т. / Х. Таха. – М. : Мир, 1985.
42. Форсайт Дж. Машинные методы математических вычислений / Дж. Форсайт, М. Малькольм, К. Моулер. – М. : Мир, 1980. – 280 с.
43. Форсайт Дж. Численное решение системли нейных алгебраических уравнений / Дж. Форсайт, К. Моулер. – М. : Мир, 1969. – 168 с.
44. Черников Д. А. Темпы и пропорции экономического роста / Д. А. Черников. – М. : Экономика, 1982.
45. Шикин Е. В. Математические методы и модели в управлении : учеб. пособие / Е. В. Шикин, А. Г. Чхартишвили. – М. : Дело, 2000. – 440 с.
46. Федосеев В. В. Экономико-математические методы и прикладные модели : учеб. пособие для вузов / В. В. Федосееви и др. ; под ред. В. В. Федосеева. – М. : ЮНИТИ, 1999. – 391 с.

РОЗДІЛ 3
РЕАЛІЗАЦІЯ КОНЦЕПЦІЇ МОДЕЛЮВАННЯ ПЕРІОДИЧНИХ ПРОЦЕСІВ В ЕКОНОМІЦІ

3.1. Метод рішення задачі вирівнювання цін економічних об'єктів, з використанням різницевих рівнянь підвищеної точності

Для зменшення кількості різницевих рівнянь при збереженні необхідної точності результатів, доцільно використовувати апроксимації, які враховують більшу кількість членів розкладання шуканого рішення в ряд Тейлора. Коефіцієнти таких апроксимацій знаходимо за методом невизначених коефіцієнтів.

Спинимося на особливостях використання дискретного часу. Для заміни диференціального рівняння різницевим, потрібно здійснити два кроки:

замінити область неперервної зміни аргументу областю дискретної його зміни;

замінити диференціальні оператори різницевими.

Так, для диференціального рівняння

$$dy/dt = f(y,t) \tag{3.1}$$

Використаємо простий різницевий оператор, отриманий із визначення похідної

$$\left(dy/dt\right)_{t_j} = \left(y_{m+1} - y_m\right)/h, \tag{3.2}$$

де $h = t_{m+1} - t_m$ – крок за часом.

Різницева апроксимація (3.2) є найпростішою, але одночасно і найменш точною, тому що інформацію в точці $m+1$ шукає тільки на базі інформації в точці *m*.

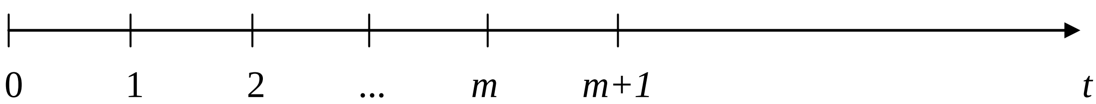

Рис. 3.1. Графічне зображення точок різницевої апроксимації

Для використання більш точних операторів на основі методу невизначених коефіцієнтів ми отримали різницеві рівняння підвищеної точності.

Найбільш загальний спосіб побудови кінцево-різницевих рівнянь полягає в тому, що відповідним різницевим відношенням апроксимується не кожна похідна зокрема, а відразу весь диференціальний оператор. За заданого набору вузлів складають кінцево-різницеве рівняння, яке апроксимує це диференціальне рівняння в m-й вузловій точці, яка лежить посередині сукупності вузлів із номерами $m-k, ..., m, ..., m+k(k=1, 2, ...)$ і яке можна записати так:

$$a_{m-k}Y_{m-k} + ... + a_m Y_m + ... + a_{m+k}Y_{m+k} = h(b_{m-k}Y'_{m-k} + ... + b_m Y'_m + ... + b_{m+k}Y'_{m+k}) + R_k. \quad (3.3)$$

Число k називається порядком цього рівняння, а число p – його степенем. Залишковий член R_k означає різницю між лівою та правою частинами виразу (3.3) і визначає помилку апроксимації.

Розкладаємо точкові функції $Y_{m-k}, ..., Y_m, ..., Y_{m+k}$ та їхні похідні $Y'_{m-k}, ..., Y'_m, ..., Y'_{m+k}$ за формулою Тейлора до членів із похідними степеня $p+1$.

Отримаємо

$$Y_{m+k} = Y_m + khY'_m + \frac{(kh)^2}{2!}Y''_m + ... + \frac{(kh)^p}{p!}Y^p_m + \frac{(kh)^{p+1}}{(p+1)!}Y^{p+1}_m + 0(h^{p+1}), \quad (3.4а)$$

$$Y'_{m+k} = Y'_m + khY''_m + \frac{(kh)^2}{2!}Y''_m + ... + \frac{(kh)^{p-1}}{(p-1)!}Y^p_m + \frac{(kh)^p}{p!}Y^{p+1}_m + 0(h^p). \quad (3.4б)$$

Поставимо вимогу, щоб після підстановки (3.4а) і (3.4б) у (3.3) коефіцієнти при похідних у правій частині виразу (3.3) збігались із коефіцієнтами при відповідних похідних лівої частини. У результаті отримаємо систему алгебраїчних рівнянь

$$\sum_0^K a_K = 0, \quad (3.5а)$$

$$\sum_1^K a_K K^S - Sb_K K^{S-1}) = 0, (S = 2, 3, ..., p), \quad (3.5б)$$

$$\sum_{1}^{K} a_K K - \sum_{0}^{K} b_K = 0.$$

Усього маємо $p+1$ однорідних лінійних алгебраїчних рівнянь відносно $2(K+1)$ невідомих $a_{m\pm K}, b_{m\pm K}$. Якщо ця система рівнянь має розв’язок, то задачу побудови кінцево-різницевого рівняння, що апроксимує задане диференціальне, можна вважати розв’язаною [1; 7–9].

Знайдемо за методом невизначених коефіцієнтів значення коефіцієнтів *a* і *b* для рівнянь різного порядку *K*.

Візьмімо $K = 1.$ Тоді рівняння (3.5а) і (3.5б) будуть такими:

$$\begin{gathered} a_{m-1} + a_{m+1} + a_m = 0; \\ -a_{m-1} + a_{m+1} = h \cdot 1(b_{m-1} + b_{m+1} + b_m); \\ a_{m-1} + a_{m+1} = h \cdot 2(-b_{m-1} + b_{m+1}); \\ -a_{m-1} + a_{m+1} = h \cdot 3(b_{m-1} + b_{m+1}). \end{gathered} \tag{3.6}$$

Враховуючи, що для заданої дискретизації аргументу можна побудувати безліч різницевих схем, еквівалентних за порядком апроксимації, і не впливаючи на загальність результату в системі рівнянь (3.6), приймемо $a_m = 1, b_m = 0.$ Результатом розв’язку буде формула

$$2y_{m-1} - 4y_m + 2y_{m+1} = h(y'_{m-1} + y'_{m+1}) + \frac{1}{24} h^4 y_m^4. \tag{3.7}$$

Отримано різницеві рівняння підвищеної точності. Інформацію в точці отримуємо на основі інформації в точках $m-1$ та $m+1.$

Розглянемо різницеве рівняння для порядку апроксимації *k*=1 із похибкою п’ятого порядку, яку записуємо так:

$$-3y_{m-1} + 3y_{m+1} = h(y'_{m-1} + 4y'_m + y'_{m+1}) + \frac{1}{30} h^5 y_m^{(5)}, \tag{3.8}$$

де m – номер вузлової точки;

h – крок дискретизації;

y_{m-1}, y_m, y_{m+1} – сіткові функції;

y'_{m-1}, y'_m, y'_m – їхні похідні.

Кінцево-різницева формула (3.8) пов'язує шукану функцію в *(m*–1)-му і в *(m*+1)-му вузлах через значення її похідних в *(m*–1)-му, *(m*)-му, *(m*+1)-му вузлах.

Спробуємо отримати апроксимуючі формули, розв'язані відносно функцій, тобто такі, що визначають функцію в *m*-му вузлі через значення її похідних у трьох інших вузлах. Розглянемо метод отримання таких виразів на прикладі рівняння (3.8).

Для економічних процесів, які характеризуються періодичністю зразка $y_m(t) = y_m(t + 180^\circ)$ як інтервал повторюваності, доцільно прийняти півперіод, що скоротить час розв'язування задачі.

Мінімальна кількість вузлів на періоді для тривузлової апроксимації дорівнює чотирьом (*n*=4). Записуємо рівняння (3.8) для всіх вузлових точок періоду з урахуванням граничних умов, які для періодичних економічних процесів будуть такі:

$$y_{n+1} = -y_1, \tag{3.9}$$

Приходимо до такої системи кінцево-різницевих рівнянь:

$$\begin{aligned}
-y_1 + y_3 &= \frac{h}{3}\left(y_1' + 4y_2' + y_3'\right), \\
-y_2 + y_4 &= \frac{h}{3}\left(y_2' + 4y_3' + y_4'\right), \\
-y_3 - y_1 &= \frac{h}{3}\left(y_3' + 4y_4' - y_1'\right), \\
-y_4 - y_2 &= \frac{h}{3}\left(y_4' - 4y_1' - y_2'\right).
\end{aligned} \tag{3.10}$$

У результаті розв'язування системи різницевих рівнянь (3.10) відносно вузлових функцій отримаємо

$$\begin{aligned}
y_1 &= \frac{h}{3}\left(-2y_2' - y_3' - 2y_4'\right), \\
y_2 &= \frac{h}{3}\left(2y_1' - 2y_3' + y_4'\right),
\end{aligned} \tag{3.11}$$

$$y_3 = \frac{h}{3}\left(y_1' + 2y_2' - 2y_4'\right),$$

$$y_4 = \frac{h}{3}\left(2y_1' + 4y_2' + 2y_3'\right),$$

або у матричній формі

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \frac{h}{3} \begin{bmatrix} & -2 & -1 & -2 \\ 2 & & -2 & -1 \\ 1 & 2 & & -2 \\ 2 & 1 & 2 & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \\ y_4' \end{bmatrix} \tag{3.12}$$

Збільшимо кількість вузлів на періоді удвоє, тобто візьмемо $n = 8.$ Система кінцево-різницевих рівнянь для всіх вузлових точок періоду буде такою:

$$\begin{aligned}
-y_1 + y_3 &= \frac{h}{3}\left(y_1' + 4y_2' + y_3'\right), \\
-y_2 + y_4 &= \frac{h}{3}\left(y_2' + 4y_3' + y_4'\right), \\
-y_3 + y_5 &= \frac{h}{3}\left(y_3' + 4y_4' + y_5'\right), \\
-y_4 + y_6 &= \frac{h}{3}\left(y_4' + 4y_5' + y_6'\right), \\
-y_5 + y_7 &= \frac{h}{3}\left(y_5' + 4y_6' + y_7'\right), \\
-y_6 + y_8 &= \frac{h}{3}\left(y_6' + 4y_7' + y_8'\right), \\
-y_7 - y_1 &= \frac{h}{3}\left(y_7' + 4y_8' - y_1'\right), \\
-y_8 - y_2 &= \frac{h}{3}\left(y_8' + 4y_1' - y_2'\right).
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Систему рівнянь (3.13) представимо в розгорнутій матричній формі

$$\begin{array}{|c|}\hline y_1 \\ \hline y_2 \\ \hline y_3 \\ \hline y_4 \\ \hline y_5 \\ \hline y_6 \\ \hline y_7 \\ \hline y_8 \\ \hline \end{array} = \frac{h}{3} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|}\hline & -2 & -1 & -2 & -1 & -2 & -1 & -2 \\ \hline 2 & & -2 & -1 & -2 & -1 & -2 & -1 \\ \hline 1 & 2 & & -2 & -1 & -2 & -1 & -2 \\ \hline 2 & 1 & 2 & & -2 & -1 & -2 & -1 \\ \hline 1 & 2 & 1 & 2 & & -2 & -1 & -2 \\ \hline 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & & -2 & -1 \\ \hline 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & & -2 \\ \hline 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|}\hline y_1' \\ \hline y_2' \\ \hline y_3' \\ \hline y_4' \\ \hline y_5' \\ \hline y_6' \\ \hline y_7' \\ \hline y_8' \\ \hline \end{array} \qquad (3.14)$$

Покладаючи число вузлів на періоді $n = 4(k+1)$, де $k = 0, 1, 2, \ldots$, отримаємо різницеве рівняння у векторно-матричній формі

$$\frac{h}{3}\overline{Y} = g\overline{Y'}, \qquad (3.15)$$

де $\overline{Y} = (y_1, y_2, ..., y_n)_t$;

$\overline{Y'} = (y_1', y_2', ..., y_n')_t$ – транспоновані матриці;

$$g = \begin{array}{|c|c|c|c|c}\hline & -2 & -1 & -2 & \\ \hline 2 & & -2 & -1 & \\ \hline 1 & 2 & & -2 & \\ \hline 2 & 1 & 2 & & \\ \hline & & & & \end{array} \qquad (3.16)$$

– квадратна матриця розмірності n.

3.2. Реалізація задачі вирівнювання цін економічних об’єктів методом невизначених коефіцієнтів розв’язування систем кінцево-різницевих рівнянь

Для *моделі вирівнювання цін економічних об’єктів* (1.25) та її розв’язку за допомогою різницевих рівнянь підвищеної точності скористаємося триточковим шаблоном і системою кінцево-різницевих рівнянь (3.13). Підставимо відповідно q, q' та p, p'.

Отримаємо

$$-q_1 + q_3 = \frac{h}{3}\left(q_1' + 4q_2' + q_3'\right),$$
$$-q_2 + q_4 = \frac{h}{3}\left(q_2' + 4q_3' + q_4'\right),$$
$$-q_3 + q_5 = \frac{h}{3}\left(q_3' + 4q_4' + q_5'\right),$$
$$-q_4 + q_6 = \frac{h}{3}\left(q_4' + 4q_5' + q_6'\right),$$
$$-q_5 + q_7 = \frac{h}{3}\left(q_5' + 4q_6' + q_7'\right),$$
$$-q_6 + q_8 = \frac{h}{3}\left(q_6' + 4q_7' + q_8'\right),$$
$$-q_7 - q_1 = \frac{h}{3}\left(q_7' + 4q_8' - q_1'\right),$$
$$-q_8 - q_2 = \frac{h}{3}\left(q_8' + 4q_1' - q_2'\right).$$

У розгорнутій матричній формі для змінних, що визначають рівень активу q, ця система буде такою:

$$\begin{array}{|c|}\hline q_1 \\ \hline q_2 \\ \hline q_3 \\ \hline q_4 \\ \hline q_5 \\ \hline q_6 \\ \hline \end{array} = \frac{h}{3} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|}\hline & -2 & -1 & -2 & -1 & -2 & -1 & -2 \\ \hline 2 & & -2 & -1 & -2 & -1 & -2 & -1 \\ \hline 1 & 2 & & -2 & -1 & -2 & -1 & -2 \\ \hline 2 & 1 & 2 & & -2 & -1 & -2 & -1 \\ \hline 1 & 2 & 1 & 2 & & -2 & -1 & -2 \\ \hline 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & & -2 & -1 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|}\hline q_1' \\ \hline q_2' \\ \hline q_3' \\ \hline q_4' \\ \hline q_5' \\ \hline q_6' \\ \hline \end{array}$$

q_7		1	2	1	2	1	2		–2		q_7'
q_8		2	1	2	1	2	1	2			q_8'

Аналогічно ми отримаємо таку систему:

$$-p_1 + p_3 = \frac{h}{3}\left(p_1' + 4p_2' + p_3' \right),$$

$$-p_2 + p_4 = \frac{h}{3}\left(p_2' + 4p_3' + p_4' \right),$$

$$-p_3 + p_5 = \frac{h}{3}\left(p_3' + 4p_4' + p_5' \right),$$

$$-p_4 + p_6 = \frac{h}{3}\left(p_4' + 4p_5' + p_6' \right),$$

$$-p_5 + p_7 = \frac{h}{3}\left(p_5' + 4p_6' + p_7' \right),$$

$$-p_6 + p_8 = \frac{h}{3}\left(p_6' + 4p_7' + p_8' \right),$$

$$-p_7 - p_1 = \frac{h}{3}\left(p_7' + 4p_8' - p_1' \right),$$

$$-p_8 - p_2 = \frac{h}{3}\left(p_8' + 4p_1' - p_2' \right).$$

У розгорнутій формі наведена вище система рівнянь для змінних, що визначають ціну p, має матричну форму

p_1			–2	–1	–2	–1	–2	–1	–2		p_1'
p_2		2		–2	–1	–2	–1	–2	–1		p_2'
p_3		1	2		–2	–1	–2	–1	–2		p_3'
p_4	$=\frac{h}{3}$	2	1	2		–2	–1	–2	–1	.	p_4'
p_5		1	2	1	2		–2	–1	–2		p_5'
p_6		2	1	2	1	2		–2	–1		p_6'
p_7		1	2	1	2	1	2		–2		p_7'
p_8		2	1	2	1	2	1	2			p_8'

Після розв'язування заданих систем рівнянь відносно моделі вирівнювання цін економічних об'єктів, ми отримаємо такі результати і зобразимо їх графічно (рис. 3.2).

Початкові умови: $q_{(0)} = 19,\ p_{(0)} = 2.$

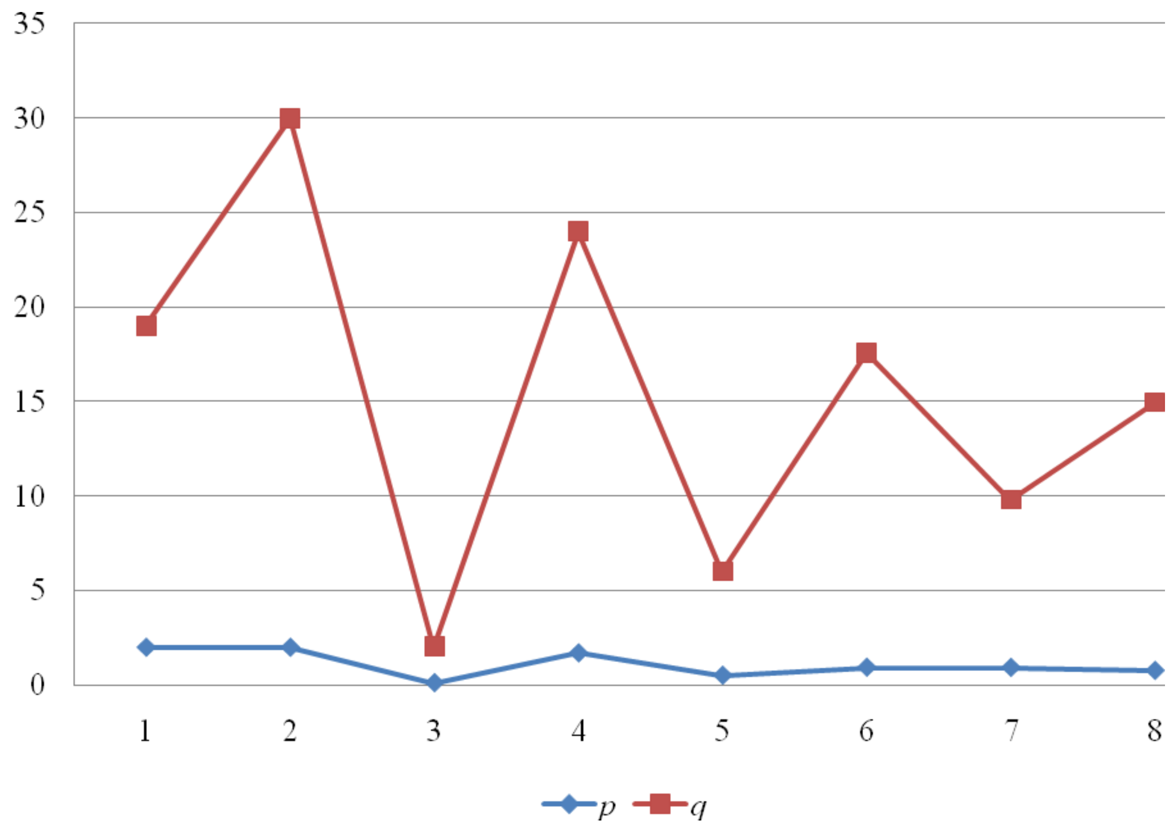

Рис. 3.2. Результат моделювання вирівнювання цін економічних об'єктів (розв'язування із використанням рівнянь із підвищеною точністю)

3.3. Метод оцінки ефективності застосування апарату кінцево-різницевих рівнянь в рішенні задач моделювання періодичних процесів в економіці

Економічна наука включає математичні методи і моделі як необхідні інструментальні засоби. Їхнє використання дає змогу формалізувати найважливіші зв'язки економних систем і на цій основі проводити їхній аналіз, здійснювати прогнозування та оптимізацію. Математичні й економетричні методи дозволяють отримувати нові знання про економічний об'єкт і його поведінку, оцінити форму і параметри залежностей його змінних [2–6].

Задачі, які розв'язують економічна наука і практика, поділяють залежно від урахування фактору часу на статичні і динамічні. Статика вивчає стан економічних об'єктів у певний момент часу без урахування зміни їхніх параметрів у часі. у динамічних задачах відображається не лише залежність змінних від часу, а і їхній взаємозв'язок у часі. Як приклад наведемо залежність динаміки величини основного капіталу від динаміки інвестицій, що, у свою чергу, призведе до зміни обсягу випуску [13; 14].

В економічній динаміці використовують неперервний і дискретний час. Неперервний час зручний для моделювання, оскільки дає змогу використовувати апарат диференціального числення і диференціальних рівнянь. Дискретний час зручний для розв'язування прикладних задач, оскільки статистичні дані завжди дискретні і належать вони до конкретних одиниць часу. Для дискретного часу використовується апарат різницевих рівнянь. До речі, відомі моделі економічної динаміки існують як у неперервному, так і в дискретному варіантах. В обох випадках вони мають приблизно однакову точність і рівень складності самих моделей практично однаковий [10–12].

Кінцево-різницевий метод

Визначення наступного значення, невідомого через попереднє значення, за заданих початкових умов $q_{(0)} = 19,\ p_{(0)} = 2$ – це розрахунок *перехідного процесу.*

$$\begin{cases} \dfrac{q_{n+1} - q_n}{\Delta t} = 9 \cdot p_n - 12; \\ \dfrac{p_{n+1} - p_n}{\Delta t} = 2 - 0{,}1 \cdot q_n; \end{cases} \tag{3.17}$$

$$\begin{cases} q_{n+1} = q_n + (9 p_n - 12) \cdot \Delta t; \\ p_{n+1} = p_n + (2 - 0{,}1 q_n) \cdot \Delta t. \end{cases} \tag{3.18}$$

Якщо не фіксувати період T, то графічні зображення результатів обчислення виразів (3.18) за початкових умов $q_{(0)} = 19,\ p_{(0)} = 2,\ \Delta t.$ будуть такими, як це зображено на рис. 3.3.

Із наведених результатів можна зробити висновок про перехідний процес.

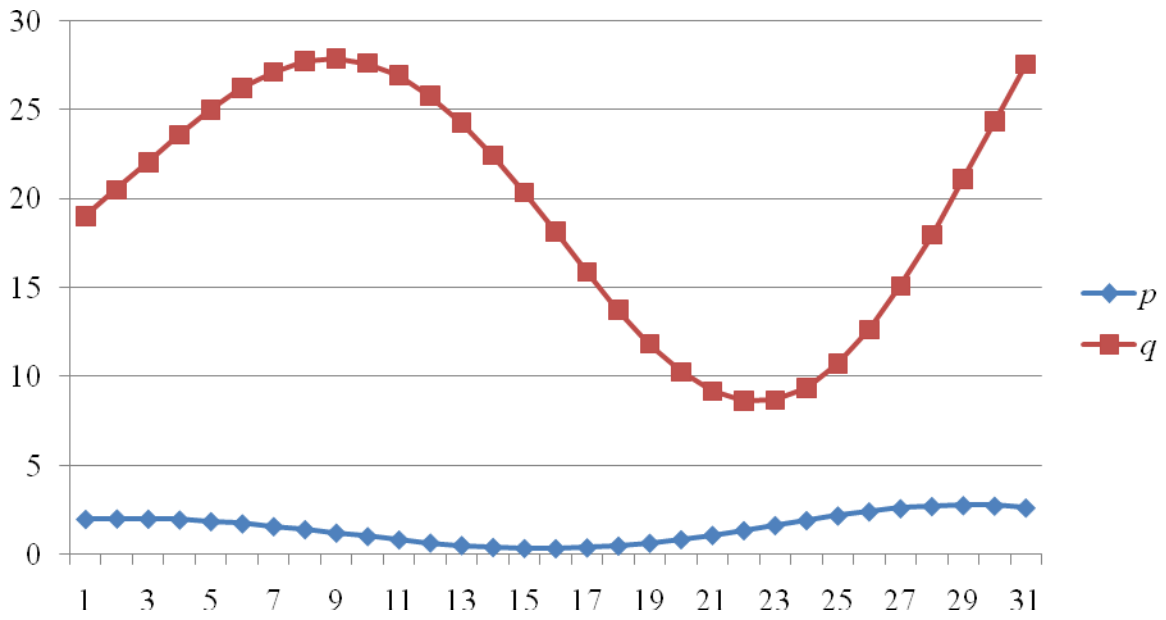

Рис. 3.3. Результат моделювання вирівнювання цін економічних об’єктів (кінцево-різницевим методом)

Розв’язування крайової задачі на основі моделі вирівнювання цін економічних об’єктів.

1. Модель на основі лінійної системи дифрівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dq}{dt} = 9 \cdot p - 12; \\ \dfrac{dp}{dt} = 2 - 0{,}1 \cdot q; \end{cases}$$

які мають початкові умови $q_{(0)} = 19,\ p_{(0)} = 2.$

2. Крайова задача на основі лінійної системи дифрівнянь.

Різницевий триточковий шаблон для функції $\dfrac{dy}{dt} = f(y;t),$ де y – це q або $p,$ буде таким:

$$\frac{-3y_{m-1}+3y_{m+1}}{h}=y'_{m-1}+4y'_m+y'_{m+1}; \tag{3.19}$$

$$-3y_{m-1}+3y_{m+1}=h\cdot(y'_{m-1}+4y'_m+y'_{m+1});$$

або

$$-y_{m-1}+y_{m+1}=\frac{h}{3}\cdot(y'_{m-1}+4y'_m+y'_{m+1}). \tag{3.20}$$

Тоді

$$-q_{m-1}+q_{m+1}=\frac{h}{3}\cdot\left[9p_{m-1}-12+4\cdot(9p_m-12)+9p_{m+1}-12\right]; \tag{3.21}$$

$$-p_{m-1}+p_{m+1}=\frac{h}{3}\cdot\left[2-0{,}1q_{m-1}+4\cdot(2-0{,}1q_m)+2-0{,}1q_{m+1}\right]. \tag{3.22}$$

3. Візьмімо десят точок на періоді,

де $n=10$ – число вузлів на періоді;

$N=2$ – число диференціальних рівнянь;

$n\cdot N=20$ – порядок системи різницевих рівнянь;

після чого різницеві рівняння (3.21) і (3.22) перетворимо в систему різницевих рівнянь для триточкового шаблону і вони будуть такими:

$$\begin{cases} -p_1+p_3=\frac{h}{3}\left(12-0{,}1q_1-0{,}4q_2-0{,}1q_3\right);\\ -p_2+p_4=\frac{h}{3}\left(12-0{,}1q_2-0{,}4q_3-0{,}1q_4\right);\\ -p_3+p_5=\frac{h}{3}\left(12-0{,}1q_3-0{,}4q_4-0{,}1q_5\right);\\ -p_4+p_6=\frac{h}{3}\left(12-0{,}1q_4-0{,}4q_5-0{,}1q_6\right);\\ -p_5+p_7=\frac{h}{3}\left(12-0{,}1q_5-0{,}4q_6-0{,}1q_7\right); \end{cases} \tag{3.23}$$

$$\begin{cases} -p_6+p_8=\dfrac{h}{3}\left(12-0{,}1q_6-0{,}4q_7-0{,}1q_8\right); \\ -p_7+p_9=\dfrac{h}{3}\left(12-0{,}1q_7-0{,}4q_8-0{,}1q_9\right); \\ -p_8+p_{10}=\dfrac{h}{3}\left(12-0{,}1q_8-0{,}4q_9-0{,}1q_{10}\right); \\ -p_9+p_{11}=\dfrac{h}{3}\left(12-0{,}1q_9-0{,}4q_{10}-0{,}1q_{11}\right); \\ -p_{10}+p_{12}=\dfrac{h}{3}\left(12-0{,}1q_{10}-0{,}4q_{11}-0{,}1q_{12}\right); \end{cases}$$

$$\begin{cases} -q_1+q_3=h\cdot(3p_1+12p_2+3p_3-24); \\ -q_2+q_4=h\cdot(3p_2+12p_3+3p_4-24); \\ -q_3+q_5=h\cdot(3p_3+12p_4+3p_5-24); \\ -q_4+q_6=h\cdot(3p_4+12p_5+3p_6-24); \\ -q_5+q_7=h\cdot(3p_5+12p_6+3p_7-24); \\ -q_6+q_8=h\cdot(3p_6+12p_7+3p_8-24); \\ -q_7+q_9=h\cdot(3p_7+12p_8+3p_9-24); \\ -q_8+q_{10}=h\cdot(3p_8+12p_9+3p_{10}-24); \\ -q_9+q_{11}=h\cdot(3p_9+12p_{10}+3p_{11}-24); \\ -q_{10}+q_{12}=h\cdot(3p_{10}+12p_{11}+3p_{12}-24); \end{cases} \tag{3.24}$$

Задаємося визначальними величинами $Y=(q_1,\, q_3,\, p_1,\, p_3)^t$.

Записуємо розв’язки за рекурентними формулами:

$$\begin{cases} p_2=2-\dfrac{(q_1-q_3)}{12h}-\dfrac{(p_1+p_3)}{4}; \\ p_3=2-\dfrac{(q_2-q_4)}{12h}-\dfrac{(p_2+p_4)}{4}; \\ p_4=2-\dfrac{(q_3-q_5)}{12h}-\dfrac{(p_3+p_5)}{4}; \\ p_5=2-\dfrac{(q_4-q_6)}{12h}-\dfrac{(p_4+p_6)}{4}; \\ p_6=2-\dfrac{(q_5-q_7)}{12h}-\dfrac{(p_5+p_7)}{4}; \\ p_7=2-\dfrac{(q_6-q_8)}{12h}-\dfrac{(p_6+p_8)}{4}; \end{cases} \tag{3.25}$$

$$\begin{cases} p_8 = 2 - \dfrac{(q_7 - q_9)}{12h} - \dfrac{(p_7 + p_9)}{4}; \\ p_9 = 2 - \dfrac{(q_8 - q_{10})}{12h} - \dfrac{(p_8 + p_{10})}{4}; \\ p_{10} = 2 - \dfrac{(q_9 - q_{11})}{12h} - \dfrac{(p_9 + p_{11})}{4}; \\ p_{11} = 2 - \dfrac{(q_{10} - q_{12})}{12h} - \dfrac{(p_{10} + p_{12})}{4}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} q_2 = 30 - \dfrac{(q_1 + q_3)}{4} + \dfrac{15 \cdot (p_1 - p_3)}{2h}; \\ q_3 = 30 - \dfrac{(q_2 + q_4)}{4} + \dfrac{15 \cdot (p_2 - p_4)}{2h}; \\ q_4 = 30 - \dfrac{(q_3 + q_5)}{4} + \dfrac{15 \cdot (p_3 - p_5)}{2h}; \\ q_5 = 30 - \dfrac{(q_4 + q_6)}{4} + \dfrac{15 \cdot (p_4 - p_6)}{2h}; \\ q_6 = 30 - \dfrac{(q_5 + q_7)}{4} + \dfrac{15 \cdot (p_5 - p_7)}{2h}; \\ q_7 = 30 - \dfrac{(q_6 + q_8)}{4} + \dfrac{15 \cdot (p_6 - p_8)}{2h}; \\ q_8 = 30 - \dfrac{(q_7 + q_9)}{4} + \dfrac{15 \cdot (p_7 - p_9)}{2h}; \\ q_9 = 30 - \dfrac{(q_8 + q_{10})}{4} + \dfrac{15 \cdot (p_8 - p_{10})}{2h}; \\ q_{10} = 30 - \dfrac{(q_9 + q_{11})}{4} + \dfrac{15 \cdot (p_9 - p_{11})}{2h}; \\ q_{11} = 30 - \dfrac{(q_{10} + q_{12})}{4} + \dfrac{15 \cdot (p_{10} - p_{12})}{2h}. \end{cases} \qquad (3.26)$$

Тепер приймаємо, що визначальні величини дорівнюють (табл. 3.1):

Таблиця 3.1

p_1	p_3	q_1	q_3	h
0	0	0	0	7,00

Тоді після обчислення отримаємо дані, відображені в табл. 3.2.

Таблиця 3.2

№	p	q
2	2,000000	30,000000
3	0,000000	0,000000
4	1,307692	21,692308
5	0,724260	7,029586
6	0,831797	16,853410
7	0,958728	10,395446
8	0,751018	14,445899
9	0,960835	12,089449
10	0,782081	13,314742
11	0,920342	12,792530
12	0,820753	12,914861
13	0,888117	12,993431
14	0,845358	12,834724

Тепер по два рівняння систем (3.23) і (3.24), тобто дев’яті і десяті, визначають остачу розв’язку, тобто нев’язки

$$\begin{cases} \Delta_{11}^{0} = h\cdot(3p_9 + 12p_{10} + 3p_{11} - 24) + q_9 - q_{11}; \\ \Delta_{12}^{0} = h\cdot(3p_{10} + 12p_{11} + 3p_{12} - 24) + q_{10} - q_{12}; \end{cases} \tag{3.27}$$

$$\begin{cases} \Delta_{21}^{0} = \dfrac{h}{3}\left(12 - 0{,}1q_9 - 0{,}4q_{10} - 0{,}1q_{11}\right) + p_9 - p_{11}; \\ \Delta_{22}^{0} = \dfrac{h}{3}\left(12 - 0{,}1q_{10} - 0{,}4q_{11} - 0{,}1q_{12}\right) + p_{10} - p_{12}. \end{cases} \tag{3.28}$$

Нульові нев’язки $\Delta_0 = (\Delta_{11}^0, \Delta_{12}^0, \Delta_{21}^0, \Delta_{22}^0)$, після розв’язку систем рекурентних рівнянь, будуть такими:

$$\Delta_0 = (\text{-}61{,}28006144;\ \text{-}58{,}32972217;\ 9{,}961630512;\ 9{,}839955372)$$

Далі приймаємо почергову зміну визначальних величин (табл.3.3).

Таблиця 3.3

p_1	p_3	q_1	q_3	h
1	0	0	0	7,00

Відповідно записуємо в табл. 3.4.

Таблиця 3.4

№	p	q
2	1,750000	31,071429
3	0,000000	0,000000
4	1,348116	21,151884
5	0,692489	7,565753
6	0,854065	16,497242
7	0,941541	10,588179
8	0,764839	14,357569
9	0,950149	12,120419
10	0,789787	13,312561
11	0,915179	12,781815
12	0,823964	12,929866
13	0,886279	12,978602
14	0,846298	12,847335

Нев’язки дорівнюватимуть

(-61,15323431; -58,39456157; 9,950261811; 9,84962326)

Аналогічно приймаємо значення для таких величин (табл. 3.5).

Таблиця 3.5

p_1	p_3	q_1	q_3	h
0	1	0	0	7,00

У результаті отримаємо табл. 3.6.

Таблиця 3.6

№	p	q
2	1,750000	28,928571
3	0,000000	0,000000
4	1,377159	21,622841
5	0,660850	7,157831
6	0,874688	16,776498
7	0,932123	10,400502
8	0,767141	14,485896
9	0,951322	12,033847
10	0,787348	13,368160
11	0,917777	12,748698
12	0,821688	12,947637
13	0,888075	12,970544
14	0,844982	12,849749

(-61,27715629; -58,30375986; 9,944084083; 9,85147455)

Аналогічно задаємо для q (табл. 3.7).

Таблиця 3.7

p_1	p_3	q_1	q_3	h
0	0	1	0	7,00

Чисельні значення для q і p наводимо в табл. 3.8.

Таблиця 3.8

№	p	q
2	1,988095	29,750000
3	0,000000	0,000000
4	1,313697	21,732732
5	0,718303	6,997814
6	0,835754	16,875679
7	0,956586	10,378260
8	0,752000	14,459720
9	0,960491	12,078762
10	0,782105	13,322449
11	0,920461	12,787368
12	0,820586	12,918072
13	0,888282	12,991593
14	0,845218	12,835664

(-61,29143014; -58,32005429; 9,960221322; 9,840675809)

Остаточно для q_3 (табл. 3.9).

Таблиця 3.9

p_1	p_3	q_1	q_3	h
0	0	0	1	7,00

Отримані нев’язки матимуть значення, відображені в табл. 3.10.

Таблиця 3.10

№	p	q
2	2,011905	29,750000
3	0,000000	0,000000
4	1,308464	21,761774
5	0,722835	6,966176
6	0,832651	16,896302
7	0,958671	10,368841
8	0,750574	14,462022
9	0,961453	12,079935
10	0,781487	13,320009
11	0,920829	12,789965
12	0,820388	12,915796
13	0,888371	12,993389
14	0,845191	12,834348

(-61,29760787; -58,318203; 9,961598232; 9,839666901)

Тепер формуємо систему рівнянь нев’язок

$$\underbrace{\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline -61{,}153234 & -61{,}2772 & -61{,}2914 & -61{,}2976 \\ \hline -58{,}394562 & -58{,}3038 & -58{,}3201 & -58{,}3182 \\ \hline 9{,}95026181 & 9{,}944084 & 9{,}960221 & 9{,}961598 \\ \hline 9{,}84962326 & 9{,}851475 & 9{,}840676 & 9{,}839667 \\ \hline \end{array}}_{\Delta} \times \underbrace{\begin{array}{|c|}\hline p_1 \\ \hline p_3 \\ \hline q_1 \\ \hline q_3 \\ \hline \end{array}}_{Y} = \underbrace{\begin{array}{|c|}\hline -61{,}2801 \\ \hline -58{,}3297 \\ \hline 9{,}961631 \\ \hline 9{,}839955 \\ \hline \end{array}}_{\Delta_0}$$

Для компактного представлення наведеної вище системи рівнянь скористаємося матричним зображенням

$$\mathrm{Y} = \Delta^{-1} \cdot \Delta_0 \tag{3.29}$$

Звідси отримуємо розв’язок (табл. 3.11).

Таблиця 3.11

p_1	0,03125
p_3	-0,15625
q_1	1,5
q_3	-0,5

Підставимо значення в систему рекурентних рівнянь (табл. 3.12).

Таблиця 3.12

№	*p*	*q*	*h*
1	0,03125	1,5	7,00
2	2,007440	29,950893	
3	-0,156250	-0,500000	
4	1,456082	22,029484	
5	0,624945	6,774620	
6	0,888905	17,103985	
7	0,928725	10,151755	
8	0,765265	14,657739	
9	0,955409	11,924017	
10	0,782785	13,433258	
11	0,921911	12,713519	
12	0,818353	12,964053	
13	0,890553	12,965087	
14	0,843261	12,849398	

Проілюструємо отримані результати на рис. 3.4.

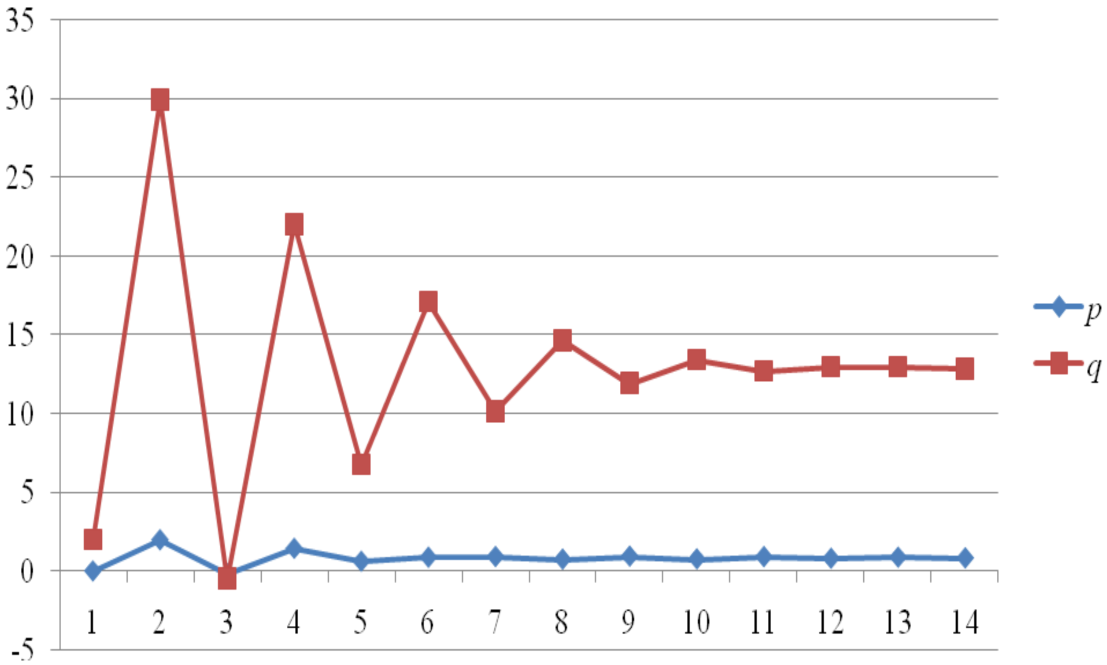

Рис. 3.4. Результат моделювання вирівнювання цін економічних об’єктів (розв’язування крайової задачі)

Якщо ми приймемо ***крайові умови***

$$q_8 = -q_2$$
$$q_9 = -q_3$$
$$p_8 = -p_2$$
$$p_9 = -p_3,$$

то отримаємо такі результати, відображені в табл. 3.13, 3.14.

Таблиця 3.13

p_7	$p_9 = -p_3$	q_7	$q_9 = -q_3$
0,928725	0,15625	10,15175533	0,5

Таблиця 3.14

№	p	q	h
7	0,928725	10,15175533	7,00
8	1,613854	28,164713	
9	0,156250	0,500000	
10	1,268074	21,307347	
11	0,723662	7,429064	
12	0,842177	16,520390	
13	0,947279	10,623904	
14	0,761475	14,310300	
15	0,951994	12,160094	
16	0,789058	13,283926	
17	0,915203	12,801104	
18	0,824292	12,917486	
19	0,885836	12,986123	
20	0,846725	12,843105	

Результат моделювання вирівнювання цін економічних об’єктів із накладенням крайових умов буде таким (рис. 3.5.):

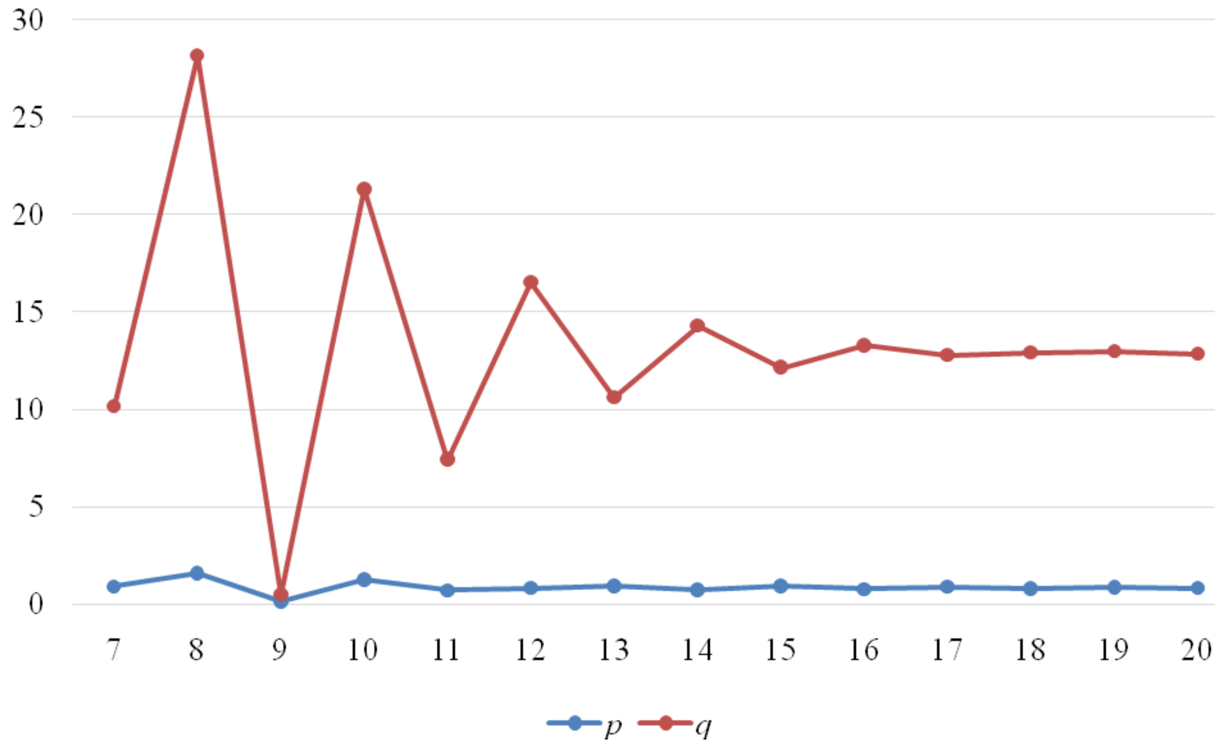

Рис. 3.5. Результат моделювання вирівнювання цін економічних об’єктів (розв’язування із накладенням крайових умов)

Порівняння результатів розв’язування моделі вирівнювання цін економічних об’єктів з використанням рівнянь підвищеної точності та із накладанням крайових умов зображено на рис. 3.6.

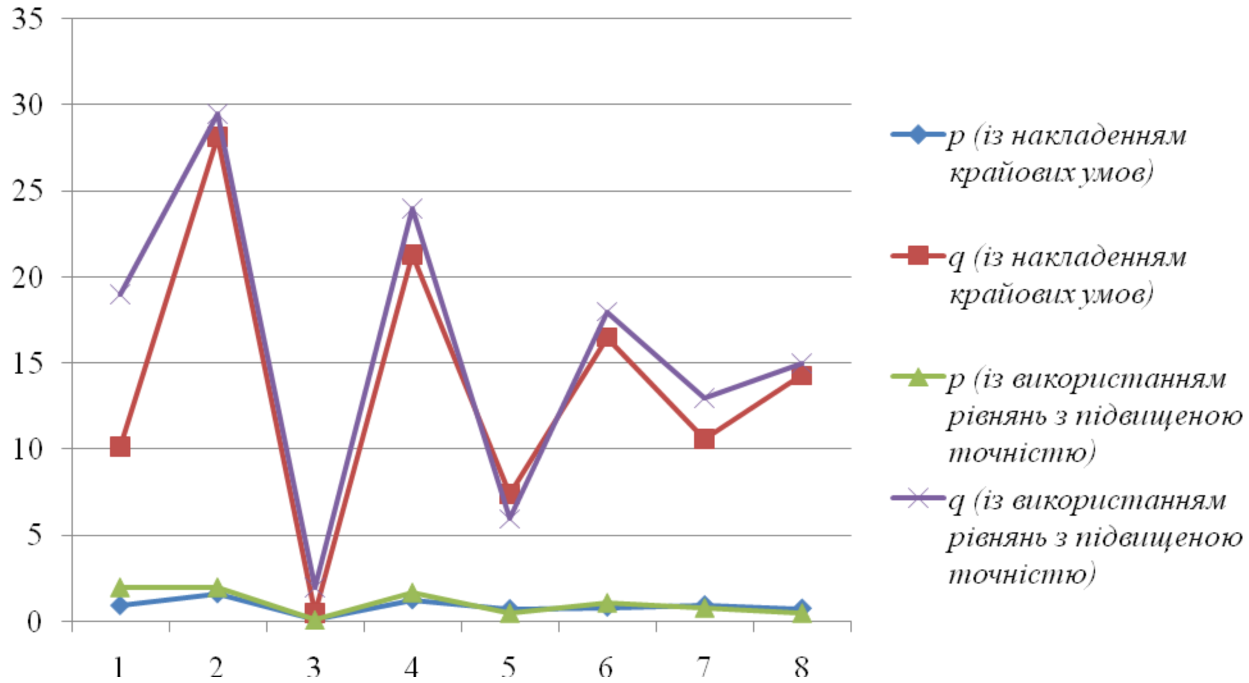

Рис. 3.6. Результат моделювання вирівнюванняцін економічних об’єктів

Чисельний експеримент розв'язування моделі вирівнювання цін економічних об'єктів методом крайової задачі та методом розв'язання рівнянь підвищеної точності показує більш високу точність, отриману першим методом. Точність розрахунку лежить у межах 5–10%.

При розв'язанні моделі вирівнювання цін для ТзОВ «Дженерал Менеджмент», на прикладі одного з видів продукції, було отримано наступні результати (табл. 3.15):

Таблиця 3.15

Результати вирівнювання цін для ТзОВ «Дженерал Менеджмент»

№	p (із накладенням крайових умов)	q (із накладенням крайових умов)	p (із використанням рівнянь з підвищеною точністю)	q (із використанням рівнянь з підвищеною точністю)
1	140,93	145,15	142	154
2	141,61	160,16	140	164,5
3	140,15	135,5	138,1	137
4	141,27	156,31	139,7	159
5	140,72	139,43	138,5	141
6	140,84	151,52	139,1	153
7	140,95	145,62	138,8	148
8	140,76	149,31	138,5	150
9	140,75	147,31	138,3	146,5
10	140,71	147,03	138,125	145,54
11	140,67	146,74	137,95	144,58
12	140,64	146,45	137,775	143,63

Графічно результати відображені на рис. 3.7:

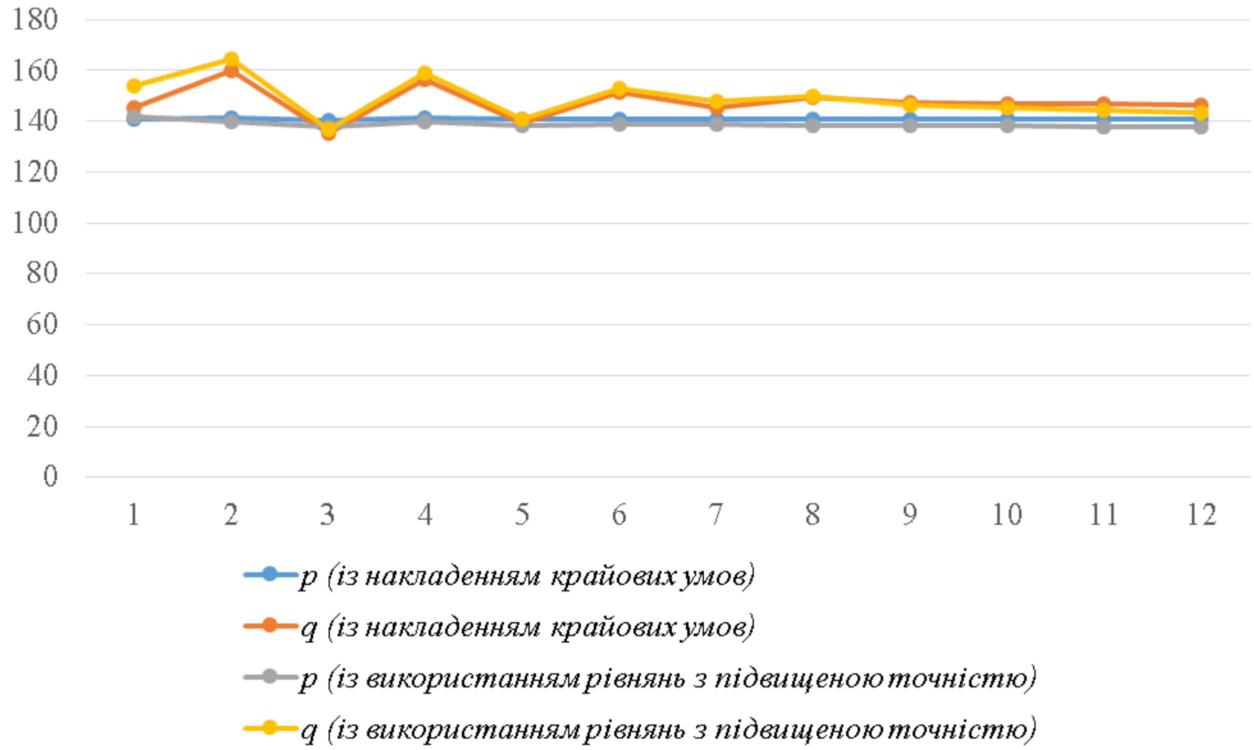

Рис. 3.7. Результат моделювання вирівнювання цін для ТзОВ «Дженерал Менеджмент»

Після розв’язання моделі вирівнювання цін для ТзОВ «Дженерал Менеджмент» на решті видів продукції, очікуваний економічний ефект склав 76,5 тис. грн., а для ТзОВ «Українська меблева марка» – 78 тис. грн. Загальний очікуваний економічний ефект від впровадження результатів дисертаційної роботи склав 154,5 тис. грн.

Висновки до розділу 3

У третьому розділі описано, як для зменшення кількості різницевих рівнянь при збереженні необхідної точності результатів доцільно використовувати апроксимації, які враховують більшу кількість членів розкладання шуканого рішення в ряд Тейлора. Коефіцієнти таких апроксимацій знаходимо за методом невизначених коефіцієнтів. Запропоновано метод визначення різницевих рівнянь, які апроксимують диференціальні рівняння.

Розглянуто математичне моделювання і комп'ютерну симуляцію періодичних економічних процесів, дискретних у часі. Приведено методологію заміни диференціальних рівнянь різницевими. Досліджено модель вирівнювання цін за рівнем активу. Розв'язування та аналіз виконано двома чисельними способами: методом невизначених коефіцієнтів і розв'язанням крайової задачі.

Розроблено раціональні способи апроксимації диференціальних рівнянь різницевими при моделюванні економічних процесів, дискретних у часі. Отримано різницеві рівняння підвищеної точності, які дають змогу ціною незначного ускладнення розрахункових формул суттєво скоротити загальне число прораховуваних вузлів і в кінцевому підсумку вимагають менших обчислювальних затрат.

Розв'язання кінцево-різницевих рівнянь підвищеної точності відносно вузлових функцій значно спрощує й полегшує процедуру апроксимації диференціальних рівнянь економічного процесу різницевими рівняннями.

Запропонований метод отримання різницевих рівнянь підвищеної точності є загальним і може бути поширений на будь-яку кількість вузлів дискретної сітки.

Чисельне рішення моделі вирівнювання цін за рівнем активу підтвердило високу точність запропонованих кінцево-різницевих рівнянь.

Список використаних джерел до розділу 3

1. Білий Л. А. Різницеві рівняння підвищеної точності для моделювання динаміки економічних процесів / Л. А. Білий, Р. О. Циганчук // Вісник Університету банківської справи (м. Київ) : зб. наук. пр. – 2015. – № 1 (22). – С. 124–131.
2. Кривцов О. С. Макроекономіка у запитаннях та відповідях / О. С. Кривцов, В. М. Бережний, В. М. Онегіна. – К. : ЦНЛ, 2004. – 200 с.

3. Наливайко А. П. Теорія стратегії підприємства : сучасний стан та напрямки розвитку / А. П. Наливайко. – К. : КНЕУ, 2001. – 227 с.
4. Нельсон Р. Эволюционная теория экономических изменений / Р. Нельсон, С. Уинтер. – М. : ЗАО «Финстатинформ», 2000. – 474 с.
5. Таха Х. Введение в исследование операций : в 2 т. / Х. Таха – М. : Мир, 1985. – Т. 2.
6. Трояновский В. М. Математическое моделирование в менеджменте : учеб. пособие / В. М. Трояновский. – М. : Русская деловая литература, 1999. – 240 с.
7. Фромкис В. А. Введение в теорию и методы оптимизации для экономистов / В. А. Фромкис. – СПб. : Питер, 2002.
8. Циганчук Р. О. Метод розв'язання різницевих рівнянь відносно вузлових функцій для моделювання економічних процесів, дискретних у часі / Р. О. Циганчук // Вісник Одеського національного університету (м. Одеса) : наук. журн. – 2014. – Т. 19. – Вип. 3/4. – С. 251–254. – (Серія : Економіка).
9. Циганчук Р. О. Моделювання економічних процесів, дискретних у часі, різницевими рівняннями, розв'язаними відносно вузлових функцій / Р. О. Циганчук // Вісник Університету банківської справи Національного банку України (м. Київ) : зб. наук. пр. – 2014. – № 2 (20). – С. 248–252.
10. Циганчук Р. О. Моделювання періодичних економічних процесів / Р. О. Циганчук // Вісник Університету банківської справи (м. Київ) : зб. наук. пр. – 2017. – № 2 (29). – С. 75–79.
11. Циганчук Р. О. Розв'язання різницевих рівнянь відносно вузлових функцій у моделі економічних процесів дискретних у часі / Р. О. Циганчук // Формування ринкової економіки в Україні (м. Львів) : зб. наук. пр. / Львівський національний університет імені Івана Франка. – 2014. – Вип. 32. – С. 159–165.
12. Tsyhanchuk R. O. Modelling of periodic economic processes discrete in time / R. O. Tsyhanchuk // Actual problems of modern science : monograph / edited

by Musial Janusz, Polishchuk Oleh, Sorokatji Ruslan ; UTP University of Science and Technology. – Bydgoszcz, 2017. – 921 p.

13. Alchian A. Uncertainty, Evolution, and Economic Theory / A. Alchian // The Journal of Political Economy. – 1950. – Vol. 58. – № 3. – P. 211–221.

14. Patinkin D. Money, interest, and prices: an integration of monetary and value theory / D. Patinkin. – 2nd ed. – New York, 1965. – 708 p.

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі вирішено нове важливе для економіки України наукове завдання моделювання періодичних процесів в економіці, яке спрямоване на підвищення загальної ефективності функціонування економічних об'єктів. При цьому отримано наукові результати, за якими зроблено наступні висновки:

1. Досліджено і обґрунтовано необхідність розвитку математичного моделювання і методів аналізу періодичних процесів в економіці, так як економічний цикл – неминучий і необхідний елемент розвитку світової економіки.

2. Доведено, що головною ціллю моделювання економічних циклів є пояснення фундаментальних причин коливання економічної активності в часі, а також визначення основних факторів, які безпосередньо породжують коливання економічної кон'юнктури і механізмів їх дії.

3. Для реалізації мети наукового завдання, щодо моделювання періодичних процесів в економіці, розроблено концепцію моделювання періодичних процесів в економіці на основі періодичної крайової задачі, вирішення задачі пошуку періодичних розв'язків методом невизначених коефіцієнтів, а також використання різницевих рівнянь, розв'язаних відносно вузлових функцій моделі.

4. Для підвищення точності і полегшення процедури апроксимації диференціальних рівнянь кінцево-різницевими, розроблено раціональні способи апроксимації диференціальних рівнянь економічного стану кінцево-різницевими та отримано різницеві рівняння підвищеної точності, які дають змогу ціною незначних ускладнень розрахункових формул скоротити загальне число прораховуваних вузлів і, отже, в кінцевому підсумку зменшити обсяг обчислень.

5. Для підвищення загальної ефективності діяльності економічних об'єктів розроблено дискретні в часі математичні моделі вирівнювання цін

економічних об’єктів на основі звичайних різницевих рівнянь і рівнянь підвищеної точності, проведено порівняння чисельного експерименту обох моделей.

6. Для спрощення та скорочення часу дослідження розвинуто методи розв’язування систем різницевих рівнянь, які поділяються на дві групи: прямі, або безітераційні, методи, за допомогою яких отримують точний розв’язок за кінцеве число арифметичних операцій, та ітераційні, доведено, що використання останніх ускладнюється проблемою збіжності ітераційного процесу.

7. Розроблено математичні моделі вирівнювання цін економічних об’єктів, що розв’язані за алгоритмами, які враховують специфічну структуру систем кінцево-різницевих рівнянь, що дозволяє розглядати періодичні процеси в економіці у дискретні моменти часу, а не як неперервні.

8. Для побудови систем кінцево-різницевих рівнянь математичних моделей економіки розвинуто використання методу невизначених коефіцієнтів, що дозволило ефективно досліджувати періодичні процеси в економіці.

9. Розроблено і представлено підхід до дослідження періодичних процесів в економіці на основі побудови математичних моделей і методів їх аналізу, впровадження якої сприяє зростанню економічної ефективності функціонування об'єктів економіки.

10. Впровадження наукових результатів дослідження знайшли своє практичне застосування у діяльності суб’єктів господарювання різних галузей, а саме: ТзОВ «Дженерал Менеджмент» та ТзОВ «Українська меблева марка», при цьому загальний очікуваний економічний ефект від впровадження результатів дисертаційної роботи склав 154,5 тис. грн.

ДОДАТКИ

ДОДАТОК А

Список публікацій здобувача за темою дисертації

в яких опубліковані основні наукові результати дисертації:

1. Циганчук Р. О. Моделювання економічних процесів, дискретних у часі, різницевими рівняннями, розв'язаними відносно вузлових функцій / Р. О. Циганчук // Вісник Університету банківської справи Національного банку України (м. Київ) : зб. наук. пр. – 2014. – № 2 (20). – С. 248–252 (0,51 друк. арк.).
2. Циганчук Р. О. Метод розв'язання різницевих рівнянь відносно вузлових функцій для моделювання економічних процесів, дискретних у часі / Р. О. Циганчук // Вісник Одеського національного університету (м. Одеса) : наук. журн. – 2014. – Т. 19. – Вип. 3/4. – (Серія : Економіка) – С. 251–254 (0,51 друк. арк.).
3. Циганчук Р. О. Розв'язання різницевих рівнянь відносно вузлових функцій у моделі економічних процесів дискретних у часі / Р. О. Циганчук // Формування ринкової економіки в Україні (м. Львів) : зб. наук. пр. / Львівський національний університет імені Івана Франка – 2014. – Вип. 32. – С. 159–165 (0,51 друк. арк.).
4. Циганчук Р. О. Моделювання періодичних економічних процесів / Р. О. Циганчук // Вісник Університету банківської справи (м. Київ) : зб. наук. пр. – 2017. – № 2 (29). – С. 75–79 (0,48 друк. арк.).
5. Циганчук Р. О. Моделювання періодичних економічних процесів, дискретних у часі / Р. О. Циганчук // Бізнес-навігатор : наук.-вироб. журн. – 2017. – Вип. 4-2 (43). – С. 162–166 (0,55 друк. арк.).
6. Tsyhanchuk R. O. Modelling of periodic economic processes discrete in time / R. O. Tsyhanchuk // Actual problems of modern science : monograph / edited by Musial Janusz, Polishchuk Oleh, Sorokatji Ruslan ; UTP University of Science and Technology, Bydgoszcz. – 2017. – ISBN 978-83-938655-3-6. – 921 p. (57,56 друк. арк., *особисто автором* описано моделювання періодичних економічних процесів, дискретних у часі (С. 68–79) – 0,54 друк. арк.).

які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

7. Циганчук Р. О. Моделювання динаміки економічних процесів, що є дискретними у часі / Р. О. Циганчук // Сучасні наукові підходи до стабільного економічного розвитку та економічної безпеки : матеріали Міжнародної науково-практичної конференції, 21–22 лютого 2014 р. / Чернігівський державний технологічний університет. – Чернігів : Видавничий дім «Гельветика», 2014. – С. 242–245 (0,22 друк. арк.).
8. Циганчук Р. О. Метод отримання різницевих рівнянь для моделювання економічних процесів / Р. О. Циганчук // Формування інформаційної економіки: світовий досвід та вітчизняні реалії : матеріали Міжнародної науково-практичної конференції (м. Херсон, 14–15 березня 2014 р.) / ред. кол. : К. С. Шапошников [та ін.]. – Херсон : Видавничий дім «Гельветика», 2014. – С. 167–170 (0,22 друк. арк.).
9. Циганчук Р. О. Моделювання динаміки економічних процесів дискретних у часі / Р. О. Циганчук // Теоретичні та прикладні аспекти аналізу фінансових систем : збірник тез XIV Міжнародної науково-практичної конференції аспірантів та студентів, 26–27 березня 2014 р. / відп. за вип. В. В. Рисін ; Львівський інститут банківської справи Національного банку України. – Львів, 2014. – С. 534–536 (0,13 друк. арк.).
10. Циганчук Р. О. Розв’язання різницевих рівнянь відносно вузлових функцій у моделі економічних процесів, дискретних у часі / Р. О. Циганчук // Моделювання економіки: проблеми, тенденції, досвід : тези доповідей V Міжнародної науково-методичної конференції Форуму молодих економістів-кібернетиків, 2–3 жовтня 2014 р., м. Львів / відп. ред. В. М. Вовк ; Видавничий центр ЛНУ ім. І. Франка, 2014. – С. 73–75 (0,09 друк. арк.).
11. Циганчук Р. О. Застосування різницевих рівнянь у моделюванні економічних процесів / Р. О. Циганчук // Розвиток національної економіки: теорія і практика : матеріали Міжнародної науково-практичної конференції, 3–4 квітня 2015 року, проведеної на базі «Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника», м. Івано-Франківськ. – Тернопіль : Крок, 2015. – Ч. 3. – С. 402–403 (0,13 друк. арк.).
12. Циганчук Р. О. Використання різницевих рівнянь у моделюванні економічних процесів / Р. О. Циганчук // Проблеми забезпечення ефективного функціонування та стабільного розвитку банківської системи України : тези доповідей учасників V науково-практичної конференції студентів, аспірантів та молодих вчених. – Київ : УБС НБУ, 2015. – С. 202–203 (0,13 друк. арк.).

13. Циганчук Р. О. Моделювання періодичних процесів макроекономіки / Р. О. Циганчук // матеріали XXIII Міжнародної науково-практичної інтернет-конференції «Проблеми та перспективи розвитку науки на початку третього тисячоліття у країнах Європи та Азії» : зб. наук. пр. – Переяслав-Хмельницький, 2016. – С. 43–45 (0,2 друк. арк.).
14. Циганчук Р. О. Моделювання періодичних процесів / Р. О. Циганчук // Проблеми розвитку фінансово-кредитної системи : збірник тез XVI Міжнародної наукової конференції молодих вчених, аспірантів та студентів, приуроченої до 25-річчя Незалежності України, 14–15 квітня 2016 року / ЛННІ ДВНЗ «Університет банківської справи». – Львів, 2016. – С. 665–666 (0,13 друк. арк.).
15. Циганчук Р. О. Застосування різницевих рівнянь в економіці / Р. О. Циганчук // Інформаційні технології в соціокультурній сфері, освіті та економіці : матеріали Міжнародної науково-практичної конференції студентів і молодих учених / М-во освіти і науки України ; М-во культури України ; Київ. нац. ун-т культури і мистецтв. – Київ : Видавничий центр КНУКіМ, 2017. – С. 139–140 (0,13 друк. арк.).
16. Циганчук Р. О. Використання різницевих рівнянь в економіці / Р. О. Циганчук // Проблеми розвитку фінансово-кредитної системи : збірник тез XVI Міжнародної наукової конференції молодих вчених, аспірантів та студентів, 30–31 березня 2017 р. / ЛННІ ДВНЗ «Університет банківської справи». – Львів, 2017. – С. 629–630 (0,13 друк. арк.).

які додатково відображають наукові результати дисертації:

17. Циганчук Р. О. Метод отримання і розв’язання різницевих рівнянь при моделюванні динаміки економічних процесів дискретних у часі / Р. О. Циганчук // Економічні студії (м. Львів) : наук.-практ. журн. – 2014. – № 3 (03). – С. 94–99 (0,74 друк. арк.).
18. Циганчук Р. О. Різницеві рівняння підвищеної точності для моделювання динаміки економічних процесів / Л. А. Білий, Р. О. Циганчук // Вісник Університету банківської справи (м. Київ) : зб. наук. пр. – 2015. – № 1 (22). – С. 124–131 (0,74 друк. арк., *особисто автором розроблено* Різницеві рівняння підвищеної точності – 0,54 друк. арк.).

ДОДАТОК Б

Матеріали, що підтверджують практичну значущість результатів дисертації

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«УНІВЕРСИТЕТ БАНКІВСЬКОЇ СПРАВИ»
ЛЬВІВСЬКИЙ НАВЧАЛЬНО-НАУКОВИЙ ІНСТИТУТ

просп. Шевченка, 9, м. Львів, 79005 тел. +38 (032) 297-72-01
e-mail: libs@libs.ubs.edu.ua Код ЄДРПОУ 34716922

07.06.2018 № 02-20-015/283 на №__________ від __________

ДОВІДКА
про впровадження результатів дисертаційної роботи
Циганчука Романа Олеговича на тему
«Моделювання періодичних процесів в економіці»

Основні положення та результати дисертаційної роботи Циганчука Р.О. використано в навчальному процесі Львівського навчально-наукового інституту ДВНЗ «Університет банківської справи» при викладанні дисциплін: «Дослідження операцій», «Економічна кібернетика» та «Моделі економічної динаміки», до яких увійшли:

1) концепція моделювання періодичних процесів економіки, на основі якої періодичний розв'язок можливо отримати представленням диференціальних рівнянь економічного стану у формі крайової задачі – в курс «Моделі економічної динаміки»;
2) апарат різницевих рівнянь підвищеної точності, значно спростили і полегшили процедуру апроксимації диференціальних рівнянь кінцево-різницевими – в курс «Дослідження операцій»;
3) модель вирівнювання цін економічних об'єктів узагальнено в разі дискретної зміни рівня активу, пропорційного різниці між пропозицією і попитом – в курс «Економічна кібернетика».

Використання матеріалів дисертаційної роботи Циганчука Р.О. у викладанні сприятиме прикладній спрямованості викладання та підвищенню якості фахівців з економіки.

В.о. директора /Рисін В.В./

ТзОВ «ДЖЕНЕРАЛ МЕНЕДЖМЕНТ»

79035, Україна, м. Львів, вул. Зелена,162
Тел./факс. +380 (32)2405250
e-mail: info@folkmoda.net

Вих.№12/06/2018 від 12.06.2018р.

ДОВІДКА

про впровадження результатів дисертаційної роботи
Циганчука Романа Олеговича на тему
«Моделювання періодичних процесів в економіці»

Питання моделювання періодичних процесів в економіці України залишається актуальним у сучасних умовах для суб'єктів господарювання.

Даною довідкою підтверджується, що в діяльності ТзОВ «ДЖЕНЕРАЛ МЕНЕДЖМЕНТ» використано результати наукового дослідження Циганчука Р.О.:

1) концепцію моделювання періодичних економічних процесів;
2) метод рішення задачі вирівнювання цін економічних об'єктів, з використанням різницевих рівнянь підвищеної точності;
3) метод рішення задачі вирівнювання цін економічних об'єктів методом невизначених коефіцієнтів розв'язування систем кінцево-різницевих рівнянь.

Використання розроблених методів та моделей дозволило підвищити ефективність діяльності підприємства, що дало безпосередній економічний ефект, який оцінюється в 76,5 тис. грн.

Довідка видана для пред'явлення у спеціалізовану вчену раду по захисту кандидатських дисертацій і не є підставою для взаємних фінансових розрахунків.

Директор
ТзОВ «Дженерал менеджмент» Туганов М.В.

ТОВАРИСТВО З ОБМЕЖЕНОЮ ВІДПОВІДАЛЬНІСТЮ "ДЖЕНЕРАЛ МЕНЕДЖМЕНТ" 39024359 УКРАЇНА * м. ЛЬВІВ

ТзОВ «Українська меблева марка»
м. Львів, вул. Бескидська, буд. № 33,
Р/р 2600401373347,
Банк ПЛВ ЦФ ПАТ «Кредобанк»,
МФО 325365, код за ЄДРПОУ 20826819,
ІПН 208268113065, № свід. 18077740
тел.: 0672706300

07.06.2018р № 18

ДОВІДКА
про впровадження результатів дисертаційної роботи
Циганчука Романа Олеговича на тему
«Моделювання періодичних процесів в економіці»

У дисертації здійснено теоретичне, науково-методичне узагальнення моделювання періодичних економічних процесів та запропоновано підходи до вирішення поставленої задачі.

Даною довідкою підтверджується, що в дослідженнях, які проводить ТзОВ «Українська меблева марка», використовуються результати дисертаційної роботи Циганчука Р.О., а саме: модель вирівнювання цін економічних об'єктів, з використанням різницевих рівнянь підвищеної точності та модель вирівнювання цін економічних об'єктів методом невизначених коефіцієнтів розв'язування систем кінцево-різницевих рівнянь.

Використання розроблених моделей вирівнювання цін економічних об'єктів дозволило підвищити ефективність діяльності підприємства, що дало безпосередній економічний ефект, який оцінюється в 78 тис. грн.

Довідка видана для пред'явлення у спеціалізовану вчену раду по захисту кандидатських дисертацій і не є підставою для взаємних фінансових розрахунків.

Директор
ТзОВ «Українська меблева марка» Дулин І.С.

ТОВАРИСТВО З ОБМЕЖЕНОЮ ВІДПОВІДАЛЬНІСТЮ «УКРАЇНСЬКА МЕБЛЕВА МАРКА» УММ ЗКПО 20826819 УКРАЇНА м. ЛЬВІВ