ISBN 978-966-184-340-9

О. О. ЄМЕЦЬ

МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ ТА ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ

ЧАСТИНА 2

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

ПОЛТАВА
2019

Вищий навчальний заклад Укоопспілки
«ПОЛТАВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ ЕКОНОМІКИ І ТОРГІВЛІ»
(ПУЕТ)
Кафедра математичного моделювання
та соціальної інформатики

О. О. Ємець

МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ ТА ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ

Частина 2

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

Полтава
ПУЕТ
2019

УДК 519.852(075.8)
Є60

Рекомендувала до видання, розміщення в електронній бібліотеці та впровадження в освітній процес вчена рада Вищого навчального закладу Укоопспілки «Полтавський університет економіки і торгівлі», протокол № 12 від 25 жовтня 2018 р.

Автор:

О. О. Ємець, д. ф.-м. н., професор кафедри математичного моделювання та соціальної інформатики Вищого навчального закладу Укоопспілки «Полтавський університет економіки і торгівлі».

Рецензенти:

Т. М. Барболіна, к. ф.-м. н., доцент, завідувач кафедри математичного аналізу та інформатики ПНПУ ім. В. Г. Короленка;

Т. О. Кононович, к. ф.-м. н., доцент кафедри математичного аналізу та інформатики ПНПУ ім. В. Г. Короленка.

Ємець О. О.

Є60 Методи оптимізації та дослідження операцій : навчальний посібник / О. О. Ємець. – Полтава : ПУЕТ, 2019. – Ч. 2. – 139 с. – 1 електрон. опт. диск (CD-ROM).

ISBN 978-966-184-340-9

Посібник формує у студентів навички математичного моделювання транспортними задачами лінійної оптимізації. Студент зможе будувати математичні моделі прикладних задач, знаходити розв'язки транспортних задач методом північно-західного кута та мінімального елемента, а також одержувати оптимальні розв'язки методом потенціалів. Наведено індивідуальні розрахунково-графічні роботи та тести до всіх тем, які дозволяють закріпити отримані компетенції. Для студентів спеціальності 122 Комп'ютерні науки.

УДК 519.852(075.8)

ISBN 978-966-184-340-9

ВСТУП

Дисципліна «Методи оптимізації та дослідження операцій» вивчається студентами спеціальності 122 Комп'ютерні науки й розроблена згідно з освітньою програмою та навчальним планом бакалавра.

Предметом дисципліни «Методи оптимізації та дослідження операцій» є моделі й методи теорії оптимізації та дослідження операцій.

Основною метою вивчення дисципліни є: формування особистості студентів як спеціалістів, розвиток їх інтелекту та здібностей до логічного й алгебраїчного мислення на основі систематичного засвоєння засобів оптимізації та дослідження операцій; формування у студентів уміння застосовувати сучасні методи математичного моделювання та теорії оптимізації в науці, економіці й інших галузях.

Головні завдання дисципліни: ознайомлення студентів з основними поняттями та засобами методів оптимізації й дослідження операції як інструментарію для подання та обробки інформації в комп'ютерах; формування у студентів навичок математичного моделювання задачами оптимізації та розв'язування цих задач.

У результаті вивчення дисципліни студент повинен набути

знання:

– *теорії та методів розв'язання задач лінійного програмування;*

– *властивостей транспортної задачі (ТЗ) та методів її розв'язання;*

– *основ теорії потоків у мережах;*

– *методів розв'язання задач цілочисельного та дискретного програмування;*

– *основ теорії та методів нелінійного програмування;*

– *основних понять теорії матричних ігор;*

уміння:

– *будувати лінійні моделі прикладних задач, приводити їх до канонічного вигляду;*

– *розв'язувати задачі лінійного програмування за допомогою симплекс-методу та двоїстого симплекс-методу;*

– аналізувати та розв'язувати задачі лінійного програмування транспортного типу;

– розв'язувати задачі цілочисельного й дискретного програмування методами Гоморі, гілок та меж;

– розв'язувати задачі нелінійного програмування градієнтними методами та їх модифікаціями;

– знаходити сідлові точки та оптимальні розв'язки матричних ігор у змішаних стратегіях;

уявлення:

– про можливості, напрямки й перспективи застосування теорії оптимізації та дослідження операцій.

Вивчення дисципліни базується на знаннях, отриманих студентами під час вивчення таких дисциплін, як «Дискретна математика», «Алгебра та геометрія», «Математичний аналіз», «Програмування», «Інформатика», «Теорія ймовірностей та математична статистика».

КУРС ЛЕКЦІЙ

Лекції 16–17. Транспортна задача

1. Постановка задачі та її математична модель

Транспортна задача (ТЗ) є ЗЛП, але допускає розв’язок більш простими, ніж симплекс-метод методами. Загальна постанова цієї задачі така.

Потрібно скласти план перевозу однорідного вантажу пунктів відправлення $A_1,...,A_m$, у кожному з яких є $a_1,...,a_m$ вантажу відповідно, у пункти призначення $B_1,...,B_n$ з потребами $b_1,...,b_n$ одиниць вантажу так, щоб задовольнити запити всіх споживачів і мінімізувати сумарну вартість перевезень. Вартість c_{ij} перевезень одиниці вантажу з A_i в B_j відома. При цьому звичайно вважають, що загальний запас вантажу в пунктах відправлень дорівнює сумарній потребі пунктів споживання, тобто:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j. \qquad (1)$$

Побудуємо математичну модель сформульованої задачі. Нехай x_{ij} – кількість вантажу, яка відправляється з пункту відправлення A_i в пункт призначення B_j. Очевидно, що система змінних x_{ij} повинна задовольнити таким умовам:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = 1,...,m, \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = 1,...,n, \qquad (3)$$

$$x_{ij} \geq 0, \; i = 1,...,m, \quad j = 1,...,n, \qquad (4)$$

мінімізуючи при цьому сумарну вартість перевезення, тобто функцію

$$F = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} c_{ij} x_{ij}. \qquad (5)$$

Задача (1)–(5) – це ЗЛП, у неї mn змінних та $m+n$ обмежень-рівностей (за умов (4). Але не всі рівності є лінійнонезалежними. Якщо скласти всі рівності (2) та всі (3), то в силу рівності (1) одержимо одне й те ж. Тобто обмеження (2), (3) пов'язані ***між собою однією лінійною залежністю і не вироджений базисний розв'язок*** транспортної задачі ***повинен мати*** $m+n-1$ ***ненульових компонент.***

Вихідні дані транспортної задачі представляють у вигляді таблиці, яку називають транспортною (табл. 1). Скорочено її будемо позначати ТТ. У правому нижньому куті (стовпець a_i рядок b_j) зручно записувати суму з (1), перевіряючи цю умову.

Таблиця 1 – Транспортна таблиця

	B_1	B_2	...	B_n	a_i
A_1	c_{11}	c_{12}	...	c_{1n}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}	...	c_{2n}	a_2
...	...	...	...	...	...
A_m	c_{m1}	c_{m2}	...	c_{mn}	a_m
b_j	b_1	b_2	...	b_n	

Клітини таблиці, у які записують ненульові перевезення, називають ***зайнятими,*** інші – ***вільними.*** Нумерують клітини таблиці пар (i, j) – це клітина, що знаходиться в рядку *i,* у стовпці *j*.

2. Знаходження початкового допустимого розв'язку методом північно-західного кута

Розгляд будемо вести на конкретному прикладі, що задано табл. 2.

Приклад 1. Знайти початковий допустимий розв'язок ТЗ.

Таблиця 2 – Приклад ТЗ

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	1	3	7	1	10
A_2	2	4	2	3	15
A_3	6	5	4	1	7
b_j	3	5	10	14	32

Застосуємо для розв'язку транспортної задачі ідеї, спільні із симплекс-методом. Спершу будемо шукати базисний розв'язок (початкова вершина многогранника розв'язків).

Розглянемо один із способів побудови початкового плану, який називають «метод північно-західного кута».

Побудова початкового плану починається з верхнього лівого кута транспортної таблиці. Розподілення вантажу першого постачальника відбувається так, що спершу максимально задовольняються заявки першого споживача, потім другого й так далі до повного розподілення вантажу, що є в A_1. Потім аналогічно розподіляється вантаж другого постачальника й т. д. При цьому керуються потребами споживачів. Одержуємо характерну ступеневу фігуру, що починається у верхньому лівому («північно-західному») куті (табл. 3).

Таблиця 3 – Метод північно-західного кута для ТЗ з табл. 2

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	1 3	3 5	7 2	1	10
A_2	2	4	2 8	3 7	15
A_3	6	5	4	1 7	7
b_j	3	5	10	14	

Одержаний план є базисним. Тому заповнені клітини будемо називати базисними.

3. Метод мінімального елемента

У методі північно-східного кута на кожному кроці потреби першого з тих, що залишилися пунктів призначення задовольнялися за рахунок запасів з першого з пунктів відправлення, що залишилися. Але очевидно, що вибір пунктів призначення і відправлення доцільно проводити орієнтуючись на вартість (тарифи) перевезень, а саме: на кожному кроці потрібно вибрати будь-яку клітину, що відповідає ***мінімальному тарифу*** (якщо їх декілька – вибрати будь-яку) і розглянути пункти призначення і відправлення, що ***відповідають вибраній клітині.*** Метод мінімального елемента полягає в тому, що вибирається клітина з мінімальним тарифом. Треба відзначити, що цей метод дає, зазвичай, базисний розв'язок транспортної задачі, за якого загальна вартість перевезень вантажу менше, чим загальна вартість перевезень під час розв'язку, знайденому за методом північно-східного кута.

Приклад 2. Нехай задана транспортна таблиця.

Таблиця 4 – Умова прикладу 2 та його розв'язування

Пункти відправлення	B_1	B_2	B_3	B_4	**Запаси** a_i
A_1	7	8	1 (1) 160	2	160
A_2	4 (4) 120	5	9	8 (6) 20	140
A_3	9	2 (2) 50	3 (3) 30	6 (5) 90	170
Потреби b_j	120	50	190	110	470

Розв'язування. Мінімальний тариф $1 = C_{13}$. Покладемо $X_{13} = 160$. Виключимо на деякий час із розгляду рядок A_1. Потребу пункту B_3 вважаємо 30 $(= 190 - 160)$.

У таблиці, що залишилася (рядки A_2, A_3, стовпці B_1, B_2, B_3, B_4), клітина з найменшим значенням тарифу $2 = C_{32}$. Покладемо $X_{32} = 50$. Тимчасово виключаємо стовпець B_2, запас A_3 вважаємо рівним $120 (= 170 - 50)$.

Залишилась таблиця $(A_2, A_3, B_1, B_3, B_4)$. Мінімальний тариф $3 = C_{33}$, уважаємо $X_{33} = 30$ і так далі: $4 = C_{21}$; $X_{21} = 120$; $6 = C_{34}$; $X_{34} = 90$; $8 = C_{24}$; $X_{24} = 20$. Маємо базисний розв'язок

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 160 & 0 \\ 120 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 50 & 30 & 90 \end{pmatrix}.$$

Вартість перевезень:

$$S = 1 \cdot 160 + 4 \cdot 120 + 8 \cdot 20 + 2 \cdot 50 + 3 \cdot 30 + 6 \cdot 90 = 1\,530.$$

(Порівняйте зі знайденим за методом північно-східного кута). Порядок вибору клітин у табл. 4 показано номером кроку у круглих дужках.

4. Побудова базисних розв'язків у ТЗ

Метод Жордана-Гауса для транспортної задачі полягає в наступному. ***Виберемо довільну вільну клітину***, в прикладі табл. 3, наприклад, (3, 2). ***Виявляється***, що в невиродженому випадку однозначно можна вибрати замкнений ланцюжок, який називають ***цикл,*** що складається тільки з вертикальних і горизонтальних ланок, однією з вершин якого є ***вибрана вільна*** клітина, а інші вершини якої – ***зайняті клітини*** (табл. 5). Завантажимо клітину (3, 2) перевезенням, що дорівнює, наприклад 1. Щоб план перевезень залишився допустимим, необхідно збільшити перевезення у клітинах, позначених $\oplus$, на одиницю, і зменшити на одиницю у клітинах, позначених Θ.

Таблиця 5 – Приклад побудови циклу

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	1 3	3 Θ 5	7 $\oplus$ 2	1	10
A_2	2	4	2 Θ 8	3 $\oplus$ 7	15
A_3	6	5 $\oplus$	4	1 Θ 7	7
b_j	3	5	10	14	

Ці позначки йдуть через одну, починаючи з $\oplus$ у вибраній вільній клітині. Очевидно, що в разі циклічного переносу будь-якого числа одиниць, що залишає перевезення невід'ємними, допустимий план залишається невід'ємним, а вартість перевезень може змінюватись у той або той бік. Щоб новий план був базисним, вибрану клітину необхідно завантажити по можливості максимально. Величина θ, що задовольняє цій вимозі, визначається ***мінімальним значенням*** перевезень, що ***стоять у «від'ємних»*** вершинах циклу:

$$\theta = min\, x_{ij};\ \ \theta = min\{7,5,8\} = 5.$$

Одержаний базисний розв'язок наведено в табл. 6. Отже, у транспортній задачі ми легко можемо перейти від однієї вершини до іншої. Очевидно, що потрібен такий перехід, щоб значення цільової функції зменшилося.

Таблиця 6 – Новий базисний розв'язок

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	1 / 3	3	7 / 7	1	10
A_2	2	4	2 / 3	3 / 12	15
A_3	6	5 / 5	4	1 / 2	7
b_j	3	5	10	14	

Нехай

$$F^{\circ} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} c_{ij} x_{ij}^{\circ},$$

де c_{ij} вказані в табл. 2, а x_{ij} – у табл. 3. З переходом до нового базисного розв'язку x' (табл. 6) значення цільової функції зменшиться на величину:

$$F' - F^{\circ} = \left(c_{32} \overbrace{-c_{12} + c_{13} - c_{23} + c_{24} - c_{34}}^{=-z_{32}}\right)\theta = \left(c_{32} - z_{32}\right)\theta = \Delta_{32}\theta.$$

Отже, клітину (3, 2) потрібно ввести в базис, якщо $\Delta_{32} = c_{32} - z_{32} < 0.$ Простий підрахунок показує, що ця умова не виконується:

$$\Delta_{32} = c_{32} - z_{32} = 5 - 3 + 7 - 2 + 3 - 1 = 9 > 0.$$

З цих міркувань вигідно заповнити клітину (1, 4) (табл. 7).

Таблиця 7 – Інший цикл

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	1 3	3 5	$\ominus$ 7 2	1 $\oplus$	10
A_2	2	4	2 $\oplus$ 8	3 $\ominus$ 7	15
A_3	6	5	4	1 7	7
b_j	3	5	10	14	

$$\Delta_{14}=1-7+2-3<0;\ \ \theta=min\{2,8,7\}=2.$$

Одержуємо табл. 8.

Таблиця 8 – Наступний базисний розв’язок

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	1 3	3 5	7	1 2	10
A_2	2	4	2 10	3 5	15
A_3	6	5	4	1 7	7

Отже, щоб розв’язати питання про те, яку з вибраних змінних потрібно включати в базисний розв’язок, необхідно для кожної з них обчислити величину $c_{ij}-z_{ij}$ і ввести, наприклад, ту з них x_{ke}, для якої

$$c_{ke}-z_{ke}=\min_{i,\,j:\,c_{ij}-z_{ij}<0}\left(c_{ij}-z_{ij}\right).$$

Якщо циклів із $\Delta_{ij}=c_{ij}-z_{ij}<0$ в таблиці не залишилося, то подальше зменшення цільової функції неможливе, тобто знайдено оптимальний розв'язок задачі. Оптимальний розв’язок задачі, що розглядається, подано в табл. 9. (Перевірити самостійно).

Таблиця 9 – Оптимальний розв'язок ТЗ

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	1	3 3	7	1 7	10
A_2	2 3	4 2	2 10	3	15
A_3	6	5	4	1 7	7
b_j	3	5	10	14	

5. Визначення оптимального плану транспортної задачі методом потенціалів

Сформулюємо задачу двоїсту до транспортної (1)–(5). Позначимо двоїсті змінні, що відповідають обмеженням (16.2) через – α_i, а ті що відповідають обмеженням (3) – через β_j. Для транспортної задачі величини α_i, β_j називають ***потенціалами пунктів відправлення*** A_i і ***призначення*** B_j ***відповідно***.

Двоїста задача до задачі (1)–(5) полягає у знаходженні потенціалів α_i, β_j, що задовольняють обмеженням

$$\beta_j - \alpha_i \le c_{ij},\ \ i = 1,...,m;\ \ j = 1,...,n$$

і ***максимізують*** цільову функцію

$$F^* = \sum_{j=1}^{n} \beta_j b_j - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i a_i .$$

Тут, як і раніше, a_i – запас вантажу в пункті відправлення A_i, b_j – потреби вантажу в пункті призначення B_j.

Із двоїстого критерію оптимальності випливає наступний критерій оптимальності для транспортної задачі.

Теорема 1 (критерій оптимальності для транспортної задачі). Для того, щоб допустимий ***розв'язок*** у транспортній задачі був ***оптимальним,*** необхідно й достатньо, щоб ***знайшлись*** потенціали α_i, β_j такі, що

$$\begin{aligned} &\beta_j - \alpha_i = c_{ij}, \text{ якщо } x_{ij} > 0; \\ &\beta_j - \alpha_i \le c_{ij}, \text{ якщо } x_{ij} = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Сформульована теорема дозволяє побудувати алгоритм знаходження розв'язку транспортної задачі. Він полягає в наступному. ***Нехай знайдено не вироджений базисний розв'язок***. Для кожного з пунктів відправлення і призначення знаходять потенціали α_i та β_j $\left(i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}\right)$. Ці числа знаходять із системи

$$\beta_j - \alpha_i = c_{ij}, \tag{7}$$

де c_{ij} – тарифи, що стоять у ***заповнених*** клітинах транспортної таблиці. Оскільки число заповнених клітин $n + m - 1,$ то система (7) з $n + m$ ***невідомими має*** $n + m - 1$ ***рівнянь***. Отже, одне з невідомих, скажемо α_1, можна задати довільно (нехай $\alpha_1 = 0$) і знайти всі інші. Після того, як потенціали знайдено, для кожної з вільних клітин визначають числа $\alpha_{ij} = \beta_j - \alpha_i - c_{ij}$.

Якщо серед чисел $\boldsymbol{\alpha_{ij}}$ ***немає додатніх*** то (згідно з теоремою 1) знайдений базисний розв'язок ***є оптимальним. Якщо*** ж для деякої вільної клітини $\alpha_{ij} > 0,$ то вихідний базисний розв'язок ***не є оптимальним*** і необхідно перейти до нового базисного розв'язку. Для цього розглядають усі ***вільні клітини,*** для яких $\alpha_{ij} > 0$ і вибирають ***максимальне*** з чисел. Відповідну клітину потрібно завантажити, змінюючи обсяги поставок у ряді інших клітин, пов'язаних із вільною ***циклом.*** Ця процедура називається ***пересуванням циклом перерахування***.

Зауваження. При пересуванні циклом перерахування кількість зайнятих клітинок залишається незмінною $n+m-1$. При цьому, якщо у клітинах, позначених знаком «мінус», є ***два*** (або більше) однакових мінімальних числа x_{ij}, то вивільняється одна з таких клітин, а інша (інші) залишається зайнятою (***з нульовими поставками***).

Одержаний базисний розв'язок перевіряють на оптимальність (знаходять $\alpha_{ij}=\beta_j-\alpha_i-c_{ij}$ для всіх вільних клітин; якщо серед цих α_{ij} немає додатніх, то це означає, що розв'язок – оптимальний) і т. д. Отже, після скінченої ітерації одержують оптимальний план.

Таким чином, процес розв'язування транспортної задачі включає такі етапи:

1. Знаходять базисний розв'язок. (При цьому число заповнених клітин повинно бути $n+m-1$).
2. Знаходять потенціали β_j та α_i відповідно пунктів призначення і відправлення.
3. Для кожної з вільних клітин визначають число α_{ij}. . Якщо серед чисел α_{ij} немає додатніх, то одержано оптимальний план транспортної задачі, якщо ж вони є, то переходять до нового базисного розв'язку.
4. Серед додатніх чисел α_{ij} вибирають ***максимальне,*** будуть для вільної клітин, якій воно відповідає, цикл перерахунку і проводять пересування по циклу перерахунку (Для правильно побудованого базисного розв'язку для будь-якої вільної клітини можна побудувати тільки один цикл).
5. Одержаний базисний розв'язок перевіряють на оптимальність, тобто повторюють усі дії з п. 2.

Приклад 3. Для транспортної задачі, вихідні дані якої наведені в табл. 10, знайти оптимальний план.

Таблиця 10 – Дані прикладу 3 та його розв’язування

Пункти відправлення	Пункти призначення				Запаси	α_i
	B_1	B_2	B_3	B_4		
A_1	1 30	2 Θ 20	4 –4	1 ⊕ 3	50	0
A_2	2 0	3 ⊕ 10	1 10	5 Θ10	30	–1
A_4	3 –2	2 0	4 –4	4 10	10	0
Потреби	30	30	10	20	90	
β_j	1	2	0	4		$F_0 = 200$

Розв'язування. Знаходимо методом північно-західного кута базисний розв'язок. Цей розв'язок занесено в табл. 10.

Знайдений план перевіряємо на оптимальність. Знаходимо потенціали, для цього одержуємо систему:

Знаходимо (поклавши $\alpha_1 = 0$)

$$\begin{array}{l|l} \beta_1 - \alpha_1 = 1; & \alpha_1 = 0; \quad \beta_1 = 1; \\ \beta_2 - \alpha_1 = 2; & \beta_2 = 2; \\ \beta_2 - \alpha_2 = 3; & \alpha_2 = -1; \\ \beta_3 - \alpha_2 = 1; & \beta_3 = 0; \\ \beta_4 - \alpha_2 = 5; & \beta_4 = 4; \\ \beta_4 - \alpha_3 = 4 & \alpha_3 = 0. \end{array}$$

Для всіх вільних клітин обчислюємо $\alpha_{ij} = \beta_j - \alpha_i - c_{ij}$, записуємо їх у рамках у вільних клітинах:

$$\alpha_{13} = \beta_3 - \alpha_1 - c_{13} = 0 - 0 - 4 = -4;$$
$$\alpha_{14} = \beta_4 - \alpha_1 - c_{14} = 4 - 0 - 1 = 3;$$
$$\alpha_{21} = \beta_1 - \alpha_2 - c_{12} = 1 - (-1) - 2 = 0;$$
$$\alpha_{31} = \beta_1 - \alpha_3 - c_{13} = 1 - 0 - 3 = -2;$$
$$\alpha_{32} = \beta_2 - \alpha_3 - c_{32} = 2 - 0 - 2 = 0;$$
$$\alpha_{33} = \beta_3 - \alpha_3 - c_{33} = 0 - 0 - 4 = -4.$$

Оскільки серед чисел α_{ij} є додатні, то побудований план перевезень не є оптимальним. Найбільшим (і єдиним тут) серед $\alpha_{ij} > 0$ є $\alpha_{14} = 3$, тому для цієї вільної клітини будуємо цикл перерахунку та проводимо пересування ним. Найменше з чисел у клітинах із мінусами 10. Клітина з цим числом, тобто (2, 4), стає вільною. Інші числа в табл. 11 одержуємо, додаючи 10 у клітинах із плюсом і віднімаючи 10 у клітинах із мінусом.

Таблиця 11 – Другий допустимий розв'язок прикладу 3

Пункти відправ-лення	Пункти призначення				Запаси	α_i
	B_1	B_2	B_3	B_4		
A_1	1 30	2 Θ 10	4 –4	1 ⊕ 10	50	0
A_2	2 0	3 20	1 10	5 –3	30	–1
A_3	3 1	2 ⊕ 3	4 –1	4 Θ 10	10	–3
Потреби	30	30	10	20	90	
β_j	1	2	0	1		$F_0 = 170$

Цей план перевіємо на оптимальність, знаходячи α_i, β_j. Складаємо систему:

$$\begin{array}{l|l} \beta_1 - \alpha_1 = 1; & \\ \beta_2 - \alpha_1 = 2; & \textit{Розв'язуємо її, поклавши} \\ \beta_4 - \alpha_1 = 1; & \alpha_1 = 0,\ \beta_1 = 1,\ \beta_2 = 2, \\ \beta_2 - \alpha_2 = 3; & \beta_4 = 1,\ \alpha_2 = -1, \\ \beta_3 - \alpha_2 = 1; & \beta_3 = 0,\ \alpha_3 = -3. \\ \beta_4 - \alpha_3 = 4. & \end{array}$$

Числа α_i, β_j записують у транспортну табл. 11, перерахувавши яку, отримаємо табл. 12.

Таблиця 12 – Оптимальний розв'язок прикладу 3

Пункти відправ-лення	Пункти призначення				Запаси a_i	α_i
	B_1	B_2	B_3	B_4		
A_1	1 30	2 0	4 –4	1 20	50	0
A_2	2 0	3 20	1 10	5 –3	30	–1
A_3	3 –2	2 10	4 –4	4 –3	10	0
Потреби b_j	30	30	10	20	90	
β_j	1	2	0	1		$F_0 = 140$

Перевіряємо отриману табл. 12 на оптимальність. Складаємо систему:

$\beta_1 - \alpha_1 = 1;$

$\beta_2 - \alpha_1 = 2 \quad \left(\text{\textit{вважаємо клітину}}\ (1, 2) - \text{\textit{зайнятою}}\right);$

$\beta_4 - \alpha_1 = 1;$

$\beta_2 - \alpha_2 = 3;$

$\beta_3 - \alpha_2 = 1;$

$\beta_2 - \alpha_3 = 2.$

Нехай $\alpha_1 = 0;$ *тоді* $\beta_1 = 1,$ $\beta_2 = 2;$ $\beta_4 = 1,$ $\alpha_2 = -1,$ $\beta_3 = 0,$ $\alpha_3 = 0.$

Усі α_{ij} у вільних клітинах від'ємні, тобто план – оптимальний. $x^* = \begin{pmatrix} 30 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 20 & 10 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \end{pmatrix};$ $F_{min} = 140.$

6. Незбалансовані ТЗ

Умова (1) може бути порушення у 2-х випадках:

1) якщо $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$, то всіх заявок задовольнити не можна, але план, що відповідає мінімуму транспортних витрат побудувати можливо. Для цього вводиться фіктивний пункт відправлення A_{m+1} із запасом $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$, вартість перевезень з якою дорівнює нулю.

2) якщо $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$, то вводимо фіктивний пункт споживання B_{n+1} з потребою $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$ і вартістю перевезень до якого дорівнює нулю.

Приклад 4. Для будівництва чотирьох доріг використовується гравій із трьох кар’єрів. Запаси гравію в кожному з кар’єрів відповідно 120, 280 та 160 ум. од. Потреба у гравії для будівництва кожної з доріг відповідно 130, 220, 60 та 70 ум. од. Відомі тарифи перевезень, що задаються матрицею

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 9 & 5 \\ 4 & 2 & 6 & 8 \\ 3 & 8 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Скласти план перевезень гравію, щоб потреби в ньому кожної з доріг, що будується, були б задоволені за найменшої загальної вартості перевезень.

Розв’язування. Вихідні дані зведемо в таблицю (табл. 13).

Таблиця 13 – Умова прикладу 4

Пункти відправлення	**Пункти призначення**				**Запаси**
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	1	7	9	5	120
A_2	4	2	6	8	280
A_3	3	8	1	2	160
Потреби	130	220	60	70	560 480

Як видно, запаси $120 + 280 + 160 = 560$ більші, ніж потреби $(130 + 220 + 60 + 70 = 480)$. Уведемо фіктивний пункт B_5 з потребою 560–480 ум. од. Тарифи перевезень у B_5 покладемо нульовими. Одержуємо задачу, для якої знаходимо базисний розв’язок методом мінімального елемента (табл. 14).

Таблиця 14 – Перший базисний розв'язок прикладу 4

Пункти відправ-лення	Пункти призначення					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	1 (2) 40	7	9	5	0 (1) 80	120
A_2	4 (7) 60	2 (5) 220	6	8	0	280
A_3	3 (6) 30	8	1 (3) 60	2 (4) 70	0	160
Потреби	130	220	60	70	80	

Оптимальний план знаходиться методом потенціалів (табл. 15).

Таблиця 15 – Оптимальний розв'язок прикладу 4

Пункти відправ-лення	Пункти призначення					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	1 120	7	9	5	0	120
A_2	4	2 220	6	8	0 60	280
A_3	3 10	8	1 60	2 70	0 20	160
Потреби	130	220	60	70	80	560

Очевидно: $x^* = \begin{pmatrix} 120 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 220 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 60 & 70 \end{pmatrix}, \ F_{min} = 790.$

7. Виродження в ТЗ

Оскільки число вершин обмежено, то за скінчену кількість кроків ми одержимо розв'язок транспортної задачі ЛП у тому випадку, якщо на кожній ітерації немає виродження (тобто значення цільової функції зменшується). Якщо ж на деякій ітерації базисний розв’язок ***вироджений,*** то в разі переходу до нової вершини значення функції цілі не зменшується і виникає небезпека зациклюватися, тобто повернення до вершин, що вже проглянуті. Як і у випадку загальної ЗЛП, у транспортній задачі зациклювання можна попередити, скориставшись ***методом збурень.***

У даному випадку метод збурень складається в наступному: добавляємо ***до всіх*** $a_i,\ i=1,...,m,$ мале число $\varepsilon>0,$ збільшуючи тим самим сумарний запас вантажу на $m\varepsilon.$ Тому необхідно заявку одного зі споживачів (наприклад B_n) збільшити на $m\varepsilon$ для того, щоб умова (1) збереглася і розглянути «збурену» транспортну задачу, для якої

$$\tilde{a}_i = a_i + \varepsilon, i = 1,...,m,$$

$$\tilde{b}_j = \begin{cases} b_j, & j = 1,...,n-1; \\ b_n + m\varepsilon, & j = n. \end{cases}$$

Розв’язуючи «збурену» задачу й ***покладаючи в її оптимальному розв’язку*** $\varepsilon = 0,$ одержуємо розв’язок вихідної задачі.

Розглянемо приклад розв’язку ***виродженої*** задачі.

Приклад 5. Нехай є транспортна табл. 16.

Таблиця 16 – Умова прикладу 5

	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	10	5	4	40
A_2	6	4	5	23
A_3	7	3	6	20
b_j	20	20	43	83

Методом північно-західного кута маємо вироджений розв’язок (табл. 17). Отже, розглянемо «збурену» задачу (табл. 18).

Таблиця 17 – Розв'язок за методом північно-західного кута

	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	10 20	5 20	4	40
A_2	6	4	5 23	23
A_3	7	3	6 20	20
b_j	20	20	43	83

Таблиця 18 – «Збурена» задача для прикладу 5

	B_1	B_2	B_3	a_i	α_i
A_1	10 Θ 20	5 20	⊕ 4 ε	40+ε	0
A_2	6 ⊕ 5	4 2	5 Θ 23+ε	23+ε	–1
A_3	7 5	3 4	6 20+ε	20+ε	–2
b_j	20	20	43+3ε	83+3ε	
β_j	10	5	4		

Складемо й розв'яжемо систему для потенціалів:

$$\begin{aligned} &\beta_1-\alpha_1=10; \\ &\beta_2-\alpha_1=5; \\ &\beta_3-\alpha_1=4; \\ &\beta_3-\alpha_2=5; \\ &\beta_3-\alpha_3=6; \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &\alpha_1=0; \\ &\beta_1=10; \\ &\beta_2=5; \\ &\beta_3=4; \\ &\alpha_2=-1; \\ &\alpha_3=-2. \end{aligned}$$

Друга транспортна таблиця (ТТ) цього прикладу має вигляд табл. 19. (Тут уважаємо $\beta_3 = 0$).

Таблиця 19 – Друга ТТ прикладу 5

	B_1	B_2	B_3	a_i	α_i
A_1	10 $\boxed{-5}$	5 Θ 20	$\oplus$ 4 $20+\varepsilon$	$40+\varepsilon$	–4
A_2	6 20	4 $\boxed{2}$	5 $3+\varepsilon$	$23+\varepsilon$	–5
A_3	7 $\boxed{0}$	3 $\oplus$ $\boxed{4}$	Θ 6 $20+\varepsilon$	$20+\varepsilon$	–6
b_j	20	20	$43+3\varepsilon$	$83+3\varepsilon$	
β_j	1	1	0		

Перерахунок другої ТТ дає табл. 20.

Таблиця 20 – Третя ТТ прикладу 5

	B_1	B_2	B_3	a_i	α_i
A_1	10 $\boxed{-5}$	5 0 $\boxed{-4}$	4 $40+\varepsilon$	$40+\varepsilon$	–4
A_2	6 20	4 $\boxed{-2}$	5 $3+\varepsilon$	$23+\varepsilon$	–5
A_3	7 $\boxed{0}$	3 20	6 ε	$20+\varepsilon$	–6
b_j	20	20	$43+3\varepsilon$	$83+3\varepsilon$	
β_j	1	–3	0		

У табл. 20 – оптимальний план збуреної задачі. Покладемо $\varepsilon = 0,$ маємо оптимальний план вихідної задачі:

$$X^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 40 \\ 20 & 0 & 3 \\ 0 & 20 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_{min} = 355.$$

Лекція 18. Потоки у транспортних мережах. Метод Форда-Фалкерсона

1. Основні означення

Задачі, що розглядаються тут, є більш загальними, ніж транспортна задача лінійного програмування. Теорія потоків у мережах (сітках) виникла з вивчення таких реальних задач, як перевезення вантажів по системі залізниць, перекачування нафти по трубопроводам, управління запасами тощо.

Розглядають задачі:

– оптимального потоку (з обмеженими чи ні пропускними спроможностями);

– максимального потоку;

– про найкоротший шлях та ін.

Нехай є деякий скінчений орграф (граф) $Г = (N, S)$, де N – множина вершин, а S – множина дуг (ребер). ***Сіткою (мережею)*** будемо називати граф, якщо деяким (можливо, усім) дугам (ребрам), вершинам приписані деякі параметри (числа, функції тощо).

Розглянемо таку сітку: нехай кожній вершині $n \in N$ графа $Г = (N, S)$ приписане деяке число I_n, яке ***назвемо інтенсивністю вершини.*** Якщо $I_n > 0$, то вершину n називають ***джерелом***. Якщо $I_n < 0$, то вершина n має назву ***стік,*** при $I_n = 0$ вершина n – ***нейтральна*** (тобто, множина всіх вершин розбивається на підмножини, що не перерізаються, N_g, $N_н$, N_c, які містять джерела, нейтральні вершини та стоки відповідно: $N = N_g \cup N_н \cup N_c$).

Потоком у розглянутій мережі назвемо множину X величин x_{ij}, $(i,\ j) \in S$, для яких виконуються умови:

$$\sum_j x_{ij} - \sum_j x_{ji} = I_i \qquad \forall i \in N;$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad \forall (i,\ j) \in S.$$

Транспортна мережа (сітка) – це мережа, у якій визначено деякий потік.

Ми розглянемо задачу знаходження потоку максимальної величини. Розглянемо транспортну сітку (ТС), у якій існує тільки *одна вершина (джерело),* така, що в неї не входить жодна дуга – вхід сітки (s), і *одна вершина (стік),* з якої не виходить жодна дуга, – вихід сітки (t).

Величиною потоку назвемо $Q = \sum\limits_{\forall(j,t)} x_{jt}$, де t – стік.

Кожній дузі (i, j) поставлене у відповідність *ціле* число $b_{ij} \geq 0,$ яке називають *пропускною спроможністю* дуги $(i, j),$ і ціле число $b_{ji} \geq 0$ – пропускна спроможність дуги (j, i).

2. Алгоритм (Форда-Фалкерсона) для знаходження максимального потоку

0. На початку вважаємо $x_{ij} = 0 \ \ \forall i, j, \ Q = 0.$

1. Початкову вершину $s = 0$ вважаємо *позначеною,* але *не переглянутою.*

2. Беремо довільну позначену, але не переглянуту вершину s. Усі вершини j (якщо $b_{sj} > 0$) вважаємо позначеними позначками $(s, j),$ а вершину s – переглянутою (позначаємо V).

3. Одержуємо одне із двох: а) кінцева вершина t позначена, б) кінцева вершина t не позначена. У першому випадку (а)) переходимо до наступного пункту 4, при цьому позначимо шлях $s \to t$ в сітці стрілками (стрілки не стираємо).

У випадку «б)» переходимо до пункту 2, де $s = i$ – довільна позначена вершина, яку вважаємо переглянутою (позначки непереглянутих вершин стираємо). Якщо не залишилося помічених та непереглянутих вершин, або такі є, а стік не помічається, то побудовано максимальний потік. Зупинка.

4. Нехай $(s,i_1),(i_1,i_2),...,(i_{m-1},t)$ – шлях, відтворений за позначками переглянутих вершин, а

$$\theta = min\left\{b_{si_1},...,b_{i_{m-1},t}\right\}.$$

Змінюємо потік: на дузі збільшуємо на $\theta,$ коли шлях $\left(i_k,\ i_{k+1}\right)$ іде за стрілкою

$$x_{i_k i_{k+1}} := x_{i_k i_{k+1}} + \theta,$$

а коли шлях $\left(i_k, i_{k+1}\right)$ іде проти стрілки, зменшуємо на $\boldsymbol{\theta}$ потік на дузі:

$$x_{i_k i_{k+1}} := x_{i_k i_{k+1}} - \theta.$$

Переобчислюємо пропускні спроможності:

$$b_{i_k i_{k+1}} := b_{i_k i_{k+1}} - \theta\,;\ b_{i_{k+1} i_k} := b_{i_{k+1} i_k} + \theta\,.$$

(Тут і нижче знак := позначає «привласнення» – як у програмуванні.)

Обчислюємо потік через сітку: $Q := Q + \theta.$

5. Стираємо всі позначки.

6. Переходимо до кроку 1.

Приклад. Знайти максимальний потік з 0 в 6 (рис. 1).

Пропускні спроможності b_{ij} дуг $\left(i, j\right)$ стоять біля вершин *i,* а для дуг $\left(j, i\right)$ пропускні спроможності b_{ji} стоїть біля *j*. (На рис. 1 $b_{01} = 5; b_{10} = 0$).

Розв'язок. Перший шлях.

Пропускні спроможності b_{ij} дуг $\left(i, j\right)$ стоять біля вершин *i*, а для дуг $\left(j, i\right)$ пропускна спроможність для b_{ji} стоїть біля *j* (на рис. 7 $b_{01} = 5; b_{10} = 0$).

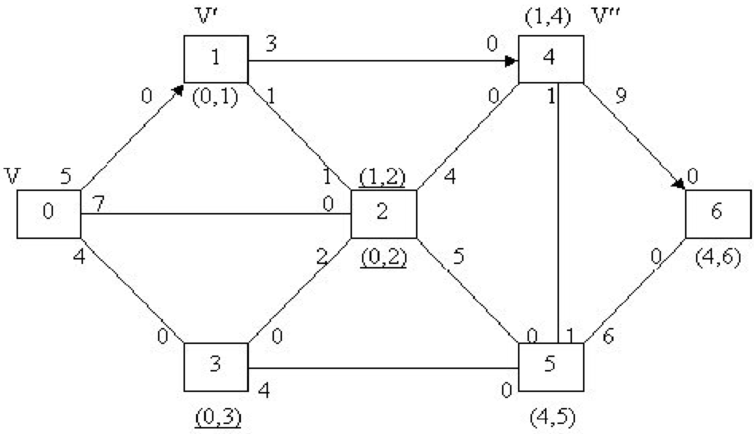

Рисунок 1

1. Позначимо вершину $s = 0$.

2. З неї виходять дуги $(0,1)$, $(0,2)$, $(0,3)$ з додатною пропускною спроможністю. Ці вершини вважаємо позначеними, а вершину 0 – переглянутою (позначаємо *V*).

3. Оскільки стік не позначено, виконуємо пункт 2 знову. Розглянемо довільно позначену вершину (наприклад 1) і вважаємо її переглянутою (*V′*); усі позначки непереглянутих вершин стираємо: (на малюнку підкреслимо позначки (i, j). Вершини 2 і 4 позначаємо (1,2), (1,4). Повторюємо цей процес знову. (Оскільки стік не позначено). Вибираємо вершину 4. Позначку (1,2) стираємо. Вершину 4 вважаємо переглянутою (V''). Позначаємо 5 і 6: (4,5) і (4,6). Стік позначено. Одержуємо шлях $0 \to 1 \to 4 \to 6$ (позначаємо його стрілками на сітці), мінімальна пропускна спроможність якого $\theta = min\{5,3,9\} = 3$.

4. Змінюємо потік: $x_{01} = x_{14} = x_{46} = 3$, $Q = 3$. Позначимо на сітці $\left[x_{ij}\right]$. Пропускні спроможності b_{ij} на сітці змінюємо (рис. 2).

5. Стираємо всі позначки.

6. Маємо сітку (див. рис. 2) й починаємо знову із кроку 1 алгоритму.

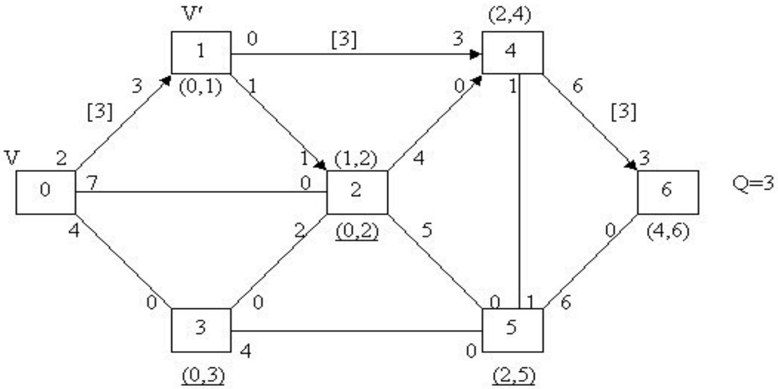

Рисунок 2

Одержуємо шлях II: 0→1→2→4→6; $\theta = min\{2,1, 4, 6\} = 1$, $Q = 3 + 1 = 4$ (рис. 3).

Перемальовуємо сітку, змінюючи x_{ij}, b_{ij}.

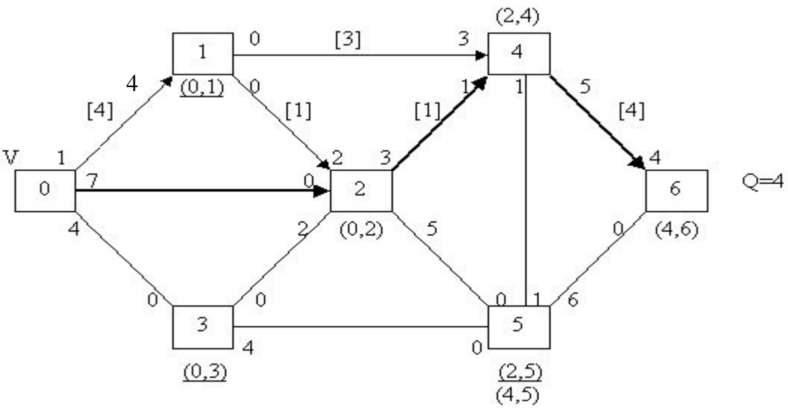

Рисунок 3

Шлях III: 0→2→4→6; $\theta = min\{7,3,5\} = 3$, $Q = 4 + 3 = 7$ (рис. 4).

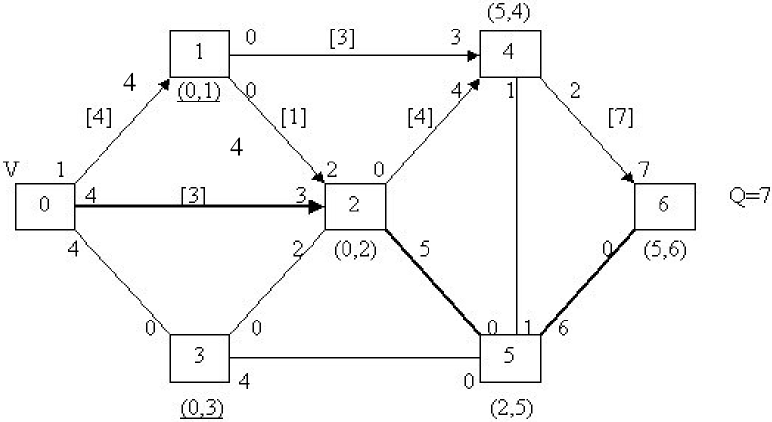

Рисунок 4

Шлях IV: $0 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 6$, $\theta = min\{4,5,6\} = 4$, $Q = 7 + 4 = 11$ (рис. 5).

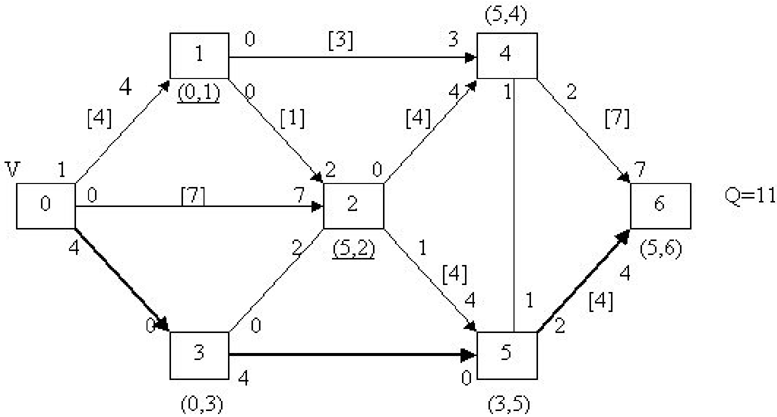

Рисунок 5

Шлях V: $0 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 6$, $\theta = min\{4,4,2\} = 2$, $Q = 11 + 2 = 13$ (рис. 6).

Шлях VI: $0 \to 3 \to 5 \to 4 \to 6$, $\theta = min\{2,2,1,2\} = 1$, $Q = 13 + 1 = 14$ (рис. 7).

Далі маємо шляхи: $0 \to 1$; $0 \to 3 \to 5 \to 2 \to 1 \to 0$; $0 \to 3 \to 5 \to 2 \to 0$; $0 \to 3 \to 5 \to 2 \to 3 \to 0$. Вони не закінчуються у стоці.

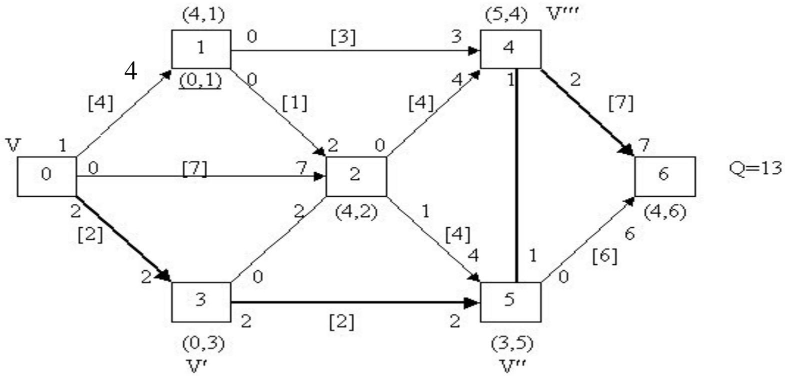

Рисунок 6

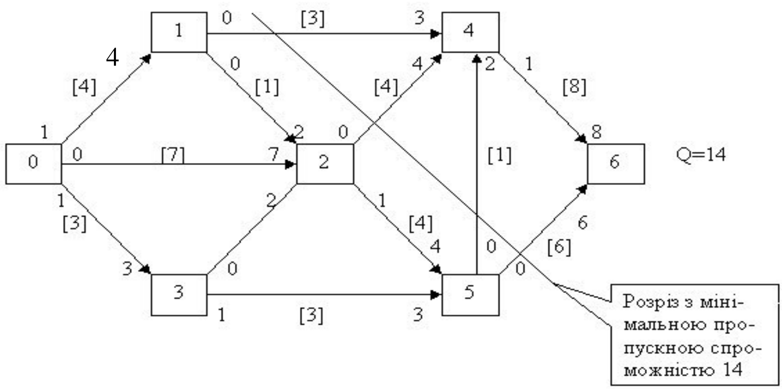

Рисунок 7

Розрізом називається у графі $\Gamma = (N, S)$ множина дуг $R \subset S$ така, що $R = \{(i, j)\}$, де $i \in D_s$, $j \in D_t$, $D_s \cup D_t = N$ – усі вершини; $D_s \cap D_t = \varnothing$, $s \in D_s$; $t \in D_t$, причому в S немає елементів (i, j), $i \in D_s$, $j \in D_t$, щоб $(i, j) \notin R$. Пропускна спроможність розрізу – сума пропускних спроможностей дуг розрізу.

Теорема. Для будь-якої сітки максимальна величина потоку з s в t дорівнює мінімальній із пропускних спроможностей розрізів, що відділяють s від t.

Лекції 19–21. Задачі про оптимальний потік

1. Формулювання задачі знаходження потоку мінімальної вартості

Нехай є деякий скінчений орграф $\Gamma = (N, S)$, де N – множина вершин, а S – множина дуг. ***Сіткою (мережею)*** будемо називати граф, якщо деяким (можливо, усім) дугам (ребрам), вершинам приписані деякі параметри (числа, функції тощо).

Розглянемо таку сітку: нехай кожній вершині $n \in N$ графа $\Gamma = (N, S)$ приписане деяке число I_n, яке *назвемо інтенсивністю вершини*. Якщо $I_n > 0$, то вершину n називають ***джерелом.*** Якщо $I_n < 0$, то вершина n має назву ***стік,*** при $I_n = 0$ вершина n – ***нейтральна*** (тобто множина всіх вершин розбивається на підмножини, що не перерізаються, N_g, $N_н$, N_c, які містять джерела, нейтральні вершини та стоки відповідно: $N = N_g \cup N_н \cup N_c$).

Потоком у розглянутій мережі назвемо множину X величин x_{ij}, $(i, j) \in S$, для яких виконуються умови:

$$\sum_j x_{ij} - \sum_j x_{ji} = I_i \quad \forall i \in N; \tag{1}$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad \forall (i, j) \in S. \tag{2}$$

Величину $\sum_j x_{ij}$, де підсумовування ведеться по всім дугам $(i, j) \in S$, що виходять із вершини $i \in N$ називають величиною потоку, що виходить із вершини *i*, а величину $\sum_{j:\,(j,\,i)\in S} x_{ji}$ називають ***величиною потоку,*** що входить у вершину ***i***. Тому співвідношення (1) означає, що різниця величин потоків, що виходить із вершини та що входить у вершину, дорівнює інтенсивності цієї вершини.

Сітки, у яких задано потік, називають ***транспортними.***

Припишемо кожній дузі $(i, j) \in S$ величину c_{ij}, яку можно інтерпретувати як ***вартість*** одиниці елемента x_{ij} потоку *X*.

Нехай $\{X\}$ – множина всіх можливих потоків у транспортній сітці.

Розглянемо задачу знаходження пари $< C^*, X^* >$, де

$$C^* = \min_{X\in\{X\}} \sum_{(i,\ j)\in S} c_{ij} x_{ij}; \tag{3}$$

$$X^* = \arg \min_{X\in\{X\}} \sum_{(i,\ j)\in S} c_{ij} x_{ij}; \tag{4}$$

за умов (1), (2). Потік X*, що задовольняє умові (4), називають оптимальним, ***а задача (1)–(4)*** – задачою знаходження оптимального потоку***, яку ще називають*** лінійною сітьовою задачою. ***Якщо в цій задачі обмеження (2) замінити на таке:***

$$0 \le x_{ij} \le b_{ij} \quad \forall (i, j) \in S, \tag{5}$$

де величини b_{ij} $\left(b_{ij} \ge 0 \ \forall (i, j) \in S\right)$ називають ***пропускними спроможностями*** дуг, то отримаємо задачу знаходження (3), (4) за умов (1), (5). Цю задачу називають ***задачою знаходження оптимального потоку в транспортній сітці з обмеженими*** ($b_{ij} < \infty$) ***пропускними спроможностями***.

2. Задача планування перевезення вантажу як задача про оптимальний потік

Нехай треба знайти оптимальне перевезення наявного однорідного вантажу залізницею, щоб мінімізувати загальну вартість перевезень. Складемо математичну модель задачі. Нехай I_n – кількість вантажу, що відповідає пункту n. Якщо вантаж відвантажується в пункті n, то $I_n > 0.$ Якщо $I_n < 0,$ то $|I_n|$ – це кількість вантажу, що прибула в пункт n для розвантаження і подальшого «споживання». Якщо $I_n = 0,$ то через пункт $n \in N$ вантаж іде без змін. Тут N – множина всіх пунктів залізниці, що розглядається. Якщо з пункту i в пункт j, ($i, j \in N$), є залізничне сполучення, то введемо дугу $(i, j) \in S$ в множину дуг S графа $\Gamma = (N, S)$. Позначимо x_{ij} – кількість вантажу, що перевозиться з пункту i в пункт j. Нехай b_{ij} – пропускна спроможність гілки залізниці, що йде з пункту i в пункт j. Якщо задана вартість c_{ij} перевезення одиниці вантажу по гілці $(i, j),$ то маємо математичну модель задачі знаходження оптимального перевезення вантажу, що мінімізує загальну вартість перевезень як задачу знаходження оптимального потоку на описаній транспортній сітці у вигляді задачі знаходження пари (3), (4) за умов (1), (5), де $\sum_{i \in N} I_i = 0.$

3. Критерії оптимальності задач про оптимальний потік у транспортній мережі

Теорема 1. Потік $X = \{x_{ij}, (i, j) \in S\}$ задачі (1)–(4) є оптимальним ***тоді й тільки тоді,*** коли для ***кожної вершини*** $i \in N$ ***існує число*** α_i, таке, що

$$\alpha_j - \alpha_i = c_{ij} \quad при \quad x_{ij} > 0; \tag{6}$$

$$\alpha_{ij} = \alpha_j - \alpha_i - c_{ij} \le 0 \quad при \quad x_{ij} = 0. \tag{7}$$

Величину α_i називають ***потенціалом пункту*** $i \in N$, величину α_{ij} – ***потенціалом дуги*** $(i,\ j) \in S$.

Зауваження 1. Якщо в задачі (1)–(4) немає нейтральних вершин, то ця задача є звичайною транспортною задачею. Позначивши $\alpha_j = \beta_j$ для $\forall\ j\ I_j < 0$ отримаємо з (6)–(7) критерій оптимальності для транспортної задачі:

$$\beta_j - \alpha_i = c_{ij} \quad при \quad x_{ij} > 0;$$

$$\alpha_{ij} = \beta_j - \alpha_i - c_{ij} \le 0 \quad при \quad x_{ij} = 0.$$

Зауваження 2. Задача (1)–(4) – це, очевидно, задача лінійного програмування. Змінні α_i – це, як не важко бачити, змінні задачі, ***двоїстої до*** (1)–(4). Доведення теореми 1 для задачі (1)–(4) може бути одержано як наслідок загального критерію оптимальності для двоїстої задачі з урахуванням вигляду задачі (1)–(4).

Зауваження 3. Оскільки в задачі (1)–(4) умови (1) – це рівності, то у двоїстій до неї задачі змінні (α_i) не мають обмежень за знаком. Тому можна ввести нові змінні $\gamma_i = -\alpha_i$ і теорему 1 переписати у вигляді: потік $\left\{x_{ij}\left(\forall (i,\ j) \in S\right)\right\}$ є оптимальним тоді й тільки тоді, коли $\exists \gamma_i \ \ \forall i \in N,$ такі, що

$$\gamma_i - \gamma_j = c_{ij}, \ \ якщо \quad x_{ij} > 0, \tag{8}$$

$$\gamma_{ij} = \gamma_i - \gamma_j - c_{ij} \le 0, \ \ якщо \ \ x_{ij} = 0. \tag{9}$$

Для задачі знаходження оптимального потоку у транспортній сітці з ***обмеженими пропускними спроможностями*** має місце аналогічна теорема.

Теорема 2. Щоб ***потік*** $X=\{x_{ij},(i,\ j)\in S\}$ в транспортній сітці з обмеженими пропускними спроможностями був ***оптимальним, необхідно й достатньо*** існування $\forall i\in N$ чисел (***потенціалів вершин***) α_i таких, що числа α_{ij} – (потенціали дуг (i,j):

1) ***недодатні, якщо дуги не завантажені:***

$$\alpha_{ij}=\alpha_j-\alpha_i-c_{ij}\le 0 \ \ \text{при}\ \ x_{ij}=0; \tag{10}$$

2) ***нульові***, якщо ***дуги завантажені*** елементом x_{ij} потоку, що ***менше пропускної спроможності*** дуги:

$$\alpha_{ij}=\alpha_j-\alpha_i-c_{ij}=0 \ \ \text{при}\ \ 0<x_{ij}<b_{ij}; \tag{11}$$

3) ***невід'ємні***, якщо дуги ***завантажені*** елементом x_{ij} потоку, ***рівним пропускної спроможності*** дуги:

$$\alpha_{ij}=\alpha_j-\alpha_i-c_{ij}\ge 0 \ \ \text{при}\ \ x_{ij}=b_{ij}\,. \tag{12}$$

Зауваження 4. Задача знаходження оптимального потоку з обмеженими пропускними спроможностями є ЗЛП з двобічними обмеженнями на змінні. Тому доведення теореми 2 не можна отримати як наслідок розглянутого раніше критерію оптимальності, а повинно проводитись безпосередньо. Разом із тим для цієї задачі та для двоїстої до неї справедливі розглянуті теореми двоїстості в ЗЛП. Зазначимо, що двоїстою до даної задачі є задача знаходження чисел α_i $\forall i\in N,$ γ_{ij} $\forall(i,\ j)\in S,$ що максимізують цільову функцію

$$-\sum_{i\in N}\alpha_i I_i-\sum_{(i,\ j)\in S}\gamma_{ij}b_{ij} \tag{13}$$

за умов

$$\alpha_j-\alpha_i-\gamma_{ij}\le c_{ij},\ (i,\ j)\in S; \tag{14}$$

$$\gamma_{ij}\ge 0,\ \ (i,\ j)\in S. \tag{15}$$

4. Розв'язування задачі про оптимальний потік методом потенціалів

Розглянемо випадок ***обмежених пропускних спроможностей дуг.*** Нехай є деякий потік $X = \{x_{ij}\}$. Позначимо $U(X)$ множину дуг з S, для яких

$$0 < x_{ij} < b_{ij}.$$

Опертям для потоку X називають частковий граф $(N, U(X))$. Потік називають ***невиродженим***, якщо його ***опертя є зв'язним графом.***

Припустимо, що потік X є ***невиродженим.***

Побудуємо ***потенціали вершин*** за таким правилом. Візьмемо довільну вершину i_0, покладемо $\alpha_{i_0} = 0$. Розглянемо дуги з $U(X)$. Якщо вершина i_1 така що $(i_0, i_1) \in (X)$, то

$$\alpha_{i_1} = \alpha_{i_0} + c_{i_0 i_1}, \tag{16}$$

якщо ж $(i_1, i_0) \in U(X)$, то

$$\alpha_{i_1} = \alpha_{i_0} - c_{i_0 i_1}. \tag{17}$$

Так можна робити кожен раз, коли визначили потенціал вершини (i_0) графа $(N, U(X))$: потенціал довільної суміжної вершини i_1 (з'єднаної з i_0 або ребром (i_0, i_1), або (i_1, i_0), якщо його ще не визначено, одержуємо за формулами (16) або (17).

Оскільки за припущенням потік X – невироджений, то опертя $(N, U(X))$ – зв'язний граф, отже, за описаним правилом можна визначити потенціал кожної вершини. Нехай це зроблено.

Якщо для потоку X ***виконується критерій оптимальності*** (умови (10)–12)), то він ***є оптимальним.*** Інакше не виконується

одна з умов (10)–(12) хоча б для однієї з дуг $(s, t) \in S$ транспортної сітки:
якщо не виконана умова (10), то маємо:

$$x_{st} = 0; \quad \alpha_t - \alpha_s > c_{st}; \tag{18}$$

якщо не виконана умова (11), то

$$0 < x_{st} < b_{st}; \;\; \alpha_t - \alpha_s \neq c_{st}; \tag{19}$$

якщо ж не виконана умова (12), то

$$x_{st} = b_{st}; \;\; \alpha_t - \alpha_s < c_{st}. \tag{20}$$

Покажемо, як побудувати новий потік у випадку виконання умови (18), для якого значення цільової функції задачі буде меншим (не більшим), ніж для *X*.

Розглянемо дугу $(s, t) \in S,$ для якої умова (18) виконується. Знаходячи потенціали вершин і дійшовши з вершини i_0 до вершини *s,* ми утворили при цьому деякий ланцюг $l_1 = (i_0, i_1, ..., i_p = s),$ а дійшовши до вершини *t* – деякий ланцюг $l_2 = (i_0, j_1, ..., j_g = t).$

Розглянемо цикл

$$\mu = (i_0, i_1, ..., i_p = s, \;\; t = j_g, j_{g-1}, ..., j_1, i_0),$$

виберемо ***напрямок обходу*** цього циклу за напрямом ***дуги*** (s,t). Утворимо множину дуг $U^{за}$ сітки, що є в цьому циклі, які напрямлені ***за*** напрямком ***обходу циклу*** μ, а також утворимо множину $U^{проти}$ – множину дуг циклу μ, що напрямлені ***проти напрямку обходу цього циклу.***

Для переобчислення потоку визначимо величину $\boldsymbol{\theta}$ за умовою:

$$\theta = min\left\{ \min_{(i,j) \in U^{проти}} x_{ij}; \quad \min_{(i,j) \in U^{за}} \left(b_{ij} - x_{ij}\right) \right\}. \tag{21}$$

Далі переобчислюємо потік:

$$x_{ij} := x_{ij} + \theta \quad при \quad (i,j) \in U^{за}; \qquad (22)$$

$$x_{ij} := x_{ij} - \theta \quad при \quad (i,j) \in U^{проти}; \qquad (23)$$

$$x_{ij} := x_{ij} \ при \ (i,j) \in S - \left(U^{за} \cup U^{проти}\right). \qquad (24)$$

Зауваження 5. Ланцюги l_1 та l_2 можуть мати однакові дуги (i, j). Тому одна з дуг (i, j), циклу μ буде належати $U^{за}$, а інша $U^{проти}$. В цьому випадку формули (22), (23) застосовуємо до дуги послідовно, тобто x_{ij} фактично не змінюється.

Очевидно, що значення x_{ij}, одержані за формулами (21)–(24), задовольняють ***умові (5),*** при цьому ***інтенсивність вершин не змінюється,*** умова (1) виконується. Тобто множина X величин x_{ij}, обчислених за (22)–(24), ***є потоком,*** причому з ***меньшим значенням цільової функції.*** Перевіримо це, позначивши $x_{ij}^{н}$, $x_{ij}^{с}$ – нові та старі значення елементів пото-ку відповідно. Маємо, ураховуючи правило побудови потенціалів, умову (18), а також формули (22)–(24):

$$\sum_{(i,j)\in S} c_{ij}x_{ij}^{с} - \sum_{(i,j)\in S} c_{ij}x_{ij}^{н} = \theta\left(\sum_{(i,j)\in U^{проти}} c_{ij} - \sum_{(i,j)\in U^{за}} c_{ij}\right) =$$

$$= \theta\left(\alpha_{i_0} - \alpha_{i_1} + \alpha_{i_2} - \ldots - \alpha_s - c_{st} + \alpha_t - \ldots - \alpha_{i_0}\right) = \theta\left(\alpha_t - \alpha_s - c_{st}\right) > 0.$$

Аналогічно будується новий потік у випадках виконання умов (19), (20).

Покажемо як будується потік у випадку умови (20), для якого значення цільової функції задачі буде не більше, ніж для X.

Розглянемо дугу $(s,t) \in S,$ для якої умова (20) виконується. Будуємо $U^{за}$ і $U^{проти},$ як це описано у випадку виконання умови (18).

Для переобчислення потоку використовуються співвідношення типу (21)–(24), у яких $U^{за}$ та $U^{проти}$ міняються місцями. Тобто:

$$\theta = min\left\{ \min_{(i,j)\in U^{за}} x_{ij}; \quad \min_{(i,j)\in U^{проти}} \left(b_{ij} - x_{ij}\right) \right\}. \tag{25}$$

Потік переобчислюється так:

$$x_{ij} := x_{ij} + \theta \text{ при } (i,j)\in U^{проти}; \tag{26}$$

$$x_{ij} := x_{ij} - \theta \text{ при } (i,j)\in U^{за}; \tag{27}$$

$$x_{ij} := x_{ij} \text{ при } (i,j)\in S - \left(U^{за} \bigcup U^{проти}\right). \tag{28}$$

Аналогічно випадку виконання умови (18) показується, що отримано потік, а цільова функція не збільшується.

У випадку виконання умови (19) використовують описані випадки виконання умов або (18), або (20) залежно від того, чи $\alpha_{ij} > 0$, чи $\alpha_{ij} < 0$ при $0 < x_{ij} < b_{ij}$ відповідно.

Отже, коротко підсумовуючи, можна зазначити такі етапи методу потенціалів для задачі знаходження оптимального потоку з обмеженням на пропускні спроможності:

1 етап. За відомим невиродженим потоком визначають ***потенціали*** вершин.

2 етап. Перевірка ***критерію оптимальності.*** Якщо він виконався, то поточний потік оптимальний. Зупинка алгоритму. ***Інакше*** – на ***етап 3.***

3 етап. Переобчислюється потік, його опертя (знаходиться ***цикл перерахунку***, параметр $\boldsymbol{\theta}$). ***Перехід на етап 1.***

Зауваження 6. ***Початковий потік*** (максимальний) можна знайти методом ***Форда-Фолкерсона***. ***Якщо опертя*** потоку ***незв'язне***, то виродженість потоку можна подолати в такій спосіб, який називають ***збуренням***. Несуттєво модифікуємо вихідну транспортну сітку так, щоб нове опертям потоку $X(\varepsilon) = \left\{x_{ij}(\varepsilon)\right\}$ було вже зв'язним графом. Виберемо в кожній із k компонент зв'язності опертя довільну вершину (якщо є – джерело) n_i, зменшимо її інтенсивність на довільну малу величину $\varepsilon_i > 0$. Уведемо до опертя фіктивну вершину з інтенсивністю $I_ф$:

$$I_ф = \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i .$$

Далі ***фіктивна вершина з'єднується з кожною вершиною*** n_i ($\forall_i = 1, 2,...,k$) дугами, яким приписують ***нульову вартість*** та ***необмежену пропускну спроможність***. Опертя потоку $X(\varepsilon)$ в новій транспортній сітці буде зв'язним графом, а отже потік $X(\varepsilon)$ – невиродженим. Після розв'язування задачі покладають $\forall i$ $\varepsilon_i = 0$.

Зауважимо, що практично при розв'язуванні задач виродженість виключають, з'єднучи компоненти зв'язності опертя фіктивними елементами потоку $x_{ij} = 0$.

5. Приклади

Приклад 1. Знайти оптимальний потік на графі (рис. 1), якщо: $I_1 = 5;$ $I_2 = I_3 = 0;$ $I_4 = -5;$ $c_{12} = 4;$ $c_{13} = 5;$ $c_{23} = 1;$ $c_{24} = 4;$ $c_{34} = 2.$

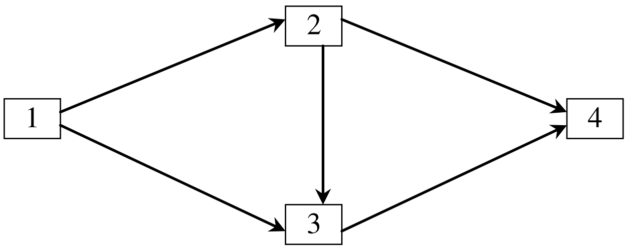

Рисунок 1 – Граф із прикладу 1

Відомі також пропускні проможності: $b_{12} = 6;$ $b_{13} = 3;$ $b_{23} = 5;$ $b_{24} = 5;$ $b_{34} = 4.$ Нехай відомий початковий потік, ненульові елементи якого такі: $x_{12} = 5;$ $x_{24} = 4;$ $x_{23} = 1;$ $x_{34} = 1.$

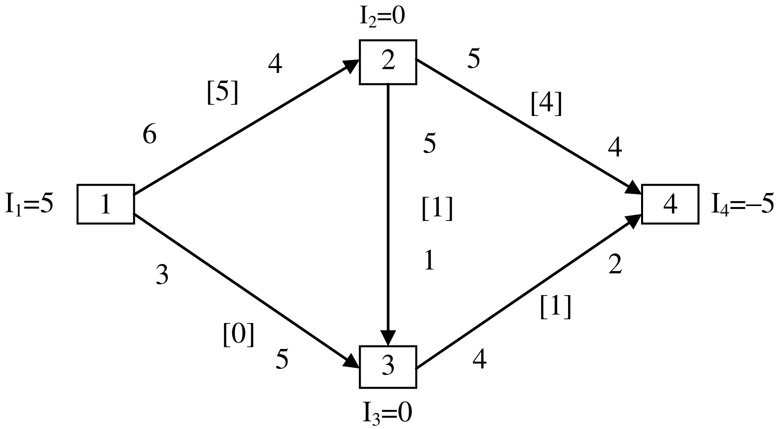

Рисунок 2 – Транспортна сітка із прикладу 1

На рис. 2 зображено транспортну сітку, при цьому інтенсивності показано біля вершин; на кожній дузі (i, j) стоять пропускна спроможність b_{ij} (біля початку дуги, тобто на дузі біля вершини *i*); елемент потоку x_{ij} (по середені дуги (i, j) у квадратних дужках [x_{ij}]), вартість c_{ij} (на кінці дуги (i, j), тобто на дузі біля вершини ***j***).

Зазначимо, що значення F_0 цільової функції для цього потоку таке: $F_0 = 5{\cdot}4 + 4{\cdot}4 + 1{\cdot}1 + 1{\cdot}2 = 39$.

Опертя потоку $U(X) = \{(1, 2), (2, 4), (2, 3), (3, 4)\}$. Граф $(N, U(X))$ зв'язний. Отже, потік невироджений.

Знайдемо потенціали вершин. Нехай $i_0 = 1;$ $\alpha_1 = 0;$ $(1,2) \in U(X)$, отже, $\alpha_2 = \alpha_1 + c_{12} = 0 + 4 = 4;$ $(2, 4) \in U(X)$, отже $\alpha_4 = \alpha_2 + c_{24} = 4 + 4 = 8;$ $(2, 3) \in U(X)$, отже, $\alpha_3 = \alpha_2 + c_{23} = 4 + 1 = 5.$ Усі вершини мають потенціали.

Перевіряємо для цього потоку критерій оптимальності – умова (10)–(12):

1) $\alpha_{12} = \alpha_2 - \alpha_1 - c_{12} = 4 - 0 - 4 = 0,$ $x_{12} = 5 < b_{12},$

отже, виконалась умова (11);

2) $\alpha_{13} = \alpha_3 - \alpha_1 - c_{13} = 5 - 0 - 5 = 0,\ x_{13} = 0,$

отже, виконалась умова (10);

3) $\alpha_{23} = \alpha_3 - \alpha_2 - c_{23} = 5 - 4 - 1 = 0,\ x_{23} = 1 < b_{23},$

отже, виконалась умова (11);

4) $\alpha_{24} = \alpha_4 - \alpha_2 - c_{24} = 8 - 4 - 4 = 0;\ x_{24} = 4 < b_{24},$

отже, виконалась умова (11);

5) $\alpha_{34} = \alpha_4 - \alpha_3 - c_{34} = 8 - 5 - 2 = 1 \neq 0;\ x_{34} = 1 < b_{34} = 4,$

таким чином, умова (11) ***не виконалася,*** потік не є оптимальним. Отже, маємо випадок, що описано співвідношенням (19), де $s = 3; t = 4$.

Маємо: $l_1 = (1,\ 2,\ 3 = s);\ l_2 = (1,\ 2,\ 4 = t)$. Утворюємо $\mu = (1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 2,\ 1)$. Формуємо $U^{за} = \{(1,\ 2),\ (2,\ 3),\ (3,\ 4)\};$ $U^{проти} = \{(2,\ 4),\ (1,\ 2)\}$. Знаходимо $\boldsymbol{\theta}$ за (21).

$$\theta = min\left\{ \min_{U^{проти}} \{x_{12},\ x_{24}\};\ \min_{U^{за}} \{(b_{12} - x_{12});\ (b_{23} - x_{23});\ (b_{34} - x_{34})\} \right\} =$$

$$= min\{min\{4,\ 5\}; min\{6 - 5;\ 5 - 1;\ 4 - 1\}\} = min\{4,\ 1\} = 1.$$

Скориставшись формулами (22)–(24), переобчислюємо потік.

$x_{12} := x_{12} + \theta;\ (1,2) \in U^{за};\ x_{12} = 5 + 1 = 6;$

$x_{12} := x_{12} - \theta;\ (1,2) \in U^{проти};\ x_{12} = 6 - 1 = 5,$ (див. зауваження 5);

$x_{13} = 0;\ \left((1,3) \in S - \left(U^{за} \cup U^{проти}\right)\right);$

$x_{23} := x_{23} + \theta = 1 + 1 = 2;\ \left((2,3) \in U^{за}\right);$

$x_{24} := x_{24} - \theta;\ (2,4) \in U^{проти};\ x_{24} = 4 - 1 = 3;$

$x_{34} := x_{34} + \theta;\ (3,4) \in U^{за};\ x_{34} = 1 + 1 = 2.$

$F_1 = 38 < F_0 = 39$ (рис. 3).

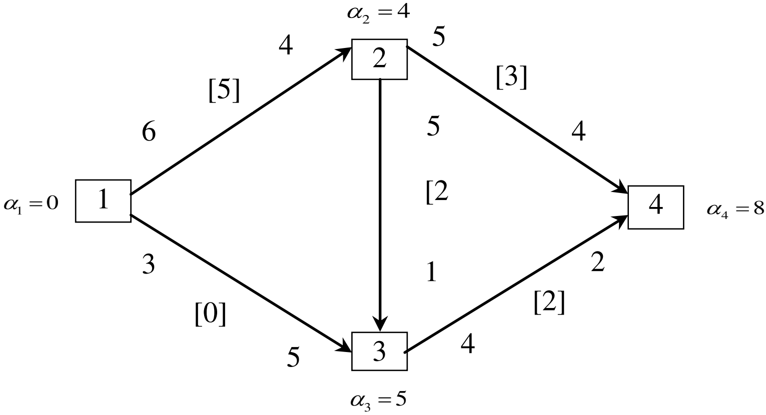

Рисунок 3 – Потік після першого перерахунку

Опертя $(N, U(X))$ не змінилося. Перевіряємо критерій оптимальності, використовуючи відомі α_{ij}:

1) $\alpha_{12} = 0;\ \ x_{12} = 5 < 6 = b_{12};$ виконалась умова (11);

2) $\alpha_{13} = 0;\ x_{13} = 0;$ виконалась умова (10);

3) $\alpha_{23} = 0;\ \ x_{23} = 2 < 5 = b_{23};$ виконалась умова (11);

4) $\alpha_{24} = 0;\ \ x_{24} = 3 < 5 = b_{24};$ виконалась умова (11);

5) $\alpha_{34} = \alpha_4 - \alpha_3 - c_{34} = 8 - 5 - 2 = 1 \neq 0;\quad x_{34} = 2 < 4 = b_{34};$ отже, умова (11) не виконалась.

Знаходимо

$$\theta = min\left\{ \min_{(i,j)\in U^{проти}} \left\{ x_{ij} \right\};\ \min_{(i,j)\in U^{за}} \left\{ b_{ij} - x_{ij} \right\} \right\} =$$

$$= min\left\{ min\left\{ x_{12};\ x_{24} \right\};\quad min\left\{ b_{12} - x_{12};\ b_{23} - x_{23};\ b_{34} - x_{34} \right\} \right\} =$$

$$= min\left\{ min\left\{ 5;\ 3 \right\};\quad min\left\{ 6 - 5;\ 5 - 2;\ 4 - 2 \right\} \right\} = 1.$$

Переобчислюємо потік:

$x_{12} = 5 + 1 - 1 = 5;\ \ x_{13} = 0;$

$x_{23} := x_{23} + \theta = 2 + 1 = 3;$

$x_{24} := x_{24} - \theta = 3 - 1 = 2;$

$x_{34} := x_{34} + \theta;\ \ x_{34} = 2 + 1 = 3.$

$F_2 = 37 < F_1 = 38$ (рис. 4).

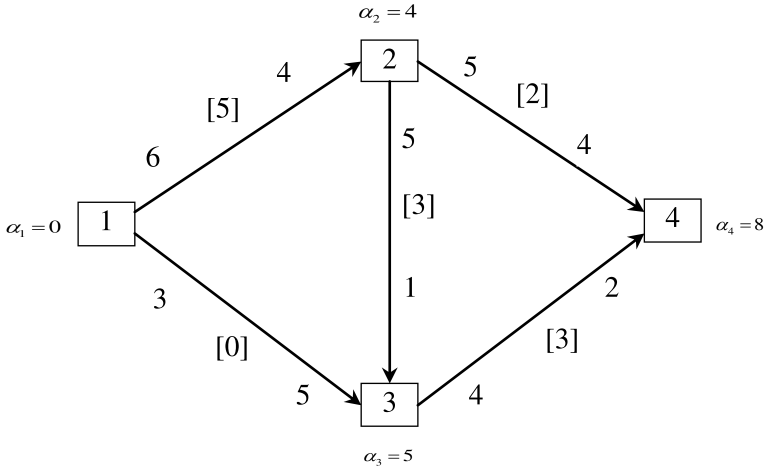

Рисунок 4 – Потік після другого перерахунку

Опертя не змінилося. Перевірка критерію оптимальності:

1) $\alpha_{12} = 0;\ \ x_{12} = 5 < 6 = b_{12};$ виконалась умова (11);

2) $\alpha_{13} = 0;\ \ x_{13} = 0;$ виконалась умова (10);

3) $\alpha_{23} = 0;\ \ x_{23} = 3 < 5 = b_{23};$ виконалась умова (11);

4) $\alpha_{24} = 0;\ \ x_{24} = 2 < 5 = b_{24};$ виконалась умова (11);

5) $\alpha_{34} = 1 \neq 0;\ \ x_{34} = 3 < 4 = b_{34};$ не виконалась умова (11).

Знаходимо θ :

$$\theta = min\left\{min\{5;\ 2\};\ min\{6-5;\ 5-3;\ 4-3\}\right\} = min\{2;1\} = 1.$$

Переобчислюємо потік:

$x_{12} = 5;\ \ x_{13} = 0;$

$x_{23} := x_{23} + \theta = 3 + 1 = 4;$

$x_{24} := x_{24} - \theta = 2 - 1 = 1;$

$x_{34} := x_{34} + \theta; \;\; x_{34} = 3 + 1 = 4.$

Опертя має $U(x) = \{(1,2),(2,3),(2,4)\}$, дуга (3, 4) не використовувалася для визначення потенціалів. Отже, потенціали вершин можна залишити такими, як і для цього опертя.

Перевіряємо критерій оптимальності:

1) $\alpha_{12} = 4 - 0 - 4 = 0; \;\; x_{12} = 5 < 6 = b_{12};$

2) $\alpha_{13} = 5 - 0 - 5 = 0; \;\; x_{13} = 0;$

3) $\alpha_{23} = 5 - 4 - 1 = 0; \;\; x_{23} = 4 < 5 = b_{23};$

4) $\alpha_{24} = 8 - 4 - 4 = 0; \;\; x_{24} = 1 < 5 = b_{24};$

5) $\alpha_{34} = 8 - 5 - 2 = 1 > 0; \;\; x_{34} = 4 = b_{34};$ тобто виконалась умова (12) для x_{34}. Отже, виконався критерій оптимальності. Знайдений потік – оптимальний.

Значення F_3 цільової функції для цього потоку: $F_3 =$ $=5\cdot4 + 4\cdot1 + 1\cdot4 + +4\cdot2 = 36 < F_2 = 37$.

Приклад розв’язано.

Приклад 2. Умова із прикладу 1, де змінено інтенсивності джерела $I_1 = 7$ та стоку $I_4 = –7$.

Початковий потік показано на рис. 5 ($F_0 = 53$).

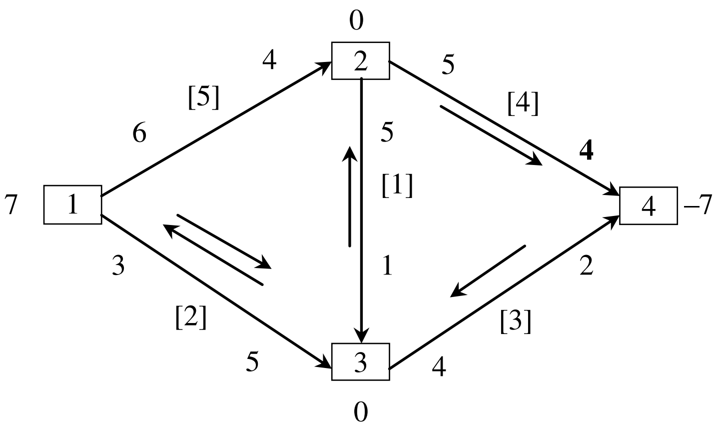

Рисунок 5 – Умови та початковий потік із прикладу 2

Опертя потоку – це весь граф, оскільки $U\left(X\right)=S=$ $=\left\{\left(1,2\right);\left(1,3\right);\left(2,3\right);\left(2,4\right);\left(3,4\right)\right\}$.

Знайдемо потенціали вершин: $\alpha_1=0;$ $\alpha_3=\alpha_1+c_{13}=5;$ $\alpha_2=\alpha_3-c_{23}=5-1=4;$ $\alpha_4=\alpha_3+c_{34}=7.$

Далі знаходимо потенціали дуг і перевіряємо критерій оптимальності:

1) $\alpha_{12}=\alpha_2-\alpha_1-c_{12}=4-0-4=0,$ $x_{12}=5<b_{12}=6;$ умова (11) виконана;

2) $\alpha_{13}=\alpha_3-\alpha_1-c_{13}=5-0-5=0,$ $x_{13}=2<b_{13}=3,$ умова (11) виконана;

3) $\alpha_{23}=\alpha_3-\alpha_2-c_{23}=5-4-1=0,$ $x_{23}=1<b_{23}=5,$ умова (11) виконана;

4) $\alpha_{34}=\alpha_4-\alpha_3-c_{34}=7-5-2=0,$ $x_{34}=3<b_{23}=4,$ умова (11) виконана;

5) $\alpha_{24}=\alpha_4-\alpha_2-c_{24}=7-4-4=-1\neq 0,$ $x_{24}=4<b_{24}=5,$ ***не виконується умова*** (11).

$l_1=\left(1,3,2\right);$ $l_2=\left(1,3,4\right);$ $\mu=\left(1,\ 3,\ 2,\ 4,3,1\right).$

$U^{за}=\left\{\left(1,3\right),\ \left(2,4\right)\right\},$ $U^{проти}=\left\{\left(1,3\right),\ \left(3,4\right),\left(2,3\right)\right\}.$

Знаходимо, використовуючи (25),

$$\theta=min\left\{\min_{U^{за}}\left\{x_{ij}\right\};\ \min_{U^{проти}}\left\{b_{ij}-x_{ij}\right\}\right\}=min\left\{2,4;\left(3-2\right);\left(5-1\right);\left(4-3\right)\right\}=1.$$

Перерахуємо за (26)–(28) потік:

$x_{13}:=x_{13}+\theta=2+1=3;$

$x_{24}:=x_{24}-\theta=4-1=3;$

$x_{13}:=x_{13}-\theta=3-1=2;$

$x_{34}:=x_{34}+\theta=3+1=4;$

$x_{23}:=x_{23}+\theta=2$ (рис. 6).

$F_1 = 5\cdot4 + 3\cdot4 + 2\cdot5 + 4\cdot2 + 2\cdot1 = 52.$

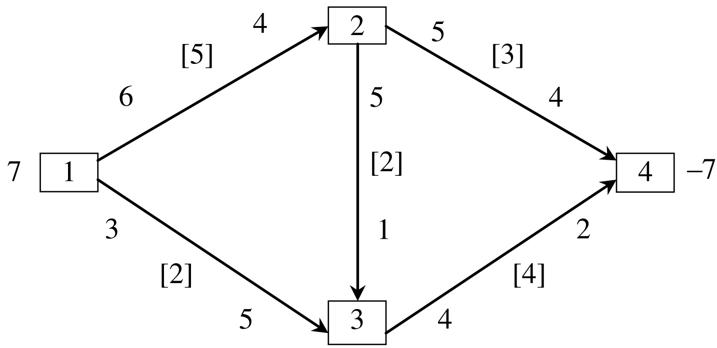

Рисунок 6 – Потік прикладу 2 після першого перерахунку

Опертя потоку: $U(X)=\{(1,2),(1,3),(2,3),(2,4)\}$. Розрахуємо потенціали вершин:

$\alpha_1=0;\ \alpha_3=5;\ \alpha_2=4;$

$\alpha_1\to\alpha_2\to\alpha_4,\ \alpha_4=4+4=8.$

$\alpha_{12}=0;\ \alpha_{13}=0;\ \alpha_{23}=0;\ \alpha_{24}=0;\ \alpha_{34}=1;\ x_{34}=4=b_{34}$. Виконується критерій того, що потік оптимальний.

Інформаційні джерела

1. Математические методы исследования операций / Ермольев Ю. М., Ляшко И. И., Михалевич В. С., Тюптя В. И. – Київ : Вища шк., 1979. – С. 40–46.

Лекція 22. Задача про найкоротший шлях і її розв'язування методом Мінті

1. Постановка задачі

Нехай задано неорієнтований граф $G=(N,\rho)$. Нехай ребро $(i,j)\in\rho$ має довжину $l_{ij}\geq 0$. Задача полягає у знаходженні шляху найменшої довжини, що веде із заданої вершини *s* в задану вершину *t*.

Нагадаємо, що довжиною шляху $\mu = \left(s = i_0, i_1, ..., i_p = t\right)$ називають величину $l(\mu)$, що визначається за формулою:

$$l(\mu) = \sum_{k=1}^{p} l_{i_{k-1}i_k}.$$

Сформулюємо цю задачу, як задачу про оптимальний потік. Розглянемо сітку $\Gamma = (N, S)$, де $S = \rho$, вершина s – джерело, інтенсивність якого $I_s = 1$, а вершина t є стоком одиничної інтенсивності, тобто $I_t = -1$. Усі інші вершини з N є нейтральними $\left(I_n = 0 \ n \in N, \forall n \neq s, \ n \neq t\right)$. У цій сітці $b_{ij} = \infty \ \forall (i, j) \in S$, вартість перевезень на дузі (i, j) $c_{ij} = l_{ij} \ \forall (i, j) \in \rho$. Потік $\left\{x_{ij}, (i, j) \in S\right\}$ повинен задовольняти такій умові (закон Кірхгофа):

$$\sum_{\substack{j \\ \forall (i, j) \in S}} x_{ij} - \sum_{\substack{j \\ \forall (j, i) \in S}} x_{ji} = \begin{cases} 1, \ i = s \\ -1, \ i = t \\ 0, \ i \neq s; \ i \neq t. \end{cases}$$

Задача про найкоротший шлях зведена до задачі про оптимальний потік.

2. Метод Мінті

Крок 0. $\tilde{c}_{ij} := c_{ij} \forall (i, j) \in S$. $\tilde{N} = \varnothing$.

Крок 1. Позначимо вершину $i_0 = s$ позначкою $m_{i_0} = 0$ (будь-яка вершина позначається тільки раз). $\tilde{N} := \tilde{N} \cup \{i_0\}$.

Крок 2. Нехай i – позначена вершина. Позначимо позначкою $m_j = i$ ще не позначені вершини j, якщо $\tilde{c}_{ij} = 0$. $\tilde{N} := \tilde{N} \cup \left\{ j \middle| \tilde{c}_{ij} = 0 \right\}$.

Крок 3. Вершина $i_n = t$ позначена? Якщо – ні, то перехід на крок 4. Якщо так, то шуканим є шлях

$$\mu = \left(i_0, i_1, ..., i_{n-1}, i_n\right),$$

де $i_{n-1} = m_{i_n}$, $i_{n-2} = m_{i_{n-1}}, ..., i_1 = m_{i_2}$; $i_0 = m_{i_1}$; $m_{i_0} = 0$.

Зупинка алгоритму.

Крок 4. Знайдемо

$$\tilde{\Delta}_i = \min_{j \notin \tilde{N}} \tilde{c}_{ij} \quad \forall i \in \tilde{N}.$$

$$\tilde{\Delta} = \min_{i \in \tilde{N}} \tilde{\Delta}_i.$$

Крок 5. Зменшуємо $\tilde{c}_{ij}$ за правилом:

$$\tilde{c}_{ij} := \tilde{c}_{ij} - \tilde{\Delta} \quad \forall (i, j): \ i \in \tilde{N} \quad j \notin \tilde{N}.$$

Перехід на крок 2.

Зауваження 1. З декількох шляхів, що виділяються та закінчуються в одній і тій же вершині, береться тільки один (довільно).

Зауваження 2. Кожну з позначених за алгоритмом Мінті вершину можна розглядати як останню, зупиняючи алгоритм після її позначення. Тобто при пошуку найкоротшого шляху алгоритм визначає найкоротший шлях із s до довільної поміченої вершини.

Зауваження 3. Провівши індукцію за номером етапу, на якому була позначена вершина t, можна довести, що побудований шлях є найкоротшим.

Дійсно, якщо вершина t позначена на першому етапі, то твердження, що доводиться, очевидне. Припустимо, що твердження справедливе для вершин, які позначені не більше ніж за r етапів. Якщо вершина t назначена на етапі $r+1$, то згідно з алгоритмом вона позначена як продовження найкоротшого шляху (одного з них, якщо їх декілька), що визначений за r попередніх етапів.

При цьому продовження цього шляху відбулося на мінімальну з можливих відстаней.

3. Приклад

Знайдемо найкоротший шлях з 1 в 6 на сітці, що зображена на рис. 1.

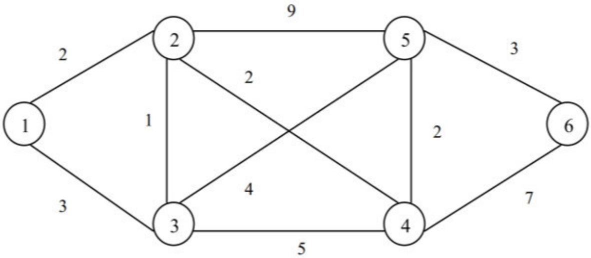

Рисунок 1 – Сітка із прикладу

Крок 1. Позначаємо вершину 1: $m_1 = 0.$ $\tilde{N} = \{1\}$.

Крок 2. Не існує вершин j, що $\tilde{c}_{ij} = 0;$ отже $\tilde{N} = \{1\} \cup \varnothing$.

Крок 3. Вершина 6 не позначена, перехід на крок 4.

Крок 4. $\tilde{\Delta}_1 = min\{\tilde{c}_{12}, \tilde{c}_{13}\}$ $\left(1 \in \tilde{N}; 2, 3 \notin \tilde{N}, 4, 5, 6 \notin \tilde{N}\right.$ теж, але дуг (1, 4), (1, 5), (1, 6) в сітці немає).

Отже, $\tilde{\Delta}_1 = min\{2; 3\} = 2.$ $\tilde{\Delta} = \min\limits_{i \in \{1\}} \tilde{\Delta}_i = 2.$

Крок 5. $\tilde{c}_{12} := \tilde{c}_{12} - 2 = 2 - 2 = 0;$ $\tilde{c}_{13} := \tilde{c}_{13} - 2 = 3 - 2 = 1.$

Перехід на крок 2 (рис. 2, 3).

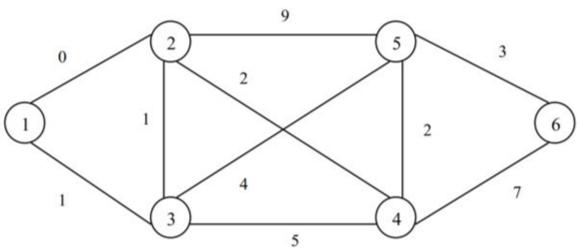

Рисунок 2 – Сітка після першого етапу

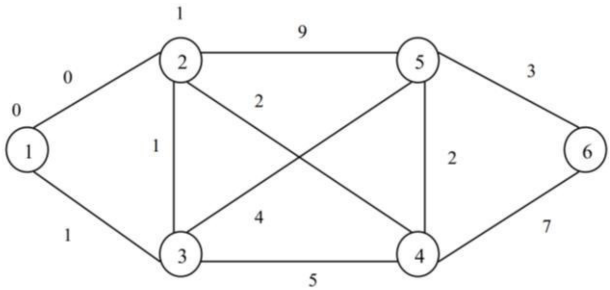

Рисунок 3 – Позначки вершин після першого етапу

$$\tilde{c}_{12} = 0 \Rightarrow j = 2,\ m_2 = 1\left(m_j = i\right),\ \tilde{N} := \tilde{N} \bigcup \left\{2\right\} = \left\{1,2\right\}.\ \ \tilde{N} = \left\{1, 2\right\},$$

$$\tilde{\Delta}_1 = min\left\{\tilde{c}_{13}\right\} = 1;\ \ \tilde{\Delta}_2 = min\left\{\tilde{c}_{23}, \tilde{c}_{24}, \tilde{c}_{25}\right\} = min\left\{1, 2, 9\right\} = 1$$

$$\tilde{\Delta} = min\left\{\tilde{\Delta}_1, \tilde{\Delta}_2\right\} = min\left\{1; 1\right\} = 1.$$

$\tilde{c}_{13} := \tilde{c}_{13} - 1 = 1 - 1 = 0;$ $\tilde{c}_{25} := 8;$ $\tilde{c}_{24} := 1;$ $\tilde{c}_{23} := 0$. Отримали сітку, що на рис. 4.

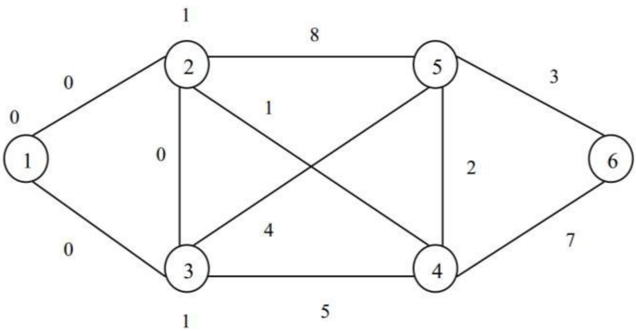

Рисунок 4 – Позначки вершин після другого етапу

$\tilde{N} = \left\{1, 2, 3\right\};$

$\tilde{\Delta}_1 \in \varnothing;\ \ \tilde{\Delta}_2 = min\left\{\tilde{c}_{25}, \tilde{c}_{24}\right\} = min\left\{8; 1\right\} = 1;$

$\tilde{\Delta}_3 = min\left\{\tilde{c}_{35}, \tilde{c}_{34}\right\} = min\left\{4; 5\right\} = 4;\ \tilde{\Delta} = min\left\{\tilde{\Delta}_2; \tilde{\Delta}_3\right\} = min\left\{1; 4\right\} = 1.$

Маємо сітку, що на рис. 5.

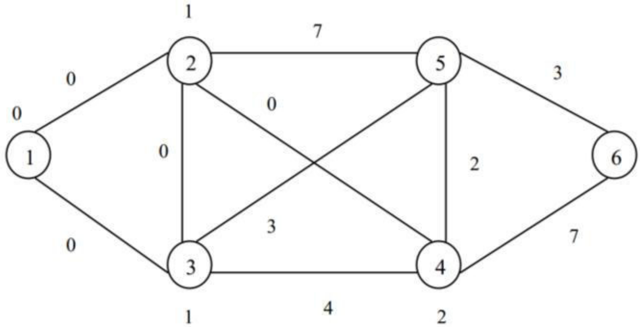

Рисунок 5 – Сітка після третього етапу

$\tilde{N} = \{1, 2, 3, 4\}$,

$\tilde{\Delta}_1 \in \varnothing;\ \tilde{\Delta}_2 = 7;\ \ \tilde{\Delta}_3 = 3;\ \tilde{\Delta}_4 = 2;\ \tilde{\Delta} = 2$.

Отримуємо сітку, що зображена на рис. 6.

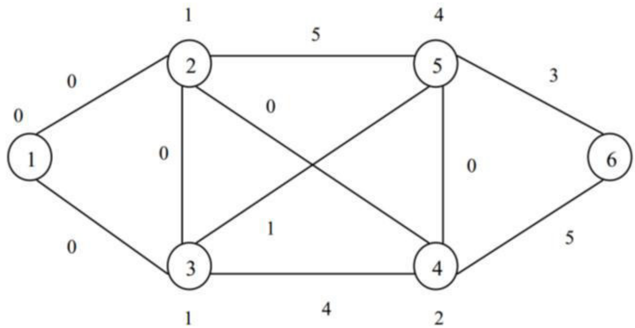

Рисунок 6 – Сітка після четвертого етапу

$\tilde{N} = \{1, 2, 3, 4, 5\};$

$\tilde{\Delta}_1 \in \varnothing;\ \tilde{\Delta}_2 \in \varnothing;\ \ \tilde{\Delta}_3 \in \varnothing;\ \tilde{\Delta}_4 = 5;$

$\tilde{\Delta}_5 = 3;\ \tilde{\Delta} = 3.$ $\tilde{c}_{56} := 0;\ \tilde{c}_{46} := 2.$ Стік 6 позначається позначкою 5. Отже, повертаючись за позначками зі стоку, маємо такий шлях (із кінця до джерела): 6; 5; 4; 2; 1; знаходимо його довжину 2 + 2 + 2 + 3 = 9. Задача розв’язана.

ТЕСТИ ДО ЛЕКЦІЙ

Тести до лекцій 16–17

1. Який наступний крок методу північно-західного кута у транспортній задачі (ТЗ), що задана таблицею?

	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	1 10	2	3	10
A_2	4	5	6	1
A_3	7	8	9	30
b_j	15	1	25	

A.

	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	1 10	2 1	3	10
A_2	4	5	6	1
A_3	7	8	9	30
b_j	15	1	25	

B.

	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	1 10	2	3	10
A_2	4 5	5	6	1
A_3	7	8	9	30
b_j	15	1	25	

C.

	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	1 10	2	3	10
A_2	4 1	5	6	1
A_3	7	8	9	30
b_j	15	1	25	

D.

	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	1 10	2	3	10
A_2	4	5 1	6	1
A_3	7	8	9	30
b_j	15	1	25	

2. Який із допустимих розв'язків транспортної задачі отримано методом найменшої вартості?

A.

	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	1 10	2	3	10
A_2	4 5	11 15	6	20
A_3	7	8 5	10 25	30
b_j	15	20	25	

B.

	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	1	2 10	3	10
A_2	4 15	5 5	6	20
A_3	7	8 5	9 25	30
b_j	15	20	25	

C.

	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	2 10	1	1	10
A_2	2 5	2 15	1	20
A_3	1	2 5	2 25	30
b_j	15	20	25	

D.

	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	2	1 10	3	10
A_2	1 15	1 5	1	20
A_3	1	1 5	1 25	30
b_j	15	20	25	

3. Який із ланцюжків перерахунку правильний у транспортній задачі?

A.

	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	C_{11} $\ominus$ 10	C_{12} $\oplus$ $\boxed{4}$	C_{13} $\boxed{1}$	10
A_2	C_{21} $\oplus$ 5	C_{22} $\ominus$ 15	C_{23} $\boxed{0}$	20
A_3	C_{31} $\boxed{-5}$	C_{32} 5	C_{33} 25	30
b_j	15	20	25	

B.

	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	C_{11} $\ominus$ 10	C_{12} $\boxed{4}$	C_{13} $\oplus$ $\boxed{1}$	10
A_2	C_{21} $\oplus$ 5	C_{22} $\ominus$ 15	C_{23} $\boxed{0}$	20
A_3	C_{31} $\boxed{-5}$	C_{32} $\oplus$ 5	C_{33} $\ominus$ 25	30
b_j	15	20	25	

C.

	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	C_{11} 10	C_{12} $\boxed{4}$	C_{13} $\boxed{1}$	10
A_2	C_{21} $\ominus$ 5	C_{22} $\oplus$ 15	C_{23} $\boxed{0}$	20
A_3	C_{31} $\oplus$ $\boxed{-5}$	C_{32} $\ominus$ 5	C_{33} 25	30
b_j	15	20	25	

D.

	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	C_{11} 10	C_{12} $\boxed{4}$	C_{13} $\boxed{1}$	10
A_2	C_{21} 5	C_{22} Θ 15	C_{23} $\oplus$ $\boxed{0}$	20
A_3	C_{31} $\boxed{-5}$	C_{32} $\oplus$ 5	C_{33} Θ 25	30
b_j	15	20	25	

4. Яка величина θ пересувається ланцюгом перерахування у транспортній задачі?

	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	C_{11} Θ 10	C_{12} $\boxed{-2}$	C_{13} $\oplus$ $\boxed{1}$	10
A_2	C_{21} $\oplus$ 5	C_{22} Θ 16	C_{23} $\boxed{0}$	21
A_3	C_{31} $\boxed{1}$	C_{32} $\oplus$ 5	C_{33} Θ 25	30
b_j	15	21	25	

A. 25;
B. 15;
C. 10;
D. 5.

5. Для якої із транспортних задач виконано критерій оптимальності?

A.

	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	C_{11} 10	C_{12} $\boxed{0}$	C_{13} $\boxed{-1}$	10
A_2	C_{21} 5	C_{22} 15	C_{23} $\boxed{0}$	20
A_3	C_{31} $\boxed{0}$	C_{32} 5	C_{33} 25	30
b_j	15	20	25	

B.

	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	C_{11} 10	C_{12} $\boxed{1}$	C_{13} $\boxed{-1}$	10
A_2	C_{21} 5	C_{22} 15	C_{23} $\boxed{-1}$	20
A_3	C_{31} $\boxed{-1}$	C_{32} 5	C_{33} 25	30
b_j	15	20	25	

C.

	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	C_{11} 10	C_{12} $\boxed{2}$	C_{13} $\boxed{0}$	10
A_2	C_{21} 5	C_{22} 15	C_{23} $\boxed{-1}$	20
A_3	C_{31} $\boxed{-1}$	C_{32} 5	C_{33} 25	30
b_j	15	20	25	

D.

	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	C_{11} 10	C_{12} $\boxed{3}$	C_{13} $\boxed{0}$	10
A_2	C_{21} 5	C_{22} 15	C_{23} $\boxed{1}$	20
A_3	C_{31} $\boxed{1}$	C_{32} 5	C_{33} 25	30
b_j	15	20	25	

6. Яка із систем для знаходження потенціалів у транспортній задачі записана правильно?

	B_1	B_2	a_i
A_1	1 10	2	10
A_2	3 5	4 15	20
b_j	15	15	

A.

$\beta_1 - \alpha_1 = 1;$

$\beta_2 - \alpha_1 = 2;$

$\beta_1 - \alpha_2 = 3.$

B.

$\beta_1 - \alpha_1 = 1;$

$\beta_1 - \alpha_2 = 3;$

$\beta_2 - \alpha_2 = 4.$

C.

$\beta_1 - \alpha_1 = 1;$

$\beta_2 - \alpha_1 = 2;$

$\beta_2 - \alpha_2 = 4.$

D.

$\beta_2 - \alpha_1 = 2;$

$\beta_1 - \alpha_2 = 3;$

$\beta_2 - \alpha_2 = 4.$

7. Який наступний крок методу мінімального елемента у транспортній таблиці?

	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	1 10	6	3	10
A_2	7	2	8	1
A_3	4	9	5	30
b_j	15	1	25	

A.

	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	1 10	6	3	10
A_2	7 1	2	8	1
A_3	4	9	5	30
b_j	15	1	25	

B.

	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	1 10	6 1	3	10
A_2	7	2	8	1
A_3	4	9	5	30
b_j	15	1	25	

C.

	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	1 10	6	3	10
A_2	7	2 1	8	1
A_3	4	9	5	30
b_j	15	1	25	

D.

	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	1 10	6	3	10
A_2	7	2	8	1
A_3	4	9	5 1	30
b_j	15	1	25	

8. При m пунктах відправлення та n пунктах призначення, невироджений базисний розв'язок транспортної задачі повинен мати:

A. $m–n+1$ ненульових компонент;
B. $m–n–1$ ненульових компонент;
C. $m+n–1$ ненульових компонент;
D. $m+n+1$ ненульових компонент;
E. $m+n$ ненульових компонент.

9. У методі потенціалів величина максимального заванта-ження вибраної порожньої клітини визначається:

A. максимальним значенням перевезень у «від'ємних» клітинах циклу;
B. мінімальним значенням перевезень у «від'ємних» клітинах циклу;
C. максимальним значенням перевезень у «додатних» клітинах циклу;
D. мінімальним значенням перевезень у «додатних» клітинах циклу.

10. Задача, двоїста до транспортної, полягає в:

A. максимізації цільової функції;
B. мінімізації цільової функції.

11. Якщо α_i, $\beta_j\left(i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}\right)$ – потенціали пунктів відправлення та призначення відповідно, і c_{ij} – вартість перевезення з i-го пункту відправлення до j-го пункту призначення, а числа $a_{ij}=\beta_j-\alpha_i-c_{ij}$, то базисний розв'язок буде оптимальним, якщо всі числа a_{ij}:

A. більші або дорівнюють нулю;
B. менші або дорівнюють нулю;
C. дорівнюють нулю;
D. більші нуля;
E. менші нуля.

12. Транспортну задачу називають незбалансованою, якщо:

A. сума запасів не дорівнює сумі потреб;
B. кількість постачальників не дорівнює кількості споживачів;
C. всі вище зазначені варіанти;
D. жоден із зазначених варіантів A, B.

13. Із перерахованих далі методів для знаходження опорного плану транспортної задачі не використовується:

A. метод апроксимації Фогеля;
B. метод потенціалів;

C. метод північно-західного кута;
D. метод мінімального елемента.

14. Із перерахованих методів для покращення опорного плану транспортної задачі використовується:

A. метод апроксимації Фогеля;
B. метод потенціалів;
C. метод північно-західного кута;
D. метод мінімального елемента.

15. Метод збурення застосовується під час розв'язування транспортної задачі у випадку:

A. виродженого опорного плану;
Б. невиродженого опорного плану;
C. завжди;
D. ніколи.

Тести до лекції 18

1. Сітка (мережа) – це:

A. будь-який граф;
B. граф, де тільки вершинам приписані параметри;
C. граф, де тільки дугам (ребрам) приписані параметри;
D. граф, у якому деяким (можливо, усім) дугам (ребрам), вершинам приписані деякі параметри.

2. Поставити у відповідність вершину n і її назву залежно від інтенсивності I_n:

- джерело □	А. $I_n = 0$
- стік □	Б. $I_n \neq 0$
- нейтральна □	В. $I_n > 0$
	Г. $I_n < 0$

3. Потоком у мережі $\Gamma = (N, S)$ назвемо множину X величин $x_{ij}, (i, j) \in S$, $i, j \in N$, для яких виконуються умови:

A. $\sum_j x_{ij} - \sum_j x_{ji} = I_i \quad \forall i \in N;$

$x_{ij} \geq 0 \qquad \forall (i, j) \in S;$

B. $\sum_j x_{ji} - \sum_j x_{ij} = I_i \quad \forall i \in N;.$

$x_{ij} \geq 0 \qquad \forall (i, j) \in S;$

C. $\sum_j x_{ij} - \sum_j x_{ij} \neq I_i \quad \forall i \in N;$

$x_{ij} \leq 0 \qquad \forall (i, j) \in S.$

4. Транспортна мережа (сітка) – це:

A. мережа, у якій визначено деякий потік;
B. будь-який граф;
C. будь-який орієнтований граф;
D. тільки граф, що має цикли.

5. Величина потоку – це величина $Q = \sum_{\forall(j,t)} x_{jt}$, де x_{jt} – потік, а t – це:

A. стік;
B. джерело;
C. нейтральна вершина;
D. ізольована вершина.

6. Розрізом у графі $\Gamma(N,S)$ *називається множина дуг* $R \subset S$ *така, що* $R = \{i, j\}$, *де* $i \in D_s$, $j \in D_t$, S *– джерело,* t *– стік, у S немає елементів* (i, j), $i \in D_s$, $j \in D_t$, *щоб* $(i, j) \notin R$, *а:*

A. $D_s \cup D_t = N,\ D_s \cap D_t = \varnothing,\ \ S \in D_s;\ t \in D_t;$
B. $D_s \cup D_t \neq N,\ D_s \cap D_t = \varnothing,\ \ S \in D_s;\ t \in D_t;$
C. $D_s \cup D_t = N,\ D_s \cap D_t \neq \varnothing,\ \ S \in D_s;\ t \in D_t;$
D. $D_s \cup D_t = N,\ D_s \cap D_t = \varnothing,\ \ S \notin D_s;\ t \notin D_t.$

7. Пропускна спроможність розрізу – це:

A. сума пропускних спроможностей дуг розрізу;

B. найбільша із пропускних спроможностей дуг розрізу;
C. найбільша із пропускних спроможностей дуг, що не ввійшли в розріз;
D. сума пропускних спроможностей дуг, що не ввійшли в розріз.

8. Виберіть правильне формулювання теореми Форда-Фалкерсона:

A. для будь-якої сітки **максимальна** величина потоку дорівнює **мінімальній** із пропускних спроможностей розрізів, що відділяють джерело від стоку;
B. для будь-якої сітки **максимальна** величина потоку дорівнює **максимальній** із пропускних спроможностей розрізів, що відділяють джерело від стоку;
C. для будь-якої сітки **мінімальна** величина потоку дорівнює **максимальній** із пропускних спроможностей розрізів, що відділяють джерело від стоку;
D. для будь-якої сітки **мінімальна** величина потоку дорівнює **мінімальній** із пропускних спроможностей розрізів, що відділяють джерело від стоку.

Тести до лекцій 19–22

1. Нехай $\Gamma = (N, S)$ – транспортна сітка, а $X = \{x_{ij}\}$ – деякий потік в ній; $U(X) = \{(i, j) \in S \,|\, 0 < x_{ij} < b_{ij}\}$, де b_{ij} – пропускна спроможність дуги (i, j). Тоді опертям потоку X є:

A. частковий граф $(N, U(X))$;
B. будь-який граф (N_1, S), де $N_1 \subset N$;
C. будь-який граф $(N_1, U(X))$, де $N_1 \subset N$;
D. будь-який зв'язний граф $(N_1, U(X))$, де $N_1 \subset N$.

2. Потік називають невиродженим, якщо його опертя:

A. зв'язний граф;

B. незв’язний граф;
C. граф, що є деревом;
D. повний дводольний граф.

3. Метод Мінті використовують для знаходження:
A. найкоротшого шляху в мережі;
B. максимального потоку;
C. потоку найменшої вартості;
D. пропускної спроможності мінімального розрізу мережі.

4. Потоком у мережі (N,S) *з інтенсивністю вершин* I_i $\forall i \in N$ *називають множину X величин* x_{ij}, $(i,\ j)\in S$, *для яких виконуються умови:*
A. $\sum_j x_{ji} - \sum_j x_{ij} = I_i \quad \forall i \in N;\ \ x_{ij} \ge 0,\ \ \forall (i,\ j) \in S;$
B. $\sum_j x_{ij} - \sum_j x_{ji} = I_i \quad \forall i \in N;\ \ x_{ij} \ge 0,\ \ \forall (i,\ j) \in S;$
C. $\sum_i x_{ij} - \sum_j x_{ji} = I_i \quad \forall i \in N;\ \ x_{ij} \le 0,\ \ \forall (i,\ j) \in S;.$
D. $\sum_j x_{ij} - \sum_j x_{ji} = I_i \quad \forall i \in S;\ \ x_{ij} \le 0,\ \ \forall (i,\ j) \in N.$

5. Потік $X = \{x_{ij}, (i,\ j) \in S\}$ *задачі про оптимальний транспортний потік у мережі* (N,S) *є оптимальним тоді й тільки тоді, коли для кожної вершини* $i \in N$ *існує число* α_i, *таке, що*
A. $\alpha_j - \alpha_i = c_{ij}$ *при* $x_{ij} > 0;$ $\alpha_{ij} = \alpha_j - \alpha_i - c_{ij} \le 0$ *при* $x_{ij} = 0;$
B. $\alpha_i - \alpha_j = c_{ij}$ *при* $x_{ij} < 0;$ $\alpha_{ij} = \alpha_j - \alpha_i - c_{ij} \le 0$ *при* $x_{ij} = 0;$
C. $\alpha_j - \alpha_i = c_{ij}$ *при* $x_{ij} < 0;$ $\alpha_{ij} = \alpha_i - \alpha_j - c_{ij} \ge 0$ *при* $x_{ij} = 0;$
D. $\alpha_i - \alpha_j = c_{ij}$ *при* $x_{ij} = 0;$ $\alpha_{ij} = \alpha_i - \alpha_j - c_{ij} \ge 0$ *при* $x_{ij} > 0$.

6. Установити відповідність між позначеннями та їх назвами:
A. вартість одиниці елемента потоку;
B. нейтральна вершина;

C. інтенсивність вершини;
D. стік;
E. джерело;
F. пропускна спроможність;
G. елемент потоку.

	1. I_n
	2. n*, коли* $I_n > 0$
	3. n*, коли* $I_n < 0$
	4. n*, коли* $I_n = 0$
	5. b_{ij}
	6. c_{ij}

*7. Нехай {**X**} – множина всіх можливих потоків в транспортній сітці. Задачу знаходження оптимального потоку за умов* $\sum_j x_{ij} - \sum_j x_{ji} = I_i \quad \forall i \in N$ *та* $x_{ij} \geq 0, \quad \forall (i,\ j) \in S$ *має вигляд:*

A. $C^* = \min_{X \in \{X\}} \sum_{(i,\ j) \in S} c_{ij} x_{ij}; \quad X^* = arg \max_{X \in \{X\}} \sum_{(i,\ j) \in S} c_{ij} x_{ij};$

B. $C^* = \max_{X \in \{X\}} \sum_{(i,\ j) \in S} c_{ij} x_{ij}; \quad X^* = arg \min_{X \in \{X\}} \sum_{(i,\ j) \in S} c_{ij} x_{ij};$.

C. $C^* = \min_{X \in \{X\}} \sum_{(i,\ j) \in S} c_{ij} x_{ij}; \quad X^* = arg \min_{X \in \{X\}} \sum_{(i,\ j) \in S} c_{ij} x_{ij};$

D. $C^* = \min_{X \in \{X\}} \sum_{(i,\ j) \in S} x_{ij}; \quad X^* = arg \min_{X \in \{X\}} \sum_{(i,\ j) \in S} c_{ij} x_{ij};$

E. $C^* = \max_{X \in \{X\}} \sum_{(i,\ j) \in S} x_{ij}; \quad X^* = arg \max_{X \in \{X\}} \sum_{(i,\ j) \in S} c_{ij} x_{ij}$.

8. Яким є обмеження на потік у задачі знаходження оптимального потоку у транспортній сітці з обмеженими пропускними спроможностями?

A. $0 \leq x_{ij} \leq b_{ij} \quad \forall (i,\ j) \in S;$

B. $x_{ij} \geq b_{ij}, \ \forall (i,\ j) \in S;$

C. $-\infty \le b_{ij} \le x_{ij} \quad \forall (i, j) \in S;$

D. $x_{ij} \le b_{ij} \quad \forall (i, j) \in S.$

9. Щоб потік $X = \{x_{ij}, (i, j) \in S\}$ у транспортній сітці з обмеженими пропускними спроможностями був оптимальним, необхідно й достатньо існування $\forall i \in N$ чисел (потенціалів вершин) α_i таких, що числа α_{ij} (потенціали дуг (i, j) були:

A.

1) додатні, якщо дуги не завантажені:

$$\alpha_{ij} = \alpha_j - \alpha_i - c_{ij} > 0, \;\; x_{ij} = 0;$$

2) нульові, якщо дуги завантажені елементом x_{ij} потоку, що менше пропускної спроможності дуги:

$$\alpha_{ij} = \alpha_j - \alpha_i - c_{ij} = 0, \;\; 0 < x_{ij} < b_{ij};$$

3) від'ємні, якщо дуги завантажені елементом x_{ij} потоку, рівним пропускної спроможності дуги:

$$\alpha_{ij} = \alpha_j - \alpha_i - c_{ij} < 0, \;\; x_{ij} = b_{ij};$$

B.

1) недодатні, якщо дуги завантажені:

$$\alpha_{ij} = \alpha_j - \alpha_i - c_{ij} \le 0, \;\; x_{ij} = 0;$$

2) нульові, якщо дуги завантажені елементом x_{ij} потоку, рівним пропускної спроможності дуги:

$$\alpha_{ij} = \alpha_j - \alpha_i - c_{ij} = 0, \;\; x_{ij} = b_{ij};$$

3) невід'ємні, якщо дуги не завантажені елементом x_{ij} потоку, менше пропускної спроможності дуги:

$$\alpha_{ij} = \alpha_j - \alpha_i - c_{ij} \ge 0, \;\; 0 < x_{ij} < b_{ij};$$

C.

1) нульові, якщо дуги не завантажені:

$$\alpha_{ij} = \alpha_j - \alpha_i - c_{ij} = 0, \;\; x_{ij} = 0;$$

2) недодатні, якщо дуги завантажені елементом x_{ij} потоку, що менше пропускної спроможності дуги:

$$\alpha_{ij} = \alpha_j - \alpha_i - c_{ij} \le 0,\ \ 0 < x_{ij} < b_{ij};$$

3) невід'ємні, якщо дуги завантажені елементом x_{ij} потоку, рівним пропускної спроможності дуги:

$$\alpha_{ij} = \alpha_j - \alpha_i - c_{ij} \ge 0,\ \ x_{ij} = b_{ij};$$

D.

1) недодатні, якщо дуги не завантажені:

$$\alpha_{ij} = \alpha_j - \alpha_i - c_{ij} \le 0,\ \ x_{ij} = 0;$$

2) нульові, якщо дуги завантажені елементом x_{ij} потоку, що менше пропускної спроможності дуги:

$$\alpha_{ij} = \alpha_j - \alpha_i - c_{ij} = 0,\ \ 0 < x_{ij} < b_{ij};$$

3) невід'ємні, якщо дуги завантажені елементом x_{ij} потоку, рівним пропускної спроможності дуги:

$$\alpha_{ij} = \alpha_j - \alpha_i - c_{ij} \ge 0,\ \ x_{ij} = b_{ij}.$$

10. Установити відповідність між позначеннями та їх назвами:

A. ланцюг;
B. опертя;
C. цикл;
D. потенціал дуги;
E. дуга;
F. інтенсивність.

	1. $(N, U(X))$
	2. α_{ij}
	3. μ
	4. l
	5. $(s,t) \in S$

РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНА РОБОТА 2

Варіанти РГР 2 для першої групи

Варіант 1–1

1. Розв'язати транспортну задачу, використавши метод північно-західного кута та метод потенціалів.

Виробники	Споживачі				
	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	4	2	5	5	20
A_2	1	5	3	2	25
A_3	5	0	1	0	25
b_j	15	20	15	20	

2. Розв'язати транспортну задачу із завдання 1, використовуючи методи мінімального елемента та потенціалів.

3. Розв'язати вироджену транспортну задачу, використовуючи на першому етапі метод північно-західного кута.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	N	5	3	1	100–N
A_2	2	3	10	N	100+N
A_3	1	2	N	4	200
b_j	100	100	100+N	100–N	

N – номер варіанта у групі.

4. Розв'язати транспортну задачу, у якій сумарний обсяг виробництва не дорівнює сумарним потребам.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	N	5	3	1	10+N
A_2	2	3	10	N	20
A_3	1	2	N	4	30
b_j	9	27	10	14	

N – номер варіанта у групі.

5. Знайти максимальний потік методом Форда-Фалкерсона. Мережа та пропускні спроможності дуг b_{ij} задані в таблиці:

i	j	$в_{ij}$
1	2	2
1	3	3
1	9	11
2	4	6
3	5	3
3	4	5
4	6	3
4	7	2
4	9	10
5	9	4
6	10	8
7	8	2
8	9	5
8	10	10
9	6	5
9	10	8

Варіант 1–2

1. Розв'язати транспортну задачу, використавши метод північно-західного кута та метод потенціалів.

Виробники	Споживачі				
	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	2	1	3	4	30
A_2	1	2	2	3	30
A_3	0	0	5	1	35
b_j	25	20	20	30	

2. Розв'язати транспортну задачу із завдання 1, використовуючи методи мінімального елемента та потенціалів.

3. Розв'язати вироджену транспортну задачу, використовуючи на першому етапі метод північно-західного кута.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	N	5	3	1	100–N
A_2	2	3	10	N	100+N
A_3	1	2	N	4	200
b_j	100	100	100+N	100–N	

N – номер варіанта у групі.

4. Розв'язати транспортну задачу, у якій сумарний обсяг виробництва не дорівнює сумарним потребам.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	N	5	3	1	10+N
A_2	2	3	10	N	20
A_3	1	2	N	4	30
b_j	9	27	10	14	

N – номер варіанта у групі.

5. Знайти максимальний потік методом Форда-Фалкерсона. Мережа та пропускні спроможності дуг b_{ij} задані в таблиці:

i	j	$в_{ij}$
1	2	10
1	3	6
2	4	2
2	9	3
3	5	5
4	6	4
4	9	6
5	7	4
5	9	2
6	10	9
7	8	3
7	9	5
8	10	9
9	6	7
9	8	4
9	10	8

Варіант 1–3

1. Розв'язати транспортну задачу, використавши метод північно-західного кута та метод потенціалів.

Виробники	Споживачі				
	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	5	5	2	4	20
A_2	2	3	5	1	25
A_3	0	1	0	5	25
b_j	20	15	20	15	

2. Розв’язати транспортну задачу із завдання 1, використовуючи методи мінімального елемента та потенціалів.

3. Розв’язати вироджену транспортну задачу, використовуючи на першому етапі метод північно-західного кута.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	N	5	3	1	100–N
A_2	2	3	10	N	100+N
A_3	1	2	N	4	200
b_j	100	100	100+N	100–N	

N – номер варіанта у групі.

4. Розв’язати транспортну задачу, у якій сумарний обсяг виробництва не дорівнює сумарним потребам.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	N	5	3	1	10+N
A_2	2	3	10	N	20
A_3	1	2	N	4	30
b_j	9	27	10	14	

N – номер варіанта у групі.

5. Знайти максимальний потік методом Форда-Фалкерсона. Мережа та пропускні спроможності дуг b_{ij} задані в таблиці:

i	j	$в_{ij}$
1	2	9
1	3	5
2	4	6
2	5	4
3	5	2
3	9	3
4	6	3
4	9	5
5	7	4
6	9	4
6	10	8
7	8	5
7	9	6
8	10	10
9	8	4
9	10	7

Варіант 1–4

1. Розв'язати транспортну задачу, використавши метод північно-західного кута та метод потенціалів.

Виробники	Споживачі				
	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	4	3	1	2	30
A_2	3	2	2	1	30
A_3	1	5	0	0	40
b_j	30	20	20	30	

2. Розв'язати транспортну задачу із завдання 1, використовуючи методи мінімального елемента та потенціалів.

3. Розв'язати вироджену транспортну задачу, використовуючи на першому етапі метод північно-західного кута.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	N	5	3	1	100–N
A_2	2	3	10	N	100+N
A_3	1	2	N	4	200
b_j	100	100	100+N	100–N	

N – номер варіанта у групі.

4. Розв'язати транспортну задачу, у якій сумарний обсяг виробництва не дорівнює сумарним потребам.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	N	5	3	1	10+N
A_2	2	3	10	N	20
A_3	1	2	N	4	30
b_j	9	27	10	14	

N – номер варіанта у групі.

5. Знайти максимальний потік методом Форда-Фалкерсона. Мережа та пропускні спроможності дуг b_{ij} задані в таблиці:

i	j	$в_{ij}$
1	2	11
1	3	8
2	4	3

i	j	$в_{ij}$
2	5	2
3	5	3
3	9	4
4	9	6
5	7	2
5	9	5
6	10	10
7	8	6
7	10	7
8	10	7
9	6	9
9	8	8
9	10	7

Варіант 1–5

1. Розв'язати транспортну задачу, використавши метод північно-західного кута та метод потенціалів.

Виробники	Споживачі				
	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	0	1	0	5	25
A_2	2	3	5	1	25
A_3	5	5	2	4	20
b_j	20	15	20	15	

2. Розв'язати транспортну задачу із завдання 1, використовуючи методи мінімального елемента та потенціалів.

3. Розв'язати вироджену транспортну задачу, використовуючи на першому етапі метод північно-західного кута.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	N	5	3	1	100–N
A_2	2	3	10	N	100+N
A_3	1	2	N	4	200
b_j	100	100	100+N	100–N	

N – номер варіанта у групі.

4. Розв'язати транспортну задачу, у якій сумарний обсяг виробництва не дорівнює сумарним потребам.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	N	5	3	1	10+N
A_2	2	3	10	N	20
A_3	1	2	N	4	30
b_j	9	27	10	14	

N – номер варіанта у групі.

5. Знайти максимальний потік методом Форда-Фалкерсона. Мережа та пропускні спроможності дуг b_{ij} задані в таблиці:

i	j	$в_{ij}$
1	2	12
1	3	7
2	4	8
3	5	8
3	6	4
4	5	3
4	6	2
5	7	3
5	9	7
6	10	6
7	8	9
7	9	3
7	10	8
8	10	10
9	6	2
9	10	9

Варіант 1–6

1. Розв'язати транспортну задачу, використавши метод північно-західного кута та метод потенціалів.

Виробники	Споживачі				
	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	1	3	3	2	15
A_2	0	1	2	0	20
A_3	2	2	5	4	30
b_j	8	27	20	10	

2. Розв'язати транспортну задачу із завдання 1, використовуючи методи мінімального елемента та потенціалів.

3. Розв'язати вироджену транспортну задачу, використовуючи на першому етапі метод північно-західного кута.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	N	5	3	1	100–N
A_2	2	3	10	N	100+N
A_3	1	2	N	4	200
b_j	100	100	100+N	100–N	

N – номер варіанта у групі.

4. Розв'язати транспортну задачу, в якій сумарний обсяг виробництва не дорівнює сумарним потребам.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	N	5	3	1	10+N
A_2	2	3	10	N	20
A_3	1	2	N	4	30
b_j	9	27	10	14	

N – номер варіанта у групі.

5. Знайти максимальний потік методом Форда-Фалкерсона. Мережа та пропускні спроможності дуг b_{ij} задані в таблиці:

i	j	$в_{ij}$
1	2	10
1	3	11
1	6	2
2	4	5
2	7	4
3	5	5
3	6	3
4	6	4
5	7	3
5	9	4
6	8	8
6	10	10
7	8	2
7	10	11
8	10	3
9	10	8

Варіант 1–7

1. Розв'язати транспортну задачу, використавши метод північно-західного кута та метод потенціалів.

Виробники	Споживачі				
	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	4	1	0	4	20
A_2	1	4	2	5	20
A_3	2	5	5	0	20
b_j	10	25	15	10	

2. Розв'язати транспортну задачу із завдання 1, використовуючи методи мінімального елемента та потенціалів.

3. Розв'язати вироджену транспортну задачу, використовуючи на першому етапі метод північно-західного кута.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	N	5	3	1	100–N
A_2	2	3	10	N	100+N
A_3	1	2	N	4	200
b_j	100	100	100+N	100–N	

N – номер варіанта у групі.

4. Розв'язати транспортну задачу, у якій сумарний обсяг виробництва не дорівнює сумарним потребам.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	N	5	3	1	10+N
A_2	2	3	10	N	20
A_3	1	2	N	4	30
b_j	9	27	10	14	

N – номер варіанта у групі.

5. Знайти максимальний потік методом Форда-Фалкерсона. Мережа та пропускні спроможності дуг b_{ij} задані в таблиці:

i	j	$в_{ij}$
1	2	9
1	3	5
2	4	7
2	5	5
3	5	4
3	9	3
4	6	4
4	9	2
5	7	8
6	9	4
6	10	8
7	8	4
7	9	6
8	10	9
9	8	4
9	10	8

Варіант 1–8

1. Розв'язати транспортну задачу, використавши метод північно-західного кута та метод потенціалів.

Виробники	Споживачі				
	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	3	0	7	0	30
A_2	0	3	4	1	30
A_3	6	1	2	4	20
b_j	25	20	15	20	

2. Розв'язати транспортну задачу із завдання 1, використовуючи методи мінімального елемента та потенціалів.

3. Розв'язати вироджену транспортну задачу, використовуючи на першому етапі метод північно-західного кута.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	N	5	3	1	100–N
A_2	2	3	10	N	100+N
A_3	1	2	N	4	200
b_j	100	100	100+N	100–N	

N – номер варіанта у групі.

4. Розв'язати транспортну задачу, у якій сумарний обсяг виробництва не дорівнює сумарним потребам.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	N	5	3	1	10+N
A_2	2	3	10	N	20
A_3	1	2	N	4	30
b_j	9	27	10	14	

N – номер варіанта у групі.

5. Знайти максимальний потік методом Форда-Фалкерсона. Мережа та пропускні спроможності дуг b_{ij} задані в таблиці:

i	j	$в_{ij}$
1	2	9
1	3	8
1	5	3
2	4	2
2	7	6
3	5	2
4	6	1
4	9	4
5	7	6
5	10	8
6	9	3
6	10	7
7	8	4
7	10	4
8	10	7
9	10	6

Варіант 1–9

1. Розв'язати транспортну задачу, використавши метод північно-західного кута та метод потенціалів.

Виробники	Споживачі				
	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	1	5	4	1	20
A_2	3	4	2	4	30
A_3	2	2	6	0	20
b_j	15	25	15	15	

2. Розв'язати транспортну задачу із завдання 1, використовуючи методи мінімального елемента та потенціалів.

3. Розв'язати вироджену транспортну задачу, використовуючи на першому етапі метод північно-західного кута.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	N	5	3	1	100–N
A_2	2	3	10	N	100+N
A_3	1	2	N	4	200
b_j	100	100	100+N	100–N	

N – номер варіанта у групі.

4. Розв'язати транспортну задачу, у якій сумарний обсяг виробництва не дорівнює сумарним потребам.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	N	5	3	1	10+N
A_2	2	3	10	N	20
A_3	1	2	N	4	30
b_j	9	27	10	14	

N – номер варіанта у групі.

5. Знайти максимальний потік методом Форда-Фалкерсона. Мережа та пропускні спроможності дуг b_{ij} задані в таблиці:

i	j	$в_{ij}$
1	2	11
1	3	8
2	4	4
2	5	2
3	5	5
3	9	2

i	j	$в_{ij}$
4	9	5
5	7	3
5	9	9
6	10	10
7	8	7
7	10	6
8	10	9
9	6	8
9	8	8
9	10	7

Варіант 1–10

1. Розв'язати транспортну задачу, використавши метод північно-західного кута та метод потенціалів.

Виробники	Споживачі				
	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	0	0	7	3	30
A_2	1	3	4	0	30
A_3	4	1	2	6	20
b_j	20	20	15	25	

2. Розв'язати транспортну задачу із завдання 1, використовуючи методи мінімального елемента та потенціалів.

3. Розв'язати вироджену транспортну задачу, використовуючи на першому етапі метод північно-західного кута.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	N	5	3	1	100–N
A_2	2	3	10	N	100+N
A_3	1	2	N	4	200
b_j	100	100	100+N	100–N	

N – номер варіанта у групі.

4. Розв'язати транспортну задачу, у якій сумарний обсяг виробництва не дорівнює сумарним потребам.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	N	5	3	1	10+N
A_2	2	3	10	N	20
A_3	1	2	N	4	30
b_j	9	27	10	14	

N – номер варіанта у групі.

5. Знайти максимальний потік методом Форда-Фалкерсона. Мережа та пропускні спроможності дуг b_{ij} задані в таблиці:

i	j	$в_{ij}$
1	2	9
1	3	8
1	9	4
2	4	4
3	4	2
3	5	4
3	9	3
4	6	2
4	9	3
5	7	6
5	10	7
6	10	7
7	6	9
7	8	8
8	10	5
9	10	10

Варіант 1–11

1. Розв’язати транспортну задачу, використавши метод північно-західного кута та метод потенціалів.

Виробники	Споживачі				
	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	4	3	4	2	30
A_2	5	1	1	4	20
A_3	2	2	0	6	20
b_j	25	15	15	15	

2. Розв'язати транспортну задачу із завдання 1, використовуючи методи мінімального елемента та потенціалів.

3. Розв'язати вироджену транспортну задачу, використовуючи на першому етапі метод північно-західного кута.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	N	5	3	1	100–N
A_2	2	3	10	N	100+N
A_3	1	2	N	4	200
b_j	100	100	100+N	100–N	

N – номер варіанта у групі.

4. Розв'язати транспортну задачу, у якій сумарний обсяг виробництва не дорівнює сумарним потребам.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	N	5	3	1	10+N
A_2	2	3	10	N	20
A_3	1	2	N	4	30
b_j	9	27	10	14	

N – номер варіанта у групі.

5. Знайти максимальний потік методом Форда-Фалкерсона. Мережа та пропускні спроможності дуг b_{ij} задані в таблиці:

i	j	$в_{ij}$
1	2	4
1	3	3
1	9	11
2	4	8
3	5	3
3	4	5
4	6	4
4	7	3
4	9	10
5	9	5
6	10	8
7	8	3
8	9	6
8	10	10
9	6	6
9	10	9

Варіант 1–12

1. Розв'язати транспортну задачу, використавши метод північно-західного кута та метод потенціалів.

Виробники	Споживачі				
	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	3	0	1	4	30
A_2	0	3	0	7	30
A_3	1	6	4	2	20
b_j	20	25	20	15	

2. Розв'язати транспортну задачу із завдання 1, використовуючи методи мінімального елемента та потенціалів.

3. Розв'язати вироджену транспортну задачу, використовуючи на першому етапі метод північно-західного кута.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	N	5	3	1	100–N
A_2	2	3	10	N	100+N
A_3	1	2	N	4	200
b_j	100	100	100+N	100–N	

N – номер варіанта у групі.

4. Розв'язати транспортну задачу, у якій сумарний обсяг виробництва не дорівнює сумарним потребам.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	N	5	3	1	10+N
A_2	2	3	10	N	20
A_3	1	2	N	4	30
b_j	9	27	10	14	

N – номер варіанта у групі.

5. Знайти максимальний потік методом Форда-Фалкерсона. Мережа та пропускні спроможності дуг b_{ij} задані в таблиці:

i	j	$в_{ij}$
1	2	10
1	3	7
2	4	4
2	9	3
3	5	6
4	6	2
4	9	5
5	7	4
5	9	3
6	10	9
7	8	4
7	9	5
8	10	9
9	6	8
9	8	5
9	10	7

Варіант 1–13

1. Розв'язати транспортну задачу, використавши метод північно-західного кута та метод потенціалів.

Виробники	Споживачі				
	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	2	4	3	4	30
A_2	4	1	1	5	20
A_3	6	0	2	2	20
b_j	15	15	15	25	

2. Розв'язати транспортну задачу із завдання 1, використовуючи методи мінімального елемента та потенціалів.

3. Розв'язати вироджену транспортну задачу, використовуючи на першому етапі метод північно-західного кута.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	N	5	3	1	100–N
A_2	2	3	10	N	100+N
A_3	1	2	N	4	200
b_j	100	100	100+N	100–N	

N – номер варіанта у групі.

4. Розв'язати транспортну задачу, у якій сумарний обсяг виробництва не дорівнює сумарним потребам.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	N	5	3	1	10+N
A_2	2	3	10	N	20
A_3	1	2	N	4	30
b_j	9	27	10	14	

N – номер варіанта у групі.

5. Знайти максимальний потік методом Форда-Фалкерсона. Мережа та пропускні спроможності дуг b_{ij} задані в таблиці:

i	j	$в_{ij}$
1	2	11
1	3	8
2	4	2
2	5	3
3	5	4
3	9	3
4	9	4
5	7	9
5	9	2
6	10	10
7	8	8
7	10	7
8	10	8
9	6	6
9	8	8
9	10	7

Варіант 1–14

1. Розв'язати транспортну задачу, використавши метод північно-західного кута та метод потенціалів.

Виробники	Споживачі				
	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	4	1	0	3	30
A_2	7	0	3	0	30
A_3	2	4	6	1	20
b_j	15	20	25	20	

2. Розв'язати транспортну задачу із завдання 1, використовуючи методи мінімального елемента та потенціалів.

3. Розв'язати вироджену транспортну задачу, використовуючи на першому етапі метод північно-західного кута.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	N	5	3	1	100–N
A_2	2	3	10	N	100+N
A_3	1	2	N	4	200
b_j	100	100	100+N	100–N	

N – номер варіанта у групі.

4. Розв'язати транспортну задачу, у якій сумарний обсяг виробництва не дорівнює сумарним потребам.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	N	5	3	1	10+N
A_2	2	3	10	N	20
A_3	1	2	N	4	30
b_j	9	27	10	14	

N – номер варіанта у групі.

5. Знайти максимальний потік методом Форда-Фалкерсона. Мережа та пропускні спроможності дуг b_{ij} задані в таблиці:

i	j	$в_{ij}$
1	2	12
1	3	7
2	4	6
3	5	7
3	6	3

i	j	$в_{ij}$
4	5	2
4	6	3
5	7	1
5	9	6
6	10	8
7	8	8
7	9	3
7	10	8
8	10	9
9	6	4
9	10	9

Варіант 1–15

1. Розв'язати транспортну задачу, використавши метод північно-західного кута та метод потенціалів.

Виробники	Споживачі				
	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	3	4	2	4	30
A_2	1	5	4	1	20
A_3	2	2	6	0	20
b_j	15	25	15	15	

2. Розв'язати транспортну задачу із завдання 1, використовуючи методи мінімального елемента та потенціалів.

3. Розв'язати вироджену транспортну задачу, використовуючи на першому етапі метод північно-західного кута.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	N	5	3	1	100–N
A_2	2	3	10	N	100+N
A_3	1	2	N	4	200
b_j	100	100	100+N	100–N	

N – номер варіанта в групі.

4. Розв'язати транспортну задачу, у якій сумарний обсяг виробництва не дорівнює сумарним потребам.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	N	5	3	1	10+N
A_2	2	3	10	N	20
A_3	1	2	N	4	30
b_j	9	27	10	14	

N – номер варіанта у групі.

5. Знайти максимальний потік методом Форда-Фалкерсона. Мережа та пропускні спроможності дуг b_{ij} задані в таблиці:

i	j	$в_{ij}$
1	2	10
1	3	11
1	6	4
2	4	5
2	7	3
3	5	3
3	6	5
4	6	2
5	7	4
5	9	2
6	8	7
6	10	10
7	8	3
7	10	11
8	10	2
9	10	8

Варіант 1–16

1. Розв’язати транспортну задачу, використавши метод північно-західного кута та метод потенціалів.

Виробники	Споживачі				
	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	2	4	6	1	20
A_2	7	0	3	0	30
A_3	4	1	0	3	30
b_j	15	20	25	20	

2. Розв’язати транспортну задачу із завдання 1, використовуючи методи мінімального елемента та потенціалів.

3. Розв’язати вироджену транспортну задачу, використовуючи на першому етапі метод північно-західного кута.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	N	5	3	1	100–N
A_2	2	3	10	N	100+N
A_3	1	2	N	4	200
b_j	100	100	100+N	100–N	

N – номер варіанта у групі.

4. Розв’язати транспортну задачу, у якій сумарний обсяг виробництва не дорівнює сумарним потребам.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	N	5	3	1	10+N
A_2	2	3	10	N	20
A_3	1	2	N	4	30
b_j	9	27	10	14	

N – номер варіанта у групі.

5. Знайти максимальний потік методом Форда-Фалкерсона. Мережа та пропускні спроможності дуг b_{ij} задані в таблиці:

i	j	$в_{ij}$
1	2	10
1	3	11
1	6	4
2	4	5
2	7	3
3	5	3
3	6	5
4	6	2
5	7	4
5	9	2
6	8	7
6	10	10
7	8	3
7	10	11
8	10	2
9	10	8

Варіант 1–17

1. Розв'язати транспортну задачу, використавши метод північно-західного кута та метод потенціалів.

Виробники	Споживачі				
	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	6	0	2	2	20
A_2	4	1	1	5	20
A_3	2	4	3	4	30
b_j	15	15	15	25	

2. Розв'язати транспортну задачу із завдання 1, використовуючи методи мінімального елемента та потенціалів.

3. Розв'язати вироджену транспортну задачу, використовуючи на першому етапі метод північно-західного кута.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	N	5	3	1	100–N
A_2	2	3	10	N	100+N
A_3	1	2	N	4	200
b_j	100	100	100+N	100–N	

N – номер варіанта у групі.

4. Розв'язати транспортну задачу, у якій сумарний обсяг виробництва не дорівнює сумарним потребам.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	N	5	3	1	10+N
A_2	2	3	10	N	20
A_3	1	2	N	4	30
b_j	9	27	10	14	

N – номер варіанта у групі.

5. Знайти максимальний потік методом Форда-Фалкерсона. Мережа та пропускні спроможності дуг b_{ij} задані в таблиці:

i	j	$в_{ij}$
1	2	9
1	3	8
1	5	4
2	4	3
2	7	5
3	5	3
4	6	1
4	9	3
5	7	5
5	10	8
6	9	3
6	10	6
7	8	5
7	10	3
8	10	7
9	10	5

Варіант 1–18

1. Розв'язати транспортну задачу, використавши метод північно-західного кута та метод потенціалів.

Виробники	Споживачі				
	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	6	1	2	4	20
A_2	3	0	7	0	30
A_3	0	3	4	1	30
b_j	25	20	15	20	

2. Розв'язати транспортну задачу із завдання 1, використовуючи методи мінімального елемента та потенціалів.

3. Розв'язати вироджену транспортну задачу, використовуючи на першому етапі метод північно-західного кута.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	N	5	3	1	100–N
A_2	2	3	10	N	100+N
A_3	1	2	N	4	200
b_j	100	100	100+N	100–N	

N – номер варіанта у групі.

4. Розв'язати транспортну задачу, у якій сумарний обсяг виробництва не дорівнює сумарним потребам.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	N	5	3	1	10+N
A_2	2	3	10	N	20
A_3	1	2	N	4	30
b_j	9	27	10	14	

N – номер варіанта у групі.

5. Знайти максимальний потік методом Форда-Фалкерсона. Мережа та пропускні спроможності дуг b_{ij} задані в таблиці:

i	j	$в_{ij}$
1	2	3
1	3	6
1	9	11
2	4	7
3	5	6
3	4	5
4	6	3
4	7	6
4	9	10
5	9	8
6	10	8
7	8	6
8	9	5
8	10	10
9	6	5
9	10	8

Варіант 1–19

1. Розв'язати транспортну задачу, використавши метод північно-західного кута та метод потенціалів.

Виробники	Споживачі				
	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	2	2	6	0	25
A_2	1	5	4	1	20
A_3	3	4	2	4	25
b_j	15	25	15	15	

2. Розв'язати транспортну задачу із завдання 1, використовуючи методи мінімального елемента та потенціалів.

3. Розв'язати вироджену транспортну задачу, використовуючи на першому етапі метод північно-західного кута.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	N	5	3	1	100–N
A_2	2	3	10	N	100+N
A_3	1	2	N	4	200
b_j	100	100	100+N	100–N	

N – номер варіанта у групі.

4. Розв'язати транспортну задачу, у якій сумарний обсяг виробництва не дорівнює сумарним потребам.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	N	5	3	1	10+N
A_2	2	3	10	N	20
A_3	1	2	N	4	30
b_j	9	27	10	14	

N – номер варіанта у групі.

5. Знайти максимальний потік методом Форда-Фалкерсона. Мережа та пропускні спроможності дуг b_{ij} задані в таблиці:

i	j	$в_{ij}$
1	2	10
1	3	6
2	4	3
2	9	3
3	5	4

i	j	$в_{ij}$
4	6	1
4	9	5
5	7	3
5	9	1
6	10	9
7	8	2
7	9	5
8	10	9
9	6	7
9	8	4
9	10	8

Варіант 1–20

1. Розв'язати транспортну задачу, використавши метод північно-західного кута та метод потенціалів.

Виробники	Споживачі				
	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	0	3	4	1	30
A_2	3	0	7	0	30
A_3	6	1	2	4	20
b_j	25	20	15	20	

2. Розв'язати транспортну задачу із завдання 1, використовуючи методи мінімального елемента та потенціалів.

3. Розв'язати вироджену транспортну задачу, використовуючи на першому етапі метод північно-західного кута.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	N	5	3	1	100–N
A_2	2	3	10	N	100+N
A_3	1	2	N	4	200
b_j	100	100	100+N	100–N	

N – номер варіанта у групі.

4. Розв'язати транспортну задачу, у якій сумарний обсяг виробництва не дорівнює сумарним потребам.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	N	5	3	1	10+N
A_2	2	3	10	N	20
A_3	1	2	N	4	30
b_j	9	27	10	14	

N – номер варіанта у групі.

5. Знайти максимальний потік методом Форда-Фалкерсона. Мережа та пропускні спроможності дуг b_{ij} задані в таблиці:

i	j	$в_{ij}$
1	2	9
1	3	9
1	9	4
2	4	4
3	4	5
3	5	3
3	9	4
4	6	3
4	9	2
5	7	5
5	10	6
6	10	6
7	6	8
7	8	9
8	10	7
9	10	10

Варіант 1–21

1. Розв’язати транспортну задачу, використавши метод північно-західного кута та метод потенціалів.

Виробники	Споживачі				
	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	3	2	1	3	15
A_2	2	0	0	1	20
A_3	5	4	2	2	30
b_j	20	10	8	27	

2. Розв'язати транспортну задачу із завдання 1, використовуючи методи мінімального елемента та потенціалів.

3. Розв'язати вироджену транспортну задачу, використовуючи на першому етапі метод північно-західного кута.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	N	5	3	1	100–N
A_2	2	3	10	N	100+N
A_3	1	2	N	4	200
b_j	100	100	100+N	100–N	

N – номер варіанта у групі.

4. Розв'язати транспортну задачу, у якій сумарний обсяг виробництва не дорівнює сумарним потребам.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	N	5	3	1	10+N
A_2	2	3	10	N	20
A_3	1	2	N	4	30
b_j	9	27	10	14	

N – номер варіанта у групі.

5. Знайти максимальний потік методом Форда-Фалкерсона. Мережа та пропускні спроможності дуг b_{ij} задані в таблиці:

i	j	$в_{ij}$
1	2	3
1	3	3
1	9	11
2	4	7
3	5	3
3	4	5
4	6	3
4	7	3
4	9	10
5	9	5
6	10	8
7	8	3
8	9	5
8	10	10
9	6	5
9	10	9

Варіант 1–22

1. Розв'язати транспортну задачу, використавши метод північно-західного кута та метод потенціалів.

Виробники	Споживачі				
	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	5	2	4	1	20
A_2	4	0	1	4	20
A_3	0	5	5	2	20
b_j	10	15	25	10	

2. Розв'язати транспортну задачу із завдання 1, використовуючи методи мінімального елемента та потенціалів.

3. Розв'язати вироджену транспортну задачу, використовуючи на першому етапі метод північно-західного кута.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	N	5	3	1	100–N
A_2	2	3	10	N	100+N
A_3	1	2	N	4	200
b_j	100	100	100+N	100–N	

N – номер варіанта у групі.

4. Розв'язати транспортну задачу, у якій сумарний обсяг виробництва не дорівнює сумарним потребам.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	N	5	3	1	10+N
A_2	2	3	10	N	20
A_3	1	2	N	4	30
b_j	9	27	10	14	

N – номер варіанта у групі.

5. Знайти максимальний потік методом Форда-Фалкерсона. Мережа та пропускні спроможності дуг b_{ij} задані в таблиці:

i	j	$в_{ij}$
1	2	11
1	3	6
2	4	3
2	9	2
3	5	4
4	6	5
4	9	6
5	7	3
5	9	3
6	10	8
7	8	2
7	9	5
8	10	10
9	6	7
9	8	4
9	10	8

Варіант 1–23

1. Розв'язати транспортну задачу, використавши метод північно-західного кута та метод потенціалів.

Виробники	Споживачі				
	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	3	1	2	3	15
A_2	1	0	0	2	20
A_3	2	2	4	5	30
b_j	27	8	10	20	

2. Розв'язати транспортну задачу із завдання 1, використовуючи методи мінімального елемента та потенціалів.

3. Розв'язати вироджену транспортну задачу, використовуючи на першому етапі метод північно-західного кута.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	N	5	3	1	100–N
A_2	2	3	10	N	100+N
A_3	1	2	N	4	200
b_j	100	100	100+N	100–N	

N – номер варіанта у групі.

4. Розв'язати транспортну задачу, у якій сумарний обсяг виробництва не дорівнює сумарним потребам.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	N	5	3	1	10+N
A_2	2	3	10	N	20
A_3	1	2	N	4	30
b_j	9	27	10	14	

N – номер варіанта у групі.

5. Знайти максимальний потік методом Форда-Фалкерсона. Мережа та пропускні спроможності дуг b_{ij} задані в таблиці:

i	j	$в_{ij}$
1	2	10
1	3	4
2	4	7
2	5	3
3	5	8
3	9	1
4	6	4
4	9	5
5	7	7
6	9	4
6	10	8
7	8	6
7	9	6
8	10	2
9	8	3
9	10	7

Варіант 1–24

1. Розв'язати транспортну задачу, використавши метод північно-західного кута та метод потенціалів.

Виробники	Споживачі				
	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	0	5	5	2	20
A_2	4	0	1	4	20
A_3	5	2	4	1	20
b_j	10	15	25	10	

2. Розв'язати транспортну задачу із завдання 1, використовуючи методи мінімального елемента та потенціалів.

3. Розв'язати вироджену транспортну задачу, використовуючи на першому етапі метод північно-західного кута.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	N	5	3	1	100–N
A_2	2	3	10	N	100+N
A_3	1	2	N	4	200
b_j	100	100	100+N	100–N	

N – номер варіанта у групі.

4. Розв'язати транспортну задачу, у якій сумарний обсяг виробництва не дорівнює сумарним потребам.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	N	5	3	1	10+N
A_2	2	3	10	N	20
A_3	1	2	N	4	30
b_j	9	27	10	14	

N – номер варіанта у групі.

5. Знайти максимальний потік методом Форда-Фалкерсона. Мережа та пропускні спроможності дуг b_{ij} задані в таблиці:

i	j	$в_{ij}$
1	2	11
1	3	8
2	4	1
2	5	4
3	5	6

i	j	$в_{ij}$
3	9	4
4	9	3
5	7	8
5	9	2
6	10	10
7	8	6
7	10	5
8	10	7
9	6	6
9	8	8
9	10	7

Варіант 1–25

1. Розв'язати транспортну задачу, використавши метод північно-західного кута та метод потенціалів.

Виробники	Споживачі				
	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	8	3	6	3	60
A_2	4	1	2	6	59
A_3	4	3	1	7	153
b_j	60	89	71	52	

2. Розв'язати транспортну задачу із завдання 1, використовуючи методи мінімального елемента та потенціалів.

3. Розв'язати вироджену транспортну задачу, використовуючи на першому етапі метод північно-західного кута.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	N	5	3	1	100–N
A_2	2	3	10	N	100+N
A_3	1	2	N	4	200
b_j	100	100	100+N	100–N	

N – номер варіанта у групі.

4. Розв'язати транспортну задачу, у якій сумарний обсяг виробництва не дорівнює сумарним потребам.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	N	5	3	1	10+N
A_2	2	3	10	N	20
A_3	1	2	N	4	30
b_j	9	27	10	14	

N – номер варіанта у групі.

5. Знайти максимальний потік методом Форда-Фалкерсона. Мережа та пропускні спроможності дуг b_{ij} задані в таблиці:

i	j	$в_{ij}$
1	2	12
1	3	7
2	4	8
3	5	6
3	6	2
4	5	3
4	6	4
5	7	2
5	9	5
6	10	9
7	8	7
7	9	3
7	10	8
8	10	8
9	6	3
9	10	9

Варіанти РГР 2 для другої групи

Варіант 2–1

1. Розв’язати транспортну задачу, використавши метод північно-західного кута та метод потенціалів.

Виробники	Споживачі				
	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	5	2	3	4	70
A_2	4	3	1	9	58
A_3	6	4	6	7	158
b_j	68	63	64	91	

2. Розв’язати транспортну задачу із завдання 1, використовуючи методи мінімального елемента та потенціалів.

3. Розв’язати вироджену транспортну задачу, використовуючи на першому етапі метод північно-західного кута.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	N	4	3	2	50+N
A_2	1	2	N	5	50–N
A_3	1	N	3	10	100
b_j	50	50	50+N	50–N	

N – номер варіанта у групі.

4. Розв’язати транспортну задачу, у якій сумарний обсяг виробництва не дорівнює сумарним потребам.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	N	4	3	2	10
A_2	1	2	N	5	20
A_3	1	N	3	10	30
b_j	N	10	20	30	

N – номер варіанта у групі.

5. Знайти максимальний потік методом Форда-Фалкерсона. Мережа та пропускні спроможності дуг b_{ij} задані в таблиці:

i	j	$в_{ij}$
1	2	10
1	3	11
1	6	3
2	4	4
2	7	2
3	5	3
3	6	5
4	6	3
5	7	2
5	9	1
6	8	8
6	10	10
7	8	3
7	10	11
8	10	2
9	10	7

Варіант 2–2

1. Розв'язати транспортну задачу, використавши метод північно-західного кута та метод потенціалів.

Виробники	Споживачі				
	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	2	8	3	1	60
A_2	8	2	5	6	58
A_3	1	2	2	1	238
b_j	82	93	82	99	

2. Розв'язати транспортну задачу із завдання 1, використовуючи методи мінімального елемента та потенціалів.

3. Розв'язати вироджену транспортну задачу, використовуючи на першому етапі метод північно-західного кута.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	N	4	3	2	50+N
A_2	1	2	N	5	50–N
A_3	1	N	3	10	100
b_j	50	50	50+N	50–N	

N – номер варіанта у групі.

4. Розв'язати транспортну задачу, у якій сумарний обсяг виробництва не дорівнює сумарним потребам.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	N	4	3	2	10
A_2	1	2	N	5	20
A_3	1	N	3	10	30
b_j	N	10	20	30	

N – номер варіанта у групі.

5. Знайти максимальний потік методом Форда-Фалкерсона. Мережа та пропускні спроможності дуг b_{ij} задані в таблиці:

i	j	$в_{ij}$
1	2	9
1	3	7
1	9	5
2	4	3
3	4	3
3	5	6
3	9	4
4	6	1
4	9	3
5	7	2
5	10	1
6	10	7
7	6	9
7	8	6
8	10	4
9	10	10

Варіант 2–3

1. Розв’язати транспортну задачу, використавши метод північно-західного кута та метод потенціалів.

Виробники	Споживачі				
	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	6	1	6	5	99
A_2	3	9	7	3	66
A_3	6	5	8	7	144
b_j	75	62	94	78	

2. Розв’язати транспортну задачу із завдання 1, використовуючи методи мінімального елемента та потенціалів.

3. Розв’язати вироджену транспортну задачу, використовуючи на першому етапі метод північно-західного кута.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	N	4	3	2	50+N
A_2	1	2	N	5	50–N
A_3	1	N	3	10	100
b_j	50	50	50+N	50–N	

N – номер варіанта у групі.

4. Розв'язати транспортну задачу, в якій сумарний обсяг виробництва не дорівнює сумарним потребам.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	N	4	3	2	10
A_2	1	2	N	5	20
A_3	1	N	3	10	30
b_j	N	10	20	30	

N – номер варіанта у групі.

5. Знайти максимальний потік методом Форда-Фалкерсона. Мережа та пропускні спроможності дуг b_{ij} задані в таблиці:

i	j	$в_{ij}$
1	2	9
1	3	8
1	5	5
2	4	3
2	7	4
3	5	6
4	6	2
4	9	2
5	7	3
5	10	7
6	9	3
6	10	7
7	8	6
7	10	6
8	10	8
9	10	6

Варіант 2–4

1. Розв'язати транспортну задачу, використавши метод північно-західного кута та метод потенціалів.

Виробники	Споживачі				
	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	4	4	1	9	94
A_2	7	2	7	7	82
A_3	4	8	3	6	102
b_j	73	67	64	74	

2. Розв'язати транспортну задачу із завдання 1, використовуючи методи мінімального елемента та потенціалів.

3. Розв'язати вироджену транспортну задачу, використовуючи на першому етапі метод північно-західного кута.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	N	4	3	2	50+N
A_2	1	2	N	5	50–N
A_3	1	N	3	10	100
b_j	50	50	50+N	50–N	

N – номер варіанта у групі.

4. Розв'язати транспортну задачу, у якій сумарний обсяг виробництва не дорівнює сумарним потребам.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	N	4	3	2	10
A_2	1	2	N	5	20
A_3	1	N	3	10	30
b_j	N	10	20	30	

N – номер варіанта у групі.

5. Знайти максимальний потік методом Форда-Фалкерсона. Мережа та пропускні спроможності дуг b_{ij} задані в таблиці:

i	j	$в_{ij}$
1	2	8
1	3	9
1	9	5
2	4	5
3	4	6

i	j	$в_{ij}$
3	5	5
3	9	5
4	6	2
4	9	2
5	7	3
5	10	2
6	10	7
7	6	2
7	8	7
8	10	4
9	10	10

Варіант 2–5

1. Розв’язати транспортну задачу, використавши метод північно-західного кута та метод потенціалів.

Виробники	Споживачі				
	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	1	7	6	8	54
A_2	2	1	2	1	92
A_3	9	1	9	5	211
b_j	87	85	94	91	

2. Розв’язати транспортну задачу із завдання 1, використовуючи методи мінімального елемента та потенціалів.

3. Розв’язати вироджену транспортну задачу, використовуючи на першому етапі метод північно-західного кута.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	N	4	3	2	50+N
A_2	1	2	N	5	50–N
A_3	1	N	3	10	100
b_j	50	50	50+N	50–N	

N – номер варіанта у групі.

4. Розв’язати транспортну задачу, у якій сумарний обсяг виробництва не дорівнює сумарним потребам.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	N	4	3	2	10
A_2	1	2	N	5	20
A_3	1	N	3	10	30
b_j	N	10	20	30	

N – номер варіанта у групі.

5. Знайти максимальний потік методом Форда-Фалкерсона. Мережа та пропускні спроможності дуг b_{ij} задані в таблиці:

i	j	$в_{ij}$
1	2	9
1	3	8
1	5	4
2	4	3
2	7	3
3	5	7
4	6	6
4	9	5
5	7	2
5	10	7
6	9	3
6	10	8
7	8	5
7	10	6
8	10	6
9	10	5

Варіант 2–6

1. Розв’язати транспортну задачу, використавши метод північно-західного кута та метод потенціалів.

Виробники	Споживачі				
	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	9	8	9	7	71
A_2	8	8	2	7	63
A_3	9	4	8	2	190
b_j	83	85	75	81	

2. Розв'язати транспортну задачу із завдання 1, використовуючи методи мінімального елемента та потенціалів.

3. Розв'язати вироджену транспортну задачу, використовуючи на першому етапі метод північно-західного кута.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	N	4	3	2	50+N
A_2	1	2	N	5	50–N
A_3	1	N	3	10	100
b_j	50	50	50+N	50–N	

N – номер варіанта у групі.

4. Розв'язати транспортну задачу, у якій сумарний обсяг виробництва не дорівнює сумарним потребам.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	N	4	3	2	10
A_2	1	2	N	5	20
A_3	1	N	3	10	30
b_j	N	10	20	30	

N – номер варіанта у групі.

5. Знайти максимальний потік методом Форда-Фалкерсона. Мережа та пропускні спроможності дуг b_{ij} задані в таблиці:

i	j	$в_{ij}$
1	2	2
1	3	4
1	9	11
2	4	6
3	5	4
3	4	5
4	6	2
4	7	4
4	9	10
5	9	6
6	10	8
7	8	4
8	9	4
8	10	10
9	6	4
9	10	10

Варіант 2–7

1. Розв'язати транспортну задачу, використавши метод північно-західного кута та метод потенціалів.

Виробники	Споживачі				
	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	6	2	2	7	79
A_2	3	9	7	4	80
A_3	1	9	3	2	148
b_j	55	88	84	80	

2. Розв'язати транспортну задачу із завдання 1, використовуючи методи мінімального елемента та потенціалів.

3. Розв'язати вироджену транспортну задачу, використовуючи на першому етапі метод північно-західного кута.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	N	4	3	2	50+N
A_2	1	2	N	5	50–N
A_3	1	N	3	10	100
b_j	50	50	50+N	50–N	

N – номер варіанта у групі.

4. Розв'язати транспортну задачу, у якій сумарний обсяг виробництва не дорівнює сумарним потребам.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	N	4	3	2	10
A_2	1	2	N	5	20
A_3	1	N	3	10	30
b_j	N	10	20	30	

N – номер варіанта у групі.

5. Знайти максимальний потік методом Форда-Фалкерсона. Мережа та пропускні спроможності дуг b_{ij} задані в таблиці:

i	j	$в_{ij}$
1	2	11
1	3	7
2	4	5
2	9	2
3	5	6
4	6	3
4	9	6
5	7	5
5	9	3
6	10	8
7	8	4
7	9	5
8	10	10
9	6	8
9	8	4
9	10	7

Варіант 2–8

1. Розв'язати транспортну задачу, використавши метод північно-західного кута та метод потенціалів.

Виробники	Споживачі				
	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	3	7	8	4	98
A_2	1	7	7	9	82
A_3	2	3	8	7	118
b_j	83	58	61	96	

2. Розв'язати транспортну задачу із завдання 1, використовуючи методи мінімального елемента та потенціалів.

3. Розв'язати вироджену транспортну задачу, використовуючи на першому етапі метод північно-західного кута.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	N	4	3	2	50+N
A_2	1	2	N	5	50–N
A_3	1	N	3	10	100
b_j	50	50	50+N	50–N	

N – номер варіанта у групі.

4. Розв'язати транспортну задачу, у якій сумарний обсяг виробництва не дорівнює сумарним потребам.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	N	4	3	2	10
A_2	1	2	N	5	20
A_3	1	N	3	10	30
b_j	N	10	20	30	

N – номер варіанта у групі.

5. Знайти максимальний потік методом Форда-Фалкерсона. Мережа та пропускні спроможності дуг b_{ij} задані в таблиці:

i	j	$в_{ij}$
1	2	9
1	3	5
2	4	5
2	5	2
3	5	5
3	9	4
4	6	2
4	9	4
5	7	6
6	9	4
6	10	8
7	8	7
7	9	6
8	10	9
9	8	4
9	10	8

Варіант 2–9

1. Розв'язати транспортну задачу, використавши метод північно-західного кута та метод потенціалів.

Виробники	Споживачі				
	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	9	6	3	5	59
A_2	4	8	7	7	92
A_3	2	5	4	6	193
b_j	87	79	99	79	

2. Розв'язати транспортну задачу із завдання 1, використовуючи методи мінімального елемента та потенціалів.

3. Розв'язати вироджену транспортну задачу, використовуючи на першому етапі метод північно-західного кута.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	N	4	3	2	50+N
A_2	1	2	N	5	50–N
A_3	1	N	3	10	100
b_j	50	50	50+N	50–N	

N – номер варіанта у групі.

4. Розв'язати транспортну задачу, у якій сумарний обсяг виробництва не дорівнює сумарним потребам.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	N	4	3	2	10
A_2	1	2	N	5	20
A_3	1	N	3	10	30
b_j	N	10	20	30	

N – номер варіанта у групі.

5. Знайти максимальний потік методом Форда-Фалкерсона. Мережа та пропускні спроможності дуг b_{ij} задані в таблиці:

i	j	$в_{ij}$
1	2	11
1	3	8
2	4	4
2	5	3
3	5	3

i	j	$в_{ij}$
3	9	1
4	9	3
5	7	4
5	9	5
6	10	10
7	8	5
7	10	6
8	10	8
9	6	7
9	8	8
9	10	7

Варіант 2–10

1. Розв'язати транспортну задачу, використавши метод північно-західного кута та метод потенціалів.

Виробники	Споживачі				
	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	9	3	7	6	65
A_2	9	9	9	6	82
A_3	7	3	5	3	80
b_j	58	62	51	56	

2. Розв'язати транспортну задачу із завдання 1, використовуючи методи мінімального елемента та потенціалів.

3. Розв'язати вироджену транспортну задачу, використовуючи на першому етапі метод північно-західного кута.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	N	4	3	2	50+N
A_2	1	2	N	5	50–N
A_3	1	N	3	10	100
b_j	50	50	50+N	50–N	

N – номер варіанта у групі.

4. Розв'язати транспортну задачу, у якій сумарний обсяг виробництва не дорівнює сумарним потребам.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	N	4	3	2	10
A_2	1	2	N	5	20
A_3	1	N	3	10	30
b_j	N	10	20	30	

N – номер варіанта у групі.

5. Знайти максимальний потік методом Форда-Фалкерсона. Мережа та пропускні спроможності дуг b_{ij} задані в таблиці:

i	j	$в_{ij}$
1	2	12
1	3	7
2	4	7
3	5	8
3	6	3
4	5	4
4	6	2
5	7	4
5	9	7
6	10	8
7	8	8
7	9	3
7	10	8
8	10	9
9	6	3
9	10	9

Варіант 2–11

1. Розв’язати транспортну задачу, використавши метод північно-західного кута та метод потенціалів.

Виробники	Споживачі				
	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	4	9	8	9	82
A_2	4	9	3	6	89
A_3	7	2	3	4	158
b_j	84	67	81	97	

2. Розв'язати транспортну задачу із завдання 1, використовуючи методи мінімального елемента та потенціалів.

3. Розв'язати вироджену транспортну задачу, використовуючи на першому етапі метод північно-західного кута.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	N	4	3	2	50+N
A_2	1	2	N	5	50–N
A_3	1	N	3	10	100
b_j	50	50	50+N	50–N	

N – номер варіанта у групі.

4. Розв'язати транспортну задачу, у якій сумарний обсяг виробництва не дорівнює сумарним потребам.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	N	4	3	2	10
A_2	1	2	N	5	20
A_3	1	N	3	10	30
b_j	N	10	20	30	

N – номер варіанта у групі.

5. Знайти максимальний потік методом Форда-Фалкерсона. Мережа та пропускні спроможності дуг b_{ij} задані в таблиці:

i	j	$в_{ij}$
1	2	10
1	3	11
1	6	2
2	4	4
2	7	4
3	5	4
3	6	2
4	6	2
5	7	2
5	9	3
6	8	7
6	10	10
7	8	4
7	10	11
8	10	3
9	10	7

Варіант 2–12

1. Розв'язати транспортну задачу, використавши метод північно-західного кута та метод потенціалів.

Виробники	Споживачі				
	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	8	6	6	1	64
A_2	2	6	6	4	97
A_3	3	2	8	5	110
b_j	80	91	50	50	

2. Розв'язати транспортну задачу із завдання 1, використовуючи методи мінімального елемента та потенціалів.

3. Розв'язати вироджену транспортну задачу, використовуючи на першому етапі метод північно-західного кута.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	N	4	3	2	50+N
A_2	1	2	N	5	50–N
A_3	1	N	3	10	100
b_j	50	50	50+N	50–N	

N – номер варіанта у групі.

4. Розв'язати транспортну задачу, у якій сумарний обсяг виробництва не дорівнює сумарним потребам.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	N	4	3	2	10
A_2	1	2	N	5	20
A_3	1	N	3	10	30
b_j	N	10	20	30	

N – номер варіанта у групі.

5. Знайти максимальний потік методом Форда-Фалкерсона. Мережа та пропускні спроможності дуг b_{ij} задані в таблиці:

i	j	$в_{ij}$
1	2	9
1	3	8
1	5	3

i	j	$в_{ij}$
2	4	4
2	7	3
3	5	5
4	6	6
4	9	4
5	7	1
5	10	66
6	9	33
6	10	8
7	8	6
7	10	7
8	10	4
9	10	7

Варіант 2–13

1. Розв'язати транспортну задачу, використавши метод північно-західного кута та метод потенціалів.

Виробники	Споживачі				
	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	9	1	7	6	57
A_2	5	7	9	9	87
A_3	9	5	7	6	163
b_j	72	87	76	72	

2. Розв'язати транспортну задачу із завдання 1, використовуючи методи мінімального елемента та потенціалів.
3. Розв'язати вироджену транспортну задачу, використовуючи на першому етапі метод північно-західного кута.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	N	4	3	2	50+N
A_2	1	2	N	5	50–N
A_3	1	N	3	10	100
b_j	50	50	50+N	50–N	

N – номер варіанта у групі.

4. Розв'язати транспортну задачу, у якій сумарний обсяг виробництва не дорівнює сумарним потребам.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	N	4	3	2	10
A_2	1	2	N	5	20
A_3	1	N	3	10	30
b_j	N	10	20	30	

N – номер варіанта у групі.

5. Знайти максимальний потік методом Форда-Фалкерсона. Мережа та пропускні спроможності дуг b_{ij} задані в таблиці:

i	j	$в_{ij}$
1	2	10
1	3	11
1	6	4
2	4	4
2	7	2
3	5	6
3	6	4
4	6	3
5	7	3
5	9	2
6	8	8
6	10	10
7	8	6
7	10	11
8	10	5
9	10	6

Варіант 2–14

1. Розв’язати транспортну задачу, використавши метод північно-західного кута та метод потенціалів.

Виробники	Споживачі				
	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	9	4	3	6	74
A_2	2	1	6	1	54
A_3	9	1	3	6	117
b_j	68	62	60	55	

2. Розв’язати транспортну задачу із завдання 1, використовуючи методи мінімального елемента та потенціалів.

3. Розв’язати вироджену транспортну задачу, використовуючи на першому етапі метод північно-західного кута.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	N	4	3	2	50+N
A_2	1	2	N	5	50–N
A_3	1	N	3	10	100
b_j	50	50	50+N	50–N	

N – номер варіанта у групі.

4. Розв’язати транспортну задачу, у якій сумарний обсяг виробництва не дорівнює сумарним потребам.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	N	4	3	2	10
A_2	1	2	N	5	20
A_3	1	N	3	10	30
b_j	N	10	20	30	

N – номер варіанта у групі.

5. Знайти максимальний потік методом Форда-Фалкерсона. Мережа та пропускні спроможності дуг b_{ij} задані в таблиці:

i	j	$в_{ij}$
1	2	12
1	3	7
2	4	9
3	5	7
3	6	2
4	5	2
4	6	5
5	7	3
5	9	5
6	10	7
7	8	9
7	9	3
7	10	8
8	10	10
9	6	5
9	10	9

Варіант 2–15

1. Розв’язати транспортну задачу, використавши метод північно-західного кута та метод потенціалів.

Виробники	Споживачі				
	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	3	8	8	2	91
A_2	6	7	6	5	72
A_3	1	9	3	6	95
b_j	70	55	69	64	

2. Розв’язати транспортну задачу із завдання 1, використовуючи методи мінімального елемента та потенціалів.

3. Розв’язати вироджену транспортну задачу, використовуючи на першому етапі метод північно-західного кута.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	N	4	3	2	50+N
A_2	1	2	N	5	50–N
A_3	1	N	3	10	100
b_j	50	50	50+N	50–N	

N – номер варіанта у групі.

4. Розв’язати транспортну задачу, у якій сумарний обсяг виробництва не дорівнює сумарним потребам.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	N	4	3	2	10
A_2	1	2	N	5	20
A_3	1	N	3	10	30
b_j	N	10	20	30	

N – номер варіанта у групі.

5. Знайти максимальний потік методом Форда-Фалкерсона. Мережа та пропускні спроможності дуг b_{ij} задані в таблиці:

i	j	$в_{ij}$
1	2	8
1	3	8
1	9	3

i	j	$в_{ij}$
2	4	2
3	4	2
3	5	4
3	9	2
4	6	5
4	9	1
5	7	4
5	10	2
6	10	8
7	6	6
7	8	7
8	10	5
9	10	10

Варіант 2–16

1. Розв'язати транспортну задачу, використавши метод північно-західного кута та метод потенціалів.

Виробники	Споживачі				
	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	2	6	2	1	53
A_2	8	6	3	1	51
A_3	5	3	1	3	203
b_j	52	99	60	96	

2. Розв'язати транспортну задачу із завдання 1, використовуючи методи мінімального елемента та потенціалів.

3. Розв'язати вироджену транспортну задачу, використовуючи на першому етапі метод північно-західного кута.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	N	4	3	2	50+N
A_2	1	2	N	5	50–N
A_3	1	N	3	10	100
b_j	50	50	50+N	50–N	

N – номер варіанта у групі.

4. Розв'язати транспортну задачу, у якій сумарний обсяг виробництва не дорівнює сумарним потребам.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	N	4	3	2	10
A_2	1	2	N	5	20
A_3	1	N	3	10	30
b_j	N	10	20	30	

N – номер варіанта у групі.

5. Знайти максимальний потік методом Форда-Фалкерсона. Мережа та пропускні спроможності дуг b_{ij} задані в таблиці:

i	j	$в_{ij}$
1	2	3
1	3	4
1	9	11
2	4	7
3	5	4
3	4	5
4	6	3
4	7	4
4	9	10
5	9	6
6	10	8
7	8	4
8	9	5
8	10	10
9	6	5
9	10	10

Варіант 2–17

1. Розв’язати транспортну задачу, використавши метод північно-західного кута та метод потенціалів.

Виробники	Споживачі				
	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	2	9	9	7	100
A_2	6	7	6	4	55
A_3	9	5	4	2	185
b_j	92	58	94	96	

2. Розв'язати транспортну задачу із завдання 1, використовуючи методи мінімального елемента та потенціалів.

3. Розв'язати вироджену транспортну задачу, використовуючи на першому етапі метод північно-західного кута.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	N	4	3	2	50+N
A_2	1	2	N	5	50–N
A_3	1	N	3	10	100
b_j	50	50	50+N	50–N	

N – номер варіанта у групі.

4. Розв'язати транспортну задачу, у якій сумарний обсяг виробництва не дорівнює сумарним потребам.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	N	4	3	2	10
A_2	1	2	N	5	20
A_3	1	N	3	10	30
b_j	N	10	20	30	

N – номер варіанта у групі.

5. Знайти максимальний потік методом Форда-Фалкерсона. Мережа та пропускні спроможності дуг b_{ij} задані в таблиці:

i	j	$в_{ij}$
1	2	10
1	3	6
2	4	3
2	9	3
3	5	4
4	6	5
4	9	5
5	7	3
5	9	2
6	10	9
7	8	2
7	9	5
8	10	9
9	6	7
9	8	5
9	10	8

Варіант 2–18

1. Розв'язати транспортну задачу, використавши метод північно-західного кута та метод потенціалів.

Виробники	Споживачі				
	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	2	7	5	3	71
A_2	7	5	2	3	83
A_3	4	7	2	7	151
b_j	78	65	81	81	

2. Розв'язати транспортну задачу із завдання 1, використовуючи методи мінімального елемента та потенціалів.

3. Розв'язати вироджену транспортну задачу, використовуючи на першому етапі метод північно-західного кута.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	N	4	3	2	50+N
A_2	1	2	N	5	50–N
A_3	1	N	3	10	100
b_j	50	50	50+N	50–N	

N – номер варіанта у групі.

4. Розв'язати транспортну задачу, якій сумарний обсяг виробництва не дорівнює сумарним потребам.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	N	4	3	2	10
A_2	1	2	N	5	20
A_3	1	N	3	10	30
b_j	N	10	20	30	

N – номер варіанта у групі.

5. Знайти максимальний потік методом Форда-Фалкерсона. Мережа та пропускні спроможності дуг b_{ij} задані в таблиці:

i	j	$в_{ij}$
1	2	8
1	3	6
2	4	3

i	j	$в_{ij}$
2	5	4
3	5	7
3	9	3
4	6	5
4	9	7
5	7	8
6	9	4
6	10	6
7	8	9
7	9	6
8	10	6
9	8	5
9	10	7

Варіант 2–19

1. Розв’язати транспортну задачу, використавши метод північно-західного кута та метод потенціалів.

Виробники	Споживачі				
	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	7	4	3	4	89
A_2	8	7	4	1	61
A_3	8	3	4	7	177
b_j	61	95	77	94	

2. Розв’язати транспортну задачу із завдання 1, використовуючи методи мінімального елемента та потенціалів.

3. Розв’язати вироджену транспортну задачу, використовуючи на першому етапі метод північно-західного кута.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	N	4	3	2	50+N
A_2	1	2	N	5	50–N
A_3	1	N	3	10	100
b_j	50	50	50+N	50–N	

N – номер варіанта у групі.

4. Розв’язати транспортну задачу, у якій сумарний обсяг виробництва не дорівнює сумарним потребам.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	N	4	3	2	10
A_2	1	2	N	5	20
A_3	1	N	3	10	30
b_j	N	10	20	30	

N – номер варіанта у групі.

5. Знайти максимальний потік методом Форда-Фалкерсона. Мережа та пропускні спроможності дуг b_{ij} задані в таблиці:

i	j	$в_{ij}$
1	2	11
1	3	8
2	4	3
2	5	2
3	5	6
3	9	2
4	9	4
5	7	3
5	9	4
6	10	10
7	8	5
7	10	8
8	10	9
9	6	7
9	8	8
9	10	7

Варіант 2–20

1. Розв’язати транспортну задачу, використавши метод північно-західного кута та метод потенціалів.

Виробники	Споживачі				
	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	5	7	2	9	50
A_2	3	6	3	9	81
A_3	5	1	5	4	165
b_j	68	89	51	88	

2. Розв'язати транспортну задачу із завдання 1, використовуючи методи мінімального елемента та потенціалів.

3. Розв'язати вироджену транспортну задачу, використовуючи на першому етапі метод північно-західного кута.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	N	4	3	2	50+N
A_2	1	2	N	5	50–N
A_3	1	N	3	10	100
b_j	50	50	50+N	50–N	

N – номер варіанта у групі.

4. Розв'язати транспортну задачу, у якій сумарний обсяг виробництва не дорівнює сумарним потребам.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	N	4	3	2	10
A_2	1	2	N	5	20
A_3	1	N	3	10	30
b_j	N	10	20	30	

N – номер варіанта у групі.

5. Знайти максимальний потік методом Форда-Фалкерсона. Мережа та пропускні спроможності дуг b_{ij} задані в таблиці:

i	j	$в_{ij}$
1	2	12
1	3	7
2	4	7
3	5	7
3	6	2
4	5	2
4	6	3
5	7	3
5	9	6
6	10	8
7	8	7
7	9	3
7	10	8
8	10	8
9	6	4
9	10	9

Варіант 2–21

1. Розв'язати транспортну задачу, використавши метод північно-західного кута та метод потенціалів.

Виробники	Споживачі				
	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	2	5	8	6	95
A_2	1	1	6	1	79
A_3	3	1	9	9	141
b_j	86	97	63	69	

2. Розв'язати транспортну задачу із завдання 1, використовуючи методи мінімального елемента та потенціалів.

3. Розв'язати вироджену транспортну задачу, використовуючи на першому етапі метод північно-західного кута.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	N	4	3	2	50+N
A_2	1	2	N	5	50–N
A_3	1	N	3	10	100
b_j	50	50	50+N	50–N	

N – номер варіанта у групі.

4. Розв'язати транспортну задачу, у якій сумарний обсяг виробництва не дорівнює сумарним потребам.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	N	4	3	2	10
A_2	1	2	N	5	20
A_3	1	N	3	10	30
b_j	N	10	20	30	

N – номер варіанта у групі.

5. Знайти максимальний потік методом Форда-Фалкерсона. Мережа та пропускні спроможності дуг b_{ij} задані в таблиці:

i	j	$в_{ij}$
1	2	10
1	3	11
1	6	3

i	j	$в_{ij}$
2	4	6
2	7	5
3	5	4
3	6	6
4	6	3
5	7	6
5	9	7
6	8	7
6	10	10
7	8	8
7	10	11
8	10	6
9	10	7

Варіант 2–22

1. Розв'язати транспортну задачу, використавши метод північно-західного кута та метод потенціалів.

Виробники	Споживачі				
	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	4	4	4	9	97
A_2	7	9	9	3	90
A_3	2	4	3	1	144
b_j	96	79	96	60	

2. Розв'язати транспортну задачу із завдання 1, використовуючи методи мінімального елемента та потенціалів.
3. Розв'язати вироджену транспортну задачу, використовуючи на першому етапі метод північно-західного кута.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	N	4	3	2	50+N
A_2	1	2	N	5	50–N
A_3	1	N	3	10	100
b_j	50	50	50+N	50–N	

N – номер варіанта у групі.

4. Розв'язати транспортну задачу, у якій сумарний обсяг виробництва не дорівнює сумарним потребам.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	N	4	3	2	10
A_2	1	2	N	5	20
A_3	1	N	3	10	30
b_j	N	10	20	30	

N – номер варіанта у групі.

5. Знайти максимальний потік методом Форда-Фалкерсона. Мережа та пропускні спроможності дуг b_{ij} задані в таблиці:

i	j	$в_{ij}$
1	2	8
1	3	6
2	4	8
2	5	4
3	5	8
3	9	1
4	6	5
4	9	6
5	7	7
6	9	4
6	10	9
7	8	6
7	9	6
8	10	5
9	8	6
9	10	8

Варіант 2–23

1. Розв’язати транспортну задачу, використавши метод північно-західного кута та метод потенціалів.

Виробники	Споживачі				
	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	6	6	5	6	57
A_2	9	1	3	1	95
A_3	1	1	2	2	146
b_j	88	88	68	54	

2. Розв'язати транспортну задачу із завдання 1, використовуючи методи мінімального елемента та потенціалів.

3. Розв'язати вироджену транспортну задачу, використовуючи на першому етапі метод північно-західного кута.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	N	4	3	2	50+N
A_2	1	2	N	5	50–N
A_3	1	N	3	10	100
b_j	50	50	50+N	50–N	

N – номер варіанта у групі.

4. Розв'язати транспортну задачу, у якій сумарний обсяг виробництва не дорівнює сумарним потребам.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	N	4	3	2	10
A_2	1	2	N	5	20
A_3	1	N	3	10	30
b_j	N	10	20	30	

N – номер варіанта у групі.

5. Знайти максимальний потік методом Форда-Фалкерсона. Мережа та пропускні спроможності дуг b_{ij} задані в таблиці:

i	j	$в_{ij}$
1	2	8
1	3	7
1	9	3
2	4	3
3	4	2
3	5	7
3	9	3
4	6	2
4	9	5
5	7	2
5	10	5
6	10	8
7	6	4
7	8	6
8	10	7
9	10	10

Варіант 2–24

1. Розв'язати транспортну задачу, використавши метод північно-західного кута та метод потенціалів.

Виробники	Споживачі				
	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	3	8	9	1	96
A_2	2	8	9	4	75
A_3	6	2	2	3	138
b_j	97	58	82	72	

2. Розв'язати транспортну задачу із завдання 1, використовуючи методи мінімального елемента та потенціалів.

3. Розв'язати вироджену транспортну задачу, використовуючи на першому етапі метод північно-західного кута.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	N	4	3	2	50+N
A_2	1	2	N	5	50–N
A_3	1	N	3	10	100
b_j	50	50	50+N	50–N	

N – номер варіанта у групі.

4. Розв'язати транспортну задачу, у якій сумарний обсяг виробництва не дорівнює сумарним потребам.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	N	4	3	2	10
A_2	1	2	N	5	20
A_3	1	N	3	10	30
b_j	N	10	20	30	

N – номер варіанта у групі.

5. Знайти максимальний потік методом Форда-Фалкерсона. Мережа та пропускні спроможності дуг b_{ij} задані в таблиці:

i	j	$в_{ij}$
1	2	11
1	3	8
2	4	2
2	5	4
3	5	5
3	9	3
4	9	5
5	7	2
5	9	7
6	10	10
7	8	7
7	10	8
8	10	9
9	6	8
9	8	8
9	10	7

Варіант 2–25

1. Розв'язати транспортну задачу, використавши метод північно-західного кута та метод потенціалів.

Виробники	Споживачі				
	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	4	7	5	8	53
A_2	7	9	5	1	72
A_3	7	2	7	1	212
b_j	96	61	84	96	

2. Розв'язати транспортну задачу із завдання 1, використовуючи методи мінімального елемента та потенціалів.

3. Розв'язати вироджену транспортну задачу, використовуючи на першому етапі метод північно-західного кута.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	N	4	3	2	50+N
A_2	1	2	N	5	50–N
A_3	1	N	3	10	100
b_j	50	50	50+N	50–N	

N – номер варіанта у групі.

4. Розв’язати транспортну задачу, у якій сумарний обсяг виробництва не дорівнює сумарним потребам.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	N	4	3	2	10
A_2	1	2	N	5	20
A_3	1	N	3	10	30
b_j	N	10	20	30	

N – номер варіанта у групі.

5. Знайти максимальний потік методом Форда-Фалкерсона. Мережа та пропускні спроможності дуг b_{ij} задані в таблиці:

i	j	$в_{ij}$
1	2	9
1	3	8
1	5	5
2	4	4
2	7	2
3	5	8
4	6	3
4	9	2
5	7	3
5	10	9
6	9	3
6	10	9
7	8	4
7	10	7
8	10	5
9	10	6

У складанні варіантів РГР приймала участь к. ф.-м. н., доцент кафедри ММСІ Парфьонова Т. О.

Курс лекцій складено на основі джерел [2–4].

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНИХ ІНФОРМАЦІЙНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Ємець О. О. Методи оптимізації та дослідження операцій [Електронний ресурс] : навч.-метод. посіб. за кредитно-модульною організацією навчального процесу / О. О. Ємець, Т. О. Парфьонова. – Полтава : ПУЕТ, 2013. – Спосіб доступу: локальна мережа ПУЕТ. http://elib.puet.edu.ua/action.php?kt_path_info=lm.web.view&fDocumentId=670571. – Назва з екрана.
2. Математические методы исследования операцій / Ю. М. Ермольев, И. И. Ляшко, В. С. Михалевич, В. И. Тюптя. – Київ : Вища школа, 1979. – 312 с.
3. Линейное и нелинейное программирование / под ред. И. Н. Ляшенко. – Київ : Вища школа, 1975. – 372 с.
4. Акулич И. Л. Математическое программирование в примерах и задачах / И. Л. Акулич. – Москва : Высш. школа, 1986. – 319 с.
5. Ємець О. О. Методи оптимізації та дослідження операцій : метод. рек. щодо виконання курсового проекту студентами напряму підготовки «Інформатика» / О. О. Ємець, Т. О. Парфьонова. – Полтава : ПУЕТ, 2011. – 87 с.

ЗМІСТ

Наукове видання

ЄМЕЦЬ Олег Олексійович

МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ ТА ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ

Частина 2

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

Головний редактор *М. П. Гречук*
Редагування *В. Л. Яременко*
Комп'ютерне верстання *О. С. Корніліч*

Формат 60x84/16. Ум. друк. арк. 8,1.
Зам. № 024/1319

Видавець і виготовлювач
Вищий навчальний заклад Укоопспілки
«Полтавський університет економіки і торгівлі»,
к. 115, вул. Коваля, 3, м. Полтава, 36014; ☎(0532) 50-24-81

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 3827 від 08.07.2010 р.