УДК 519.85

ДВОЙСТВЕННОСТЬ ДЛЯ МНОГОЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ

А. И. Косолап, *д. ф.-м. н., профессор*, ***А. А. Романчук,*** *аспирант*
Украинский государственный химико-технологический университет, anivkos@ua.fm

В работе рассматриваются многоэкстремальные задачи. Предлагается модификация двойственной задачи посредством включения ограничений прямой задачи, выраженных через двойственные переменные. Показано что при разрыве двойственности больше нуля двойственные переменные определяют решение исходной задачи.

Kosolap A. I. Duality for multiextreme problems. In paper we consider multiextreme problems. We offer modification of a dual problem by means of inclusion of constraints of the primal problem expressed through dual variables. It is shown that at duality gap more than zero dual variables define the solution of an initial problem.

Ключевые слова: МНОГОЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ, ДВОЙСТВЕННАЯ ЗАДАЧА, РАЗРЫВ ДВОЙСТВЕННОСТИ.
Keywords: MULTIEXTREME PROBLEMS, DUAL PROBLEM, DUALITY GAP.

Математические оптимизационные модели сложных систем, как правило, многоэкстремальны. Такие задачи являются сложными для численного решения, так как могут содержать много локальных экстремумов. Для нахождения глобального экстремума в этих задачах используются методы ветвей и границ [1], внешних аппроксимаций [2], полуопределенной релаксации [3], двойственные методы [4], методы случайного поиска [5] и др. Однако эти методы могут находить решения только для задач малой размерности либо позволяют находить приближенные решения, которые часто далеки от точек глобального экстремума.

В настоящей работе для решения классов многоэкстремальных задач используется двойственный метод. Этот метод позволяет находить в общем случае только оценки целевой функции прямой задачи. Если ограничения двойственной задачи дополнить ограничениями прямой задачи, выраженными через двойственные переменные, то решение такой двойственной задачи позволяет определить решение прямой задачи даже в том случае, когда разрыв двойственности больше нуля. Покажем это на примере максимизации нормы вектора на пересечении шаров. К этой задаче преобразуются многие многоэкстремальные задачи посредством точной квадратичной регуляризации [6].

Постановка задачи. Рассмотрим следующую многоэкстремальную задачу

$$\max\{\|x\|^2 \mid \|x-a^i\|^2 \le r_i^2, i=1,...,m\}. \qquad (1)$$

Построим функцию Лагранжа

$$L(x,\lambda)=\|x\|^2-\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(\|x-a^i\|^2-r_i^2)$$

и решим задачу (1) методом множителей Лагранжа, получим решение

$$x(\lambda)=\frac{\sum_{i=1}^{m}\lambda_i a^i}{\sum_{i=1}^{m}\lambda_i-1}. \qquad (2)$$

Найти положительные множители, используя ограничения задачи (1) сложно. Поэтому будем их искать из решения двойственной задачи. Двойственная функция равна максимуму функции Лагранжа и может быть найдена в явном виде

$$g(\lambda)=\frac{\|\sum_{i=1}^{m}\lambda_i a^i\|^2}{\sum_{i=1}^{m}\lambda_i-1}-\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(\|a^i\|^2-r_i^2),$$

а двойственная задача равна

$$\min\left\{g(\lambda) \,\middle|\, \left\|\frac{\sum_{i=1}^{m}\lambda_i a^i}{\sum_{i=1}^{m}\lambda_i-1}-a^i\right\|^2 \le r_i^2 i=1,...,m, \sum_{i=1}^{m}\lambda_i-1\ge 0, \lambda\ge 0\right\}. \qquad (3)$$

Задача (3) - одноэкстремальная и решается прямо-двойственным методом внутренней точки [7].

Пример. Решим задачу (1) для $n = 2$ и $m = 3$, значения a^i и r_i^2 приведены в табл. 1. Эта задача имеет три локальных максимума. Решение задачи (3) равно λ = (0,333584; 0,424901; 0,242259). После подстановки этих значений в формулу (2), определим точку глобального максимума x^* = (0,060608; 5,08025) задачи (1). Разрыв двойственности в этой задаче больше нуля $\|x(\lambda)\|^2$ = 25,8126, $g(\lambda)$ = 56,20748. Активным в точке x^* будет первое и третье ограничение. Решим для этих ограничений линейную систему уравнений

$$x^* - \sum \lambda(x^* - a^i) = 0,$$

получим оптимальные множители Лагранжа λ^* = (0,17207; 0; 0,34898). Для этих множителей разрыв двойственности будет равен нулю $g(\lambda^*) = \| x^*\|^2$ = 25,8126.

Таблица 1.

Исходные данные для примера

a^1	a^2	r^2
12	-4	225
-6	6	109
-6	5	$(\sqrt{136} + 0{,}1)^2$

Если в двойственной задаче (3) не учитывать ограничений прямой задачи (так делается во всех двойственных методах), то получим больший разрыв двойственности $\|x(\lambda)\|^2$ = 3,413172, причем точка $x(\lambda)$ не будет экстремальной для задачи (1). В некоторых случаях точка $x(\lambda)$ будет недопустимой для задачи (1).

Переместим допустимое множество задачи (1) вдоль биссектрисы положительного ортанта на величину h и используем точную квадратичную регуляризацию. Такое преобразование приведет к уменьшению $g(\lambda)$. Для рассмотренного примера после преобразования разрыв двойственности становится равным нулю.

Выводы. При использовании точной квадратичной регуляризации [6] общая задача нелинейной оптимизации преобразуется к максимизации нормы вектора на выпуклом множестве, которое аппроксимируется пересечением шаров.

Для решения полученной задачи используется двойственный метод.

Проведённые численные эксперименты подтверждают эффективность рассмотренного двойственного метода.

Литература

1. Horst R. Global Optimization: Deterministic Approaches / R. Horst, H. Tuy. – 3rd ed., Berlin: Springer–Verlag, 1996. – 727 p.
2. Essays and surveys in Global optimization / Ed. by C. Audet, P. Hansen, G. Savard. – Springer Science+Business Media, Inc. – 2005. – 301 p.
3. Ye Y. Semidefinite programming / Y. Ye. – Stanford University, 2003. – 161 p.
4. Шор Н. З. Квадратичные экстремальные задачи и недифференцируемая оптимизация / Н. З. Шор, С. И. Стеценко. – К.: Наук. думка, 1989. – 205 с.
5. Kenneth V. P. Differential Evolution. A Practical Approach to Global Optimization / V. P. Kenneth, R. M. Storn, J. A. Lampinen. – Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2005. – 542 p.
6. Косолап, А. И. Глобальная оптимизация. Метод точной квадратичной регуляризации / А. И. Косолап – Днепропетровск: ПГАСА, 2015 – 164 с.
7. Nocedal J., Wright S. J. Numerical optimization. Springer, 2006. 685 p.